Aldo Montesano PRINCIPI DI ANALISI ECONOMICA

Cap. 7 LA SCELTA IN CONDIZIONI DI INCERTEZZA

La scelta analizzata nei capitoli precedenti ha per oggetto azioni, sull'insieme delle quali è definito un sistema di preferenza $\langle A, \succsim \rangle$, che è, normalmente, per ipotesi, regolare (cioè, completo e transitivo), così come indicato nel Capitolo 2. Il problema esaminato in questo capitolo riguarda la determinazione del sistema di preferenza $\langle A, \succsim \rangle$ nel caso in cui le azioni hanno una conseguenza incerta, nel caso, cioè, in cui a ciascuna di esse sono associate diverse possibili conseguenze. In altri termini, l'agente tiene conto, nel suo sistema di preferenza, delle conseguenze che possono risultare dalle azioni e degli eventi che le determinano.

Ad esempio, possa un agente scegliere tra a e a' (quindi, con $A = \{a, a'\}$). Sia a l'acquisto, per 100.000 euro, di titoli di stato, da detenere per un periodo di tempo assegnato, alla fine del quale l'agente riceve con certezza la somma di 150.000 euro, e sia a' l'acquisto di un determinato appartamento di pari valore da detenere per lo stesso periodo di tempo. L'agente sceglie a se $a \succ a'$, oppure a' se $a' \succ a$ (mentre sceglie indifferentemente a o a' se $a \sim a'$). Oggetto di indagine sono, in questo capitolo, le ragioni per cui risultano $a \succsim a'$ e/o $a' \succsim a$. Queste risiedono, in generale, nella valutazione delle conseguenze associate alle due azioni e delle circostanze che possono presentarsi nel periodo di tempo assegnato o alla fine di esso. La preferenza tra a e a' tiene conto che la conseguenza di a è il rimborso certo alla scadenza, senza che eventi particolari possano influire su di esso, e che le conseguenze di a' sono il possesso dell'appartamento, che consente all'agente di usarlo o di locarlo a prezzi che dipendono da diverse possibili circostanze, e il suo incerto valore finale di vendita, che dipende anch'esso da diverse possibili circostanze. Queste circostanze hanno diverse possibilità di accadimento e rendono il possesso dell'appartamento più o meno appetibile, ad esempio, se i vicini risultano più o meno simpatici e i prezzi di fitto e finale di vendita più o meno elevati.

L'analisi della scelta in condizioni di incertezza assume che il *sistema di preferenza* $\langle A, \succsim \rangle$ sia *razionale*, cioè, non solo che il criterio di scelta sia rappresentabile con un sistema regolare (ossia, completo e transitivo) di preferenza, ma anche che questo presenti proprietà specifiche che lo qualificano come razionale. La razionalità di $\langle A, \succsim \rangle$ consiste nella dipendenza (nel senso che verrà indicato) di questo sistema di preferenza dalle conseguenze possibili e dalle circostanze che le generano.

7.1 La razionalità del sistema di preferenza

Quanto indicato precedentemente può essere formalizzato nel modo seguente. Abbia l'agente la possibilità di scegliere una della azioni dell'insieme A. Ad ogni azione sono associati degli *esiti* (risultati, *outcome*, *payoff*), raggruppati nell'insieme X. Le possibili circostanze di cui l'agente tiene conto nella sua scelta siano gli elementi di un insieme di *stati di natura* S. Ogni stato di natura è una descrizione sufficientemente dettagliata delle circostanze che l'agente ritiene influenti. Ad ogni azione $a \in A$ l'agente associa un insieme di *conseguenze* possibili $C(a)$. Ogni conseguenza è la descrizione di tutti gli aspetti dell'azione a di cui l'agente tiene conto una volta che l'incertezza si sia risolta, cioè, una volta che si sia realizzato uno stato di natura. Gli insiemi A, X e S includono tutti gli aspetti rilevanti al riguardo, per cui le conseguenze delle azioni sono elementi di un insieme $C \subseteq A \times X \times S$. Scelta un'azione, si può verificare una sola conseguenza, a seconda dello stato di natura che si realizza. Perciò, ad ogni stato di natura corrisponde, in ogni azione, una sola conseguenza. Allora, introdotti gli insiemi A, X, S e $C \subseteq A \times X \times S$, un'azione è una funzione che associa ad ogni stato di natura una conseguenza, ossia $a: S \to C$. Indicando con $c(s\,;\,a)$ la conseguenza che l'agente ritiene si verifichi se sceglie l'azione a e si realizza la stato di natura s, la funzione $a: S \to C$, se l'insieme degli stati di natura S è finito, cioè, $S = \{s_1, s_2, \ldots, s_m\}$, è rappresentata dal vettore $c(s_j; a)$, con $j = 1, \ldots, m$, per cui un'azione $a \in A$ è indicata anche da $a = (c(s_1; a), s_1\,;\, c(s_2; a), s_2\,;\ldots;\, c(s_m; a), s_m)$ o $(c(s_j; a), s_j)_{j=1}^{m}$.

Sia, ad esempio, l'insieme delle azioni $A = \{a_1, a_2, a_3\}$, ove a_1 è una gita a Portofino, a_2 un atto di beneficenza e a_3 l'acquisto del biglietto di una lotteria. Ciascuna delle tre azioni comporti la stessa spesa. Sia l'insieme degli esiti $X = \{x_1, x_2, x_3\}$, ove x_1 è il soggiorno a Portofino, x_2 il possesso del premio della lotteria, x_3 nulla di tutto ciò. L'agente ritenga rilevanti le circostanze se piove o no e se quel biglietto vince il premio o no, mentre tutte le altre circostanze sono per lui irrilevanti ai fini della scelta dell'azione. Quindi, l'insieme degli stati di natura S è composto di 4 elementi: s_1 è lo stato di natura in cui piove e quel biglietto vince il premio; s_2 quello in cui non piove e quel biglietto vince il premio; s_3 quello in cui piove e quel biglietto non vince il premio; s_4 quello in cui non piove e quel biglietto non vince il premio. Sia, poi, $C_1 = \{(x_1, s_1 \cup s_3), (x_1, s_2 \cup s_4)\}$, ove $s_1 \cup s_3$ è l'evento "piove" e $s_2 \cup s_4$ quello "non piove", l'insieme delle conseguenze possibili dell'azione a_1, per cui l'agente associa all'azione a_1 due conseguenze: "soggiorno a Portofino con pioggia" e "soggiorno a Portofino senza pioggia"; $C_2 = \{(a_2, x_3)\}$, ossia, una sola conseguenza, qualunque sia lo stato di natura, è associata all'azione di beneficenza, che l'agente valuta non tanto per il suo esito, ma, soprattutto, per l'azione stessa, che reputa meritoria; e $C_3 = \{x_2, x_3\}$, ossia, le conseguenze dell'azione a_3 coincidono con i suoi esiti. Allora, l'azione a_1 consiste nella funzione $c(s_1; a_1) = c(s_3; a_1) = (x_1, s_1 \cup s_3)$ e $c(s_2; a_1) = c(s_4; a_1) = (x_1, s_2 \cup s_4))$, ossia, $a_1 = ((x_1, s_1 \cup s_3), s_1; (x_1, s_2 \cup s_4), s_2; (x_1, s_1 \cup s_3), s_3; (x_1, s_2 \cup s_4), s_4)$; l'azione a_2 consiste nella funzione $c(s_1; a_2) = c(s_2; a_2) = c(s_3; a_2) = c(s_4; a_2) = (a_2, x_3)$, ossia, $a_2 = ((a_2, x_3), s_1; (a_2, x_3), s_2; (a_2, x_3), s_3; (a_2, x_3), s_4)$; e l'azione a_3 è la funzione $c(s_1; a_3) = c(s_2; a_3) = x_2$ e $c(s_3; a_3) = c(s_4; a_3) = x_3$, ossia, $a_3 = (x_2, s_1; x_2, s_2; x_3, s_3; x_3, s_4)$.

Le azioni, oltre che essere rappresentate come funzioni $a: S \to C$, possono essere rappresentate dalle loro corrispondenze inverse, cioè, $a: C \to (S \cup \varnothing)$, che associano, per ogni azione, nessuno, uno o più stati di natura ad ogni conseguenza $c \in C$ possibile. Indicando, allora, con 2^S l'insieme di tutti i sottoinsiemi di S (insieme vuoto incluso), le azioni sono rappresentate sia dalle funzioni $a: S \to C$, sia dalle funzioni $a: C \to 2^S$. Inoltre, siccome ogni stato di natura genera una e una sola conseguenza, da un lato, il

dominio della funzione a: $S \to C$ coincide con S, e, dall'altro lato, il codominio della funzione a: $C \to 2^S$ è una partizione di S. Gli elementi di questa partizione (escludendo, perciò, gli insiemi vuoti) sono denominati eventi, per cui un *evento* è uno stato di natura o un'unione di stati di natura cui corrisponde la medesima conseguenza. Se l'insieme S è finito, indicando le conseguenze dell'azione a con il vettore $(c_1(a), c_2(a),\ldots, c_n(a))$ e gli eventi corrispondenti con il vettore $(E_1(a), E_2(a),\ldots, E_n(a))$, l'azione può essere rappresentata con $a = (c_1(a), E_1(a); c_2(a), E_2(a);\ldots; c_n(a), E_n(a))$ o $(c_i(a), E_i(a))_{i=1}^{n}$ (ovviamente, con $n \leq m$, essendo il numero n delle conseguenze possibili non superiore a quello m degli stati di natura). (Con riferimento all'esempio precedente, si ha la rappresentazione $a_1 = ((x_1, s_1 \cup s_3), s_1 \cup s_3; (x_1, s_2 \cup s_4), s_2 \cup s_4)$; $a_2 = ((a_2, x_3), S)$; e $a_3 = (x_2, s_1 \cup s_2; x_3, s_3 \cup s_4)$, che è equivalente a quella già indicata).

Si tratta, ora, di definire la razionalità del sistema di preferenza $\langle A, \succsim \rangle$. Introdotti gli insiemi delle azioni A, degli esiti delle azioni X, degli stati di natura S e delle conseguenze $C \subseteq A \times X \times S$, per cui ogni azione è definita da una funzione a: $S \to C$ (il cui dominio coincide con S), oppure, in modo equivalente, da una funzione a: $C \to 2^S$ (il cui codominio è una partizione di S), il sistema di preferenza $\langle A, \succsim \rangle$ è razionale se è basato, in modo razionale, sulle conseguenze delle azioni.

Se $a = (c(a), S)$ per ogni $a \in A$, se, cioè, ogni azione ha una sola conseguenza possibile, come accade in assenza di incertezza, allora la razionalità del sistema di preferenza $\langle A, \succsim \rangle$ coincide con l'esistenza di un sistema regolare (cioè, completo e transitivo) di preferenza sull'insieme delle conseguenze possibili.

Se, invece, vi è incertezza per l'agente, e, quindi, vi sono azioni con diverse possibili conseguenze, la definizione della razionalità del sistema di preferenza $\langle A, \succsim \rangle$ è un poco più complessa e può essere introdotta esplicitando tre condizioni di razionalità:

a) esiste un sistema regolare di preferenza sull'insieme delle conseguenze $\langle C, \succsim^C \rangle$, cioè, l'agente ha preferenze sulle conseguenze possibili e tiene conto di queste nella scelta dell'azione;

b) esiste, per ogni azione $a \in A$, una funzione di aspettative razionali $\psi(a)$: $C \to \mathbb{R}$, cioè, l'agente associa ad ogni azione una distribuzione di aspettative sulle possibili conseguenze (questa distribuzione è spesso una distribuzione di probabilità, ma non è necessario che sia così; si può, cioè, in generale, interpretare il valore $\psi(c; a)$ come il grado di fiducia che si realizzi la conseguenza c se si compie l'azione a). Le aspettative sono, poi, razionali se derivano da una teoria corretta dell'economia. Questa condizione implica che gli insiemi A, S e C siano percepiti correttamente dall'agente;

c) esiste una funzione che determina il sistema di preferenza $\langle A, \succsim \rangle$ in base al sistema di preferenza $\langle C, \succsim^C \rangle$ e alla funzione $\psi(c; a)$. Questa funzione esprime propriamente la teoria dalla scelta in condizioni di incertezza e viene determinata in base ad ipotesi che rappresentano la razionalità delle preferenze sulle azioni, date le preferenze sulle conseguenze e le aspettative sulle conseguenze delle azioni.

Nel seguito, a meno di specificazione contraria, si assume che S sia un insieme finito, cioè, del tipo $S = \{s_1, s_2, \ldots, s_m\}$, e $X \subseteq \mathbb{R}^k$ un insieme compatto (non necessariamente composto di un numero finito di punti). Se l'insieme S degli stati di natura è finito, le azioni $a \in A$ sono finite, possono, cioè, dar luogo ad un numero finito di conseguenze possibili. In tal caso, ogni azione $a \in A$ può essere rappresentata dal vettore $(c_j, s_j)_{j=1}^{m}$, ove $c_j = c_j(s_j; a)$ per $j = 1,\ldots, m$, oppure dal vettore $(c_i, E_i)_{i=1}^{n}$, ove $c_i = c_i(a)$ e $E_i = E_i(a)$ per $i = 1,\ldots, n$ (con $E_i(a) = \cup_{c_j(s_j;a)=c_i} s_j$).

7.2 La teoria dell'utilità attesa per scelte tra lotterie

Si consideri il caso più semplice di azione con conseguenze incerte, quello in cui le azioni sono lotterie. Una lotteria è un'azione le cui conseguenze hanno probabilità date. Si definisce come *lotteria semplice* una lotteria i cui esiti diretti sono gli esiti finali della lotteria. Allora, una lotteria semplice ℓ è un'azione $(x_1, p_1 ; x_2, p_2 ; \ldots ; x_n, p_n)$, indicata anche come $\ell = (x_i, p_i)_{i=1}^{n}$, in cui l'esito x_1 si presenta con probabilità p_1, l'esito x_2 con probabilità p_2, ecc. Si definisce, invece, come *lotteria composta* (o multistadio) una lotteria i cui esiti diretti sono altre lotterie, che possono essere a loro volta lotterie composte, e così via, ma che sono, nell'ultimo stadio, lotterie semplici. Una lotteria composta (a due stadi) è del tipo $\ell = (\ell_h, p_h)_{h=1}^{n}$, con $\ell_h = (x_{i_h}, p_{i_h})_{i_h=1_h}^{n_h}$ per $h = 1, \ldots, n$.

L'incertezza presente nelle lotterie è propriamente indicata come *rischio*: le lotterie sono, cioè, azioni rischiose. Il termine *incertezza* viene invece normalmente usato per rappresentare sia, genericamente, le azioni con diverse possibili conseguenze, sia, specificamente, le azioni le cui conseguenze possibili dipendono da eventi cui non sono associate probabilità date.

Seguendo la presentazione del Paragrafo 7.1, si ha per una lotteria semplice, da un lato, $C = X$, e, dall'altro lato, che ogni stato di natura s_j in S ha probabilità data (cioè, un numero non negativo p_j, con $\sum_{j=1}^{m} p_j = 1$). Inoltre, l'unica caratteristica rilevante degli stati di natura è la probabilità. Allora, la funzione delle aspettative è assegnata esogenamente con le probabilità. Quindi, l'azione $(c_i(a), E_i(a))_{i=1}^{n}$, se è una lotteria, è $(x_i(\ell), p(E_i(\ell)))_{i=1}^{n}$ e può essere presentata come $\ell = (x_i, p_i)_{i=1}^{n}$, ove $x_i = x_i(\ell)$ e $p_i = p(E_i(\ell))$ per $i = 1, \ldots, n$.

Si indichino con $\mathcal{L}$ e X, rispettivamente, l'insieme delle lotterie (semplici e composte) e quello degli esiti e, quindi, con $\langle \mathcal{L}, \succsim \rangle$ il sistema di preferenze sulle lotterie e con $\langle X, \succsim \rangle$ il sistema di preferenza sugli esiti. Sia $X \subseteq \mathbb{R}^k$ un insieme compatto (spesso, nel seguito, gli esiti sono somme di danaro: in tal caso, si ha $k = 1$, e si assume che $x_i \succ x_h$ se e solo se $x_i > x_h$). Si tratta di determinare, per un insieme di lotterie assegnate $\mathcal{L}$, il legame tra il sistema di preferenza $\langle \mathcal{L}, \succsim \rangle$ e il sistema di preferenza $\langle X, \succsim \rangle$. Se una lotteria semplice ha un solo esito possibile, cioè, questo esito si verifica con probabilità pari a 1 (queste lotterie vengono spesso qualificate come *lotterie degeneri*), allora, essa è ritenuta equivalente all'esito certo, ossia, $\ell = (x, 1) \sim x$ e, quindi, se $\ell = (x, 1)$ e $\ell' = (x', 1)$ si ha $\ell \succsim \ell'$ se e solo se $x \succsim x'$. Se, invece, una lotteria ha diversi esiti possibili, è, cioè, una generica lotteria semplice del tipo $\ell = (x_i, p_i)_{i=1}^{n}$ oppure è una lotteria composta, allora, la teoria dominante sulla relazione tra i sistemi di preferenza $\langle \mathcal{L}, \succsim \rangle$ e $\langle X, \succsim \rangle$ è la *teoria dell'utilità attesa* (formalizzata da von Neumann e Morgenstern,

1944). Il teorema che la introduce richiede alcune ipotesi (o assiomi), introdotte dalle tre definizioni seguenti.

Definizione 7.1 (*Principio delle lotterie composte*). Il principio delle lotterie composte asserisce che l'agente ritiene ogni lotteria composta equivalente alla lotteria semplice (o ridotta) ottenuta associando ad ogni esito finale la sua probabilità composta. Ad esempio, la lotteria composta $\ell = (\ell_1, p_1 ; \ell_2, p_2)$, ove $\ell_1 = (x_1, p_{1_1} ; x_2, p_{2_1} ; x_3, p_{3_1})$ e $\ell_2 = (x_1, p_{1_2} ; x_3, p_{3_2})$, è equivalente alla lotteria $(x_1, p_{1_1} p_1 + p_{1_2} p_2 ; x_2, p_{2_1} p_1 ; x_3, p_{3_1} p_1 + p_{3_2} p_2)$. (Si noti come le condizioni $p_1 + p_2 = 1$, $p_{1_1} + p_{2_1} + p_{3_1} = 1$ e $p_{1_2} + p_{3_2} = 1$ implichino la condizione $(p_{1_1} p_1 + p_{1_2} p_2) + (p_{2_1} p_1) + (p_{3_1} p_1 + p_{3_2} p_2) = 1$).

Una lotteria composta può essere rappresentata con un diagramma ad albero, ove ogni nodo corrisponde ad una lotteria, ogni ramo ad un evento (cioè, una probabilità, con somma pari a 1 per tutti i rami che fuoriescono da uno stesso nodo) e ogni nodo finale (da cui non si dipartono rami) ad un esito. Ad esempio, la lotteria composta suindicata è rappresentata nella Figura 7.1 insieme con la lotteria semplice ad essa equivalente.

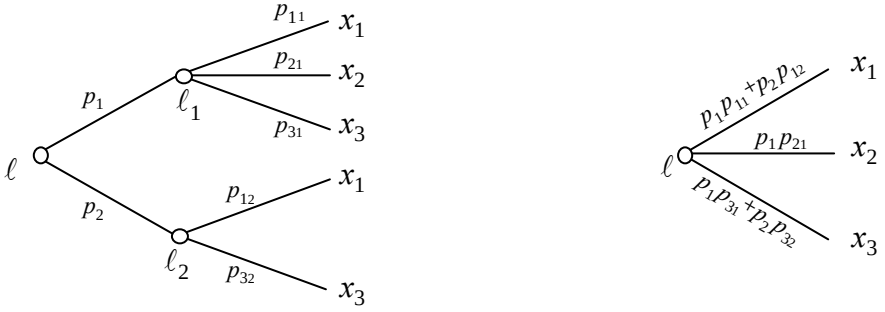

Figura 7.1

Il principio delle lotterie composte assimila le lotterie composte alle lotterie semplici ottenute associando ad ogni esito finale la sua probabilità composta. Nel seguito (come nelle Definizioni 7.2 e 7.3) vengono introdotte lotterie composte e le relazioni di preferenza su di esse. Queste relazioni sono desunte dal sistema di preferenza $\langle \mathcal{L}, \succsim \rangle$ sulle lotterie semplici.

Definizione 7.2 (*Continuità del sistema di preferenza*) Il sistema di preferenza sulle lotterie $\langle \mathcal{L}, \succsim \rangle$ è continuo se, per ogni terna di lotterie ℓ, ℓ', $\ell'' \in \mathcal{L}$, con $\ell' \succ \ell \succ \ell''$, esiste una lotteria composta $\ell''' = (\ell', p ; \ell'', 1-p)$, cioè, una probabilità $p \in (0, 1)$, tale che $\ell''' \sim \ell$. Questa condizione può essere meglio rappresentata richiedendo che l'insieme delle lotterie

composte da ℓ' e ℓ'' almeno altrettanto buone di ℓ e quello delle analoghe lotterie non preferite a ℓ siano insiemi chiusi, ossia, siano chiusi gli insiemi

$$\{p\in[0, 1] : (\ell', p\,;\, \ell'', 1-p) \succsim \ell\} \quad \text{e} \quad \{p\in[0, 1] : \ell \succsim (\ell', p\,;\, \ell'', 1-p)\}$$

Ad esempio, sia ℓ la lotteria $(x, 1)$, ove x è l'esito "essere in buona salute e moderatamente ricco"; $\ell' = (x', 1)$, ove x' è l'esito "essere in buona salute e ricchissimo"; e $\ell'' = (x'', 1)$, ove x'' è l'esito "essere malato e povero", ed è $\ell' \succ \ell \succ \ell''$ (poiché $x' \succ x \succ x''$), l'assioma di continuità è soddisfatto se esiste una probabilità $p\in(0, 1)$ tale che $\ell \sim (\ell', p\,;\, \ell'', 1-p)$, cioè, $(x, 1) \sim (x', p\,;\, x'', 1-p)$. Invece, l'assioma di continuità non è soddisfatto se questa probabilità non esiste, ad esempio, se $(x, 1) \succ (x', p\,;\, x'', 1-p)$ per ogni $p\in[0, 1)$, cioè, se l'agente preferisce "essere in buona salute e moderatamente ricco" ad ogni lotteria che includa l'esito, sia pure con probabilità piccolissima, di "essere malato e povero".

Definizione 7.3 (*Assioma di indipendenza*) Il sistema di preferenza sulle lotterie $\langle \mathcal{L}, \succsim \rangle$ soddisfa l'assioma di indipendenza se, per ogni terna di lotterie $\ell, \ell', \ell''\in\mathcal{L}$ e ogni probabilità $p\in[0, 1]$, si ha

$$(\ell', p\,;\, \ell'', 1-p) \succsim (\ell, p\,;\, \ell'', 1-p) \qquad \text{se e solo se} \qquad \ell' \succsim \ell$$

come rappresentato nella Figura 7.2

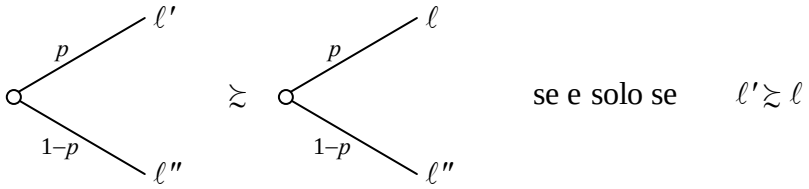

Figura 7.2

Questa condizione implica, per ogni $p\in(0, 1]$, le condizioni seguenti:

$$(\ell', p\,;\, \ell'', 1-p) \succ (\ell, p\,;\, \ell'', 1-p) \qquad \text{se e solo se} \qquad \ell' \succ \ell$$

$$(\ell', p\,;\, \ell'', 1-p) \sim (\ell, p\,;\, \ell'', 1-p) \qquad \text{se e solo se} \qquad \ell' \sim \ell$$

Infatti, $\ell' \succ \ell$ è equivalente a $\ell' \succsim \ell$ e non $\ell' \precsim \ell$, per cui la condizione suindicata richiede $(\ell', p\,;\, \ell'', 1-p) \succsim (\ell, p\,;\, \ell'', 1-p)$ e non $(\ell', p\,;\, \ell'', 1-p) \precsim (\ell, p\,;\, \ell'', 1-p)$ e, quindi, $(\ell', p\,;\, \ell'', 1-p) \succ (\ell, p\,;\, \ell'', 1-p)$. Poi, $\ell' \sim \ell$ equivale a $\ell' \succsim \ell$ e $\ell' \precsim \ell$ per cui risulta $(\ell', p\,;\, \ell'', 1-p) \sim (\ell, p\,;\, \ell'', 1-p)$.

L'assioma di indipendenza indica che sono irrilevanti, nella relazione di preferenza tra due lotterie, gli esiti che si presentano in entrambe le lotterie e si presentano in esse con la stessa probabilità. Cioè, la relazione di preferenza dipende soltanto dalle diversità degli esiti e/o delle probabilità. L'elemento di razionalità di questo assioma consiste nella considerazione che, se si verifica l'evento che determina l'esito comune (cioè, ℓ''), allora l'agente si trova nella stessa situazione, mentre, se si verifica l'evento complementare, allora l'agente si trova in una situazione diversa a seconda della lotteria (cioè, con ℓ' oppure con ℓ), per cui è la preferenza tra gli esiti di questo evento (cioè, $\ell' \succsim \ell$) che determina la preferenza tra le lotterie (quindi, $(\ell', p\,;\, \ell'', 1{-}p) \succsim (\ell, p\,;\, \ell'', 1{-}p)$). Si noti che, se si verifica un evento, non si verifica l'altro, cioè, gli esiti possibili (cioè, ℓ' o ℓ'' , con la lotteria $(\ell', p\,;\, \ell'', 1{-}p)$, e ℓ o ℓ'' , con la lotteria $(\ell, p\,;\, \ell'', 1{-}p)$) sono alternativi, non possono, cioè, presentarsi congiuntamente. (Al contrario, quando si confrontano panieri di beni, può accadere che un sistema di preferenza $\langle X, \succsim\rangle$ indichi $x' \succ x$, ad esempio, che un bicchiere di vino bianco sia preferito ad un bicchiere di vino rosso, e anche $(x'\,,\, x'') \prec (x\,,\, x'')$, ad esempio, che il paniere composto da un bicchiere di vino bianco e una bistecca sia meno gradito del paniere composto da un bicchiere di vino rosso e una bistecca. Quest'ultima relazione di preferenza è ragionevole perché, nel paniere di consumo, il bicchiere di vino e la bistecca sono congiunti e non alternativi. Se, invece, si considerasse la relazione di preferenza tra la lotteria $(x', ½\,;\, x'', ½)$ e la lotteria $(x, ½\,;\, x'', ½)$, allora la disponibilità del bicchiere di vino sarebbe alternativa a quella della bistecca, per cui la preferenza per il bicchiere di vino bianco, in assenza della bistecca, sul bicchiere di vino rosso si riverbererebbe, per l'assioma di indipendenza, sulla relazione di preferenza tra le due lotterie $(x', ½\,;\, x'', ½)$ e $(x, ½\,;\, x'', ½)$).

L'assioma di indipendenza è cruciale per l'introduzione dell'utilità attesa ed è una condizione specifica della scelta in condizioni di incertezza (mentre quello di continuità è una semplice estensione dell'analoga ipotesi di continuità introdotta nel Paragrafo 3.2 per il sistema di preferenza del consumatore). Tuttavia, esso non è sempre soddisfatto, anche se è un principio di razionalità del sistema di preferenza $\langle \mathcal{L}, \succsim\rangle$. Vi sono situazioni in cui le preferenze di molti agenti non si conformano all'assioma di indipendenza. Il caso più noto è quello del cosiddetto *paradosso di Allais* (dal nome dell'economista che lo ha proposto, 1953). Si considerino le quattro seguenti lotterie (ove gli esiti sono somme di denaro in dollari):

$\ell_1 = (500.000, 1)$, $\ell_2 = (2.500.000, 10/100;\ 500.000, 89/100;\ 0, 1/100)$,

$\ell_3 = (500.000, 11/100;\ 0, 89/100)$, $\ell_4 = (2.500.000, 10/100;\ 0, 90/100)$

Molti individui indicano $\ell_1 \succ \ell_2$ e $\ell_4 \succ \ell_3$. Però, queste preferenze sono incompatibili con l'assioma di indipendenza. Infatti, per il principio delle

lotterie composte le quattro lotterie precedenti sono equivalenti alle lotterie rappresentate nella Figura 7.3.

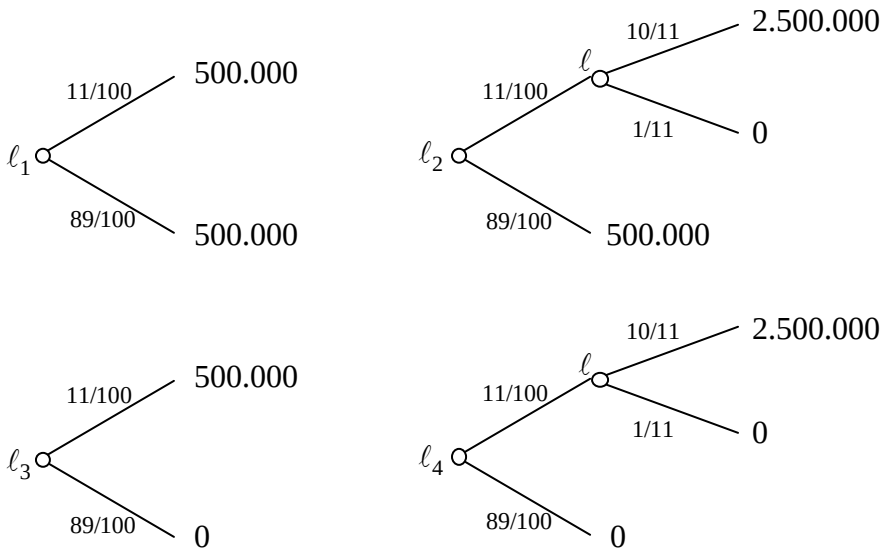

Figura 7.3

Per l'assioma di indipendenza, $\ell_1 \succ \ell_2$ implica $(500.000, 1) \succ \ell$, ove $\ell = (2.500.000, 10/11; 0, 1/11)$, e $(500.000, 1) \succ \ell$ implica $\ell_3 \succ \ell_4$, per cui le relazioni di preferenza indicate, cioè, $\ell_1 \succ \ell_2$ e $\ell_4 \succ \ell_3$, risultano non soddisfare l'assioma di indipendenza. (Per rappresentare preferenze siffatte occorre indebolire l'assioma di indipendenza. Una loro rappresentazione verrà indicata nel Paragrafo 7.6).

Definizione 7.4 (*Utilità attesa*) Il sistema di preferenza $\langle \mathcal{L}, \succsim \rangle$ è rappresentato da una funzione di utilità attesa $U: \mathcal{L} \to \mathbb{R}$ se, per ogni lotteria $\ell \in \mathcal{L}$, si ha

$$U(\ell) = \sum_{i=1}^{n} p_i \, u(x_i)$$

ove p_i è la probabilità dell'esito finale x_i (ne è la probabilità composta se ℓ è una lotteria composta, per cui $\ell_s = (x_i, p_i)_{i=1}^{n}$ è la lotteria semplice ottenuta associando ad ogni esito finale la sua probabilità composta) e $u: X \to \mathbb{R}$ è una funzione di utilità (denominata *funzione di utilità von Neumann-Morgenstern*)[1] che rappresenta il sistema di preferenza $\langle X, \succsim \rangle$. Allora, per

[1] von Neumann e Morgenstern (1944) hanno introdotto il successivo teorema dell'utilità attesa, che dimostra come l'esistenza della funzione di utilità von Neumann-

ogni coppia di lotterie $\ell, \ell' \in \mathcal{L}$, con $\ell = (x_i, p_i)_{i=1}^{n}$ e $\ell' = (x_i', p_i')_{i=1}^{n'}$, è $\ell \succsim \ell'$ se e solo se $\sum_{i=1}^{n} p_i\, u(x_i) \geq \sum_{i=1}^{n'} p_i'\, u(x_i')$.

Il *teorema dell'utilità attesa* (Proposizione 7.1) mostra come il sistema di preferenza $\langle \mathcal{L}, \succsim \rangle$ sia rappresentato dalla funzione di utilità attesa (introdotta con la Definizione 7.4) se e solo se soddisfa le proprietà descritte dalle Definizioni 7.1, 7.2 e 7.3.

Proposizione 7.1 Sia l'insieme degli esiti $X \subseteq \mathbb{R}^k$ compatto (cioè, chiuso e limitato) e il sistema di preferenza $\langle X, \succsim \rangle$ regolare e continuo. Sia $\mathcal{L}$ l'insieme di tutte le lotterie finite (cioè, con un numero finito di esiti). Allora, il sistema di preferenza $\langle \mathcal{L}, \succsim \rangle$ è rappresentabile con una funzione di utilità attesa (Definizione 7.4) se e solo se il sistema di preferenza $\langle \mathcal{L}, \succsim \rangle$ è regolare e soddisfa gli assiomi delle lotterie composte (Definizione 7.1), di continuità (Definizione 7.2) e di indipendenza (Definizione 7.3). Esiste, cioè, una funzione di utilità von Neumann-Morgenstern $u\colon X \to \mathbb{R}$ che rappresenta il sistema di preferenza $\langle X, \succsim \rangle$ tale che il sistema di preferenza $\langle \mathcal{L}, \succsim \rangle$ è rappresentato dalla funzione di utilità attesa $U\colon \mathcal{L} \to \mathbb{R}$, per cui ogni lotteria $\ell \in \mathcal{L}$ ha utilità $U(\ell) = \sum_{i=1}^{n} p_i\, u(x_i)$, con $\ell = (x_i, p_i)_{i=1}^{n}$ se ℓ è

Morgenstern sia legata a proprietà del sistema di preferenza sulle lotterie. Però, la nozione di utilità attesa è ben più antica. Essa risale al contributo di Daniel Bernoulli (1738), che introdusse, nella valutazione delle lotterie, l'utilità attesa (o speranza morale) al posto del valore medio (o atteso). La lotteria esaminata da Daniel Bernoulli è nota come *gioco di San Pietroburgo*: si lancia una moneta, se viene "testa" il banco paga 2 unità monetarie al giocatore e il gioco ha termine; se viene "croce" la moneta viene lanciata una seconda volta; se viene "testa" il banco paga 4 unità monetarie e il gioco ha termine; se viene "croce" vi è un terzo lancio; ecc. Quindi, vi è una successione di lanci della moneta che ha termine non appena viene "testa" e il banco paga la somma 2^n al giocatore, ove n è il numero del lancio in cui esce "testa". Si tratta di determinare quanto il giocatore è disposto a pagare per partecipare al gioco. Il valore medio (o atteso) del gioco (essendo ½ la probabilità che esca "testa" la prima volta; ¼ la probabilità che esca "croce" la prima volta e "testa" la seconda;…; $\frac{1}{2^n}$ la probabilità che esca "croce" nei primi $n-1$ lanci e "testa" nell'n-esimo) è $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} 2^n = \infty$. Allora, un giocatore che valutasse questa lotteria in base al valore medio, sarebbe disposto a pagare qualsiasi somma il banco chiedesse per partecipare al gioco, non importa quanto elevata essa sia. Per spiegare perché non è così, Daniel Bernoulli ipotizzò che la valutazione della lotteria avvenisse nei termini dell'utilità attesa e che la funzione dell'utilità della ricchezza monetaria fosse logaritmica. Allora, indicando con R la ricchezza del giocatore, la somma massima S che egli è disposto a pagare per partecipare al gioco risulta dalla equazione $\ln R = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \ln(R - S + 2^n)$, ossia, ponendo $R' = R - S$, $\ln(R' + S) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \ln(R' + 2^n)$. Il valore di S risulta dipendere da R, di cui è funzione crescente, e risulta pari a 4 per $R = 4$ e a circa 31 per $R = 10^9$: è, quindi, abbastanza limitato. Tuttavia, la soluzione indicata da Bernoulli non è sufficiente per evitare paradossi del tipo del gioco di San Pietroburgo. Se, ad esempio, il banco paga e^{2^n} unità monetarie, invece che 2^n, si ha, con la funzione logaritmica proposta da Bernoulli, ancora che il giocatore è disposto a pagare qualsiasi somma. Si evita il paradosso se la funzione di utilità è limitata (oltre che non decrescente e concava).

una lotteria semplice e, se ℓ è composta, con $\ell_s = (x_i, p_i)_{i=1}^n$, che è la lotteria semplice ottenuta da ℓ associando ad ogni esito finale la sua probabilità composta.

Dimostrazione. La dimostrazione seguente considera lotterie semplici. La sua estensione alle lotterie composte è immediata tenendo conto dell'assioma delle lotterie composte. Se il sistema di preferenza $\langle X, \succsim \rangle$ è tale che $x \sim x'$ per ogni coppia $x, x' \in X$, allora il sistema di preferenza $\langle \mathcal{L}, \succsim \rangle$ è tale che $\ell \sim \ell'$ per ogni coppia $\ell, \ell' \in \mathcal{L}$ (per l'assioma di indipendenza) e il principio di utilità attesa è banalmente soddisfatto. Se non è $x \sim x'$ per ogni coppia $x, x' \in X$, allora esiste una coppia $\overline{x}, \underline{x} \in X$ tale che $u(\overline{x}) = \max_{x \in X} u(x)$ e $u(\underline{x}) = \min_{x \in X} u(x)$. Conviene, a questo punto, dividere la dimostrazione in diverse fasi successive.

a) Le lotterie $\overline{\ell} = (\overline{x}, 1)$ e $\underline{\ell} = (\underline{x}, 1)$ sono tali che $\overline{\ell} \succ \underline{\ell}$ e $\overline{\ell} \succsim \ell \succsim \underline{\ell}$ per ogni $\ell \in \mathcal{L}$. Si ha $\overline{\ell} \succ \underline{\ell}$ poiché $\overline{\ell} \sim \overline{x}$, $\underline{\ell} \sim \underline{x}$ e $\overline{x} \succ \underline{x}$. L'implicazione $\overline{\ell} \succsim \ell \succsim \underline{\ell}$ può essere dimostrata per induzione. Se $n = 2$, considerando, cioè, le lotterie $\ell = (x_1, p_1 ; x_2, p_2)$ con due esiti, si ha, per l'assioma di indipendenza, $\overline{\ell} = (\overline{x}, 1) \succsim (\overline{x}, p_1 ; x_2, p_2) \succsim (x_1, p_1 ; x_2, p_2) \succsim (x_1, p_1 ; \underline{x}, p_2) \succsim (\underline{x}, 1) = \underline{\ell}$, per cui $\overline{\ell} \succsim \ell \succsim \underline{\ell}$. Se questa relazione vale per ogni lotteria ℓ con $n-1$ esiti possibili, allora, per ogni lotteria $\ell = (x_i, p_i)_{i=1}^n$ con n esiti, si ha, per l'assioma di indipendenza, $\overline{\ell} = (\overline{x}, 1) \succsim (\overline{x}, p_1 ; (x_i, p_i/(1-p_1))_{i=2}^n, 1-p_1) \succsim (x_i, p_i)_{i=1}^n \succsim ((x_i, p_i/(1-p_n))_{i=1}^{n-1}, 1-p_n ; \underline{x}, p_n) \succsim (\underline{x}, 1) = \underline{\ell}$, per cui $\overline{\ell} \succsim \ell \succsim \underline{\ell}$. Quindi, per induzione, si ha $\overline{\ell} \succsim \ell \succsim \underline{\ell}$ per ogni $\ell \in \mathcal{L}$.

b) Per ogni coppia di lotterie ℓ, ℓ' con $\ell = (\overline{x}, p; \underline{x}, 1-p)$ e $\ell' = (\overline{x}, p'; \underline{x}, 1-p')$ si ha $\ell \succ \ell'$ se e solo se $p > p'$. Infatti, se $p > p'$, per il principio delle lotterie composte, si ha $\ell \sim (\overline{x}, p'; \ell'', 1-p')$, ove $\ell'' = (\overline{x}, \frac{p-p'}{1-p'}; \underline{x}, \frac{1-p}{1-p'})$, con $\ell'' \succ \underline{x}$ per l'assioma di indipendenza (che richiede $\ell'' = (\overline{x}, \frac{p-p'}{1-p'}; \underline{x}, \frac{1-p}{1-p'}) \succ (\underline{x}, \frac{p-p'}{1-p'}; \underline{x}, \frac{1-p}{1-p'}) \sim \underline{x}$)). Allora, per l'assioma di indipendenza, $\ell \sim (\overline{x}, p'; \ell'', 1-p') \succ (\overline{x}, p'; \underline{x}, 1-p') = \ell'$. Se $p = p'$, si ha $\ell = \ell'$. Se $p < p'$, ripetendo a parti invertite la dimostrazione per il caso $p > p'$, si trova $\ell \prec \ell'$.

c) Per ogni $\ell \in \mathcal{L}$, per l'assioma di continuità, i due insiemi $\{p \in [0, 1] : (\overline{x}, p ; \underline{x}, 1-p) \succsim \ell\}$ e $\{p \in [0, 1] : \ell \succsim (\overline{x}, p ; \underline{x}, 1-p)\}$ sono chiusi, oltre che non vuoti poiché $\overline{\ell} = (\overline{x}, 1) \succsim \ell \succsim (\underline{x}, 1) = \underline{\ell}$. Inoltre, da un lato, ogni $p \in [0, 1]$ appartiene ad almeno uno dei due insiemi indicati (con $1 \in \{p \in [0, 1] : (\overline{x}, p ; \underline{x}, 1-p) \succsim \ell\}$ e $0 \in \{p \in [0, 1] : \ell \succsim (\overline{x}, p ; \underline{x}, 1-p)\}$) e, dall'altro lato, essendo l'intervallo $[0, 1]$ connesso, vi è un p che appartiene ad entrambi gli insiemi. Si indichi questa probabilità con $p(\ell)$. Risulta, allora, $\ell \sim (\overline{x}, p(\ell) ; \underline{x}, 1-p(\ell))$. Inoltre, $p(\ell)$ è unico: infatti, per quanto visto al punto *b*), per ogni $p > p(\ell)$ risulta $(\overline{x}, p ; \underline{x}, 1-p) \succ \ell$ e per ogni $p < p(\ell)$ risulta $(\overline{x}, p ; \underline{x}, 1-p) \prec \ell$.

d) Si introduca la funzione $U: \mathcal{L} \to \mathbb{R}$ che associa ad ogni $\ell \in \mathcal{L}$ il valore $U(\ell) = p(\ell)$, definito dalla relazione $\ell \sim (\overline{x}, p(\ell) ; \underline{x}, 1-p(\ell))$. Questa funzione rappresenta il sistema di preferenza $\langle \mathcal{L}, \succsim \rangle$. Infatti, per quanto al punto *b*), per ogni coppia di lotterie $\ell, \ell' \in \mathcal{L}$ con $\ell = (\overline{x}, p; \underline{x}, 1-p)$ e $\ell' = (\overline{x}, p'; \underline{x}, 1-p')$, si ha $\ell \succsim \ell'$ se e solo se $p \geq p'$.

e) La funzione $U(\ell) = p(\ell)$, definita dalla relazione $\ell \sim (\overline{x}\,, p(\ell)\,;\, \underline{x},\, 1-p(\ell))$, è una funzione di utilità attesa. Infatti, essendo $\ell = (x_i,\, p_i)_{i=1}^{n}$ con $x_i \sim (x_i,\, 1) \sim (\overline{x}\,, p(x_i)\,;\, \underline{x},\, 1-p(x_i))$, si ha, per il principio delle lotterie composte e l'assioma di indipendenza, che $\ell \sim ((\overline{x}\,, p(x_i)\,;\, \underline{x},\, 1-p(x_i)),\, p_i)_{i=1}^{n} \sim (\overline{x}\,, \sum_{i=1}^{n} p_i\, p(x_i)\,;\, \underline{x},\, \sum_{i=1}^{n} p_i\, (1-p(x_i))$, per cui, tenendo presente che $p(x_i) = U((x_i,\, 1)) = u(x_i)$ e $U(\ell) = \sum_{i=1}^{n} p_i\, p(x_i)$, risulta $U(\ell) = \sum_{i=1}^{n} p_i\, u(x_i)$.

f) Rimane da dimostrare che la condizione indicata (sistema di preferenza regolare che soddisfa gli assiomi delle lotterie composte, di continuità e di indipendenza) è necessaria. Al riguardo basta osservare che la funzione di utilità attesa implica un sistema di preferenza completo e transitivo che soddisfa le condizioni richieste dagli assiomi delle lotterie composte, di continuità e di indipendenza. □

Nel caso del paradosso di Allais, introdotto precedentemente, vi sono i tre esiti possibili $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$, con $x_1 = 2.500.000$ \$, $x_2 = 500.000$ \$ e $x_3 = 0$ \$, e le relazioni di preferenza $\ell_1 \succ \ell_2$ e $\ell_4 \succ \ell_3$, per $\ell_1 = (x_2,\, 1)$, $\ell_2 = (x_1,\, 10/100\,;\, x_2,\, 89/100\,;\, x_3,\, 1/100)$, $\ell_3 = (x_2,\, 11/100\,;\, x_3,\, 89/100)$ e $\ell_4 = (x_1,\, 10/100\,;\, x_3,\, 90/100)$. Se valesse la teoria dell'utilità attesa, dovrebbe esistere una funzione $u\colon X \to \mathbb{R}$ tale da rendere soddisfatte, per le utilità attese, le disuguaglianze $U(\ell_1) > U(\ell_2)$ e $U(\ell_4) > U(\ell_3)$, ossia,

$$u(x_2) > 0{,}10\, u(x_1) + 0{,}89\, u(x_2) + 0{,}01\, u(x_3)$$
$$0{,}10\, u(x_1) + 0{,}90\, u(x_3) > 0{,}11\, u(x_2) + 0{,}89\, u(x_3)$$

che sono, però, incompatibili tra loro, richiedendo, rispettivamente

$$0{,}10\, u(x_1) - 0{,}11\, u(x_2) + 0{,}01\, u(x_3) < 0$$
$$0{,}10\, u(x_1) - 0{,}11\, u(x_2) + 0{,}01\, u(x_3) > 0$$

Quindi, le preferenze del paradosso di Allais non sono rappresentabili con l'utilità attesa (ciò accade perché esse non soddisfano, come già visto, l'assioma di indipendenza).

La funzione di utilità attesa, se esiste, non è unica, ma è definita a meno di una trasformazione lineare crescente, come indicato di seguito.

Proposizione 7.2 Se l'insieme degli esiti X è compatto e il sistema di preferenza $\langle X, \succsim \rangle$ è tale che $x \succ x'$ per almeno due esiti $x, x' \in X$ e se il sistema di preferenza $\langle \mathcal{L}, \succsim \rangle$ è rappresentato da una funzione di utilità attesa $U\colon \mathcal{L} \to \mathbb{R}$ (e, quindi, vi è una funzione di utilità von Neumann-Morgenstern $u\colon X \to \mathbb{R}$), allora esiste una famiglia di funzioni di utilità attesa che rappresentano tutte lo stesso sistema di preferenza $\langle \mathcal{L}, \succsim \rangle$. Ciascuna di esse è una trasformazione lineare crescente di ciascun altra. Ossia, $U(\ell)$ e $V(\ell)$ sono due funzioni di utilità attesa per il sistema di preferenza $\langle \mathcal{L}, \succsim \rangle$ se e solo se esiste una coppia di scalari $\beta > 0$ e α tale che $V(\ell) = \alpha + \beta\, U(\ell)$ (e si ha, per le funzioni di utilità von Neumann-Morgenstern $u(x)$ e $v(x)$, $v(x) = \alpha + \beta\, u\,(x)$).

Dimostrazione. Se $V(\ell) = \alpha + \beta\, U(\ell)$ con $\beta > 0$, allora risulta $V(\ell) \geq V(\ell')$ se e solo se è $\alpha + \beta\, U(\ell) \geq \alpha + \beta\, U(\ell')$, cioè, se e solo se $U(\ell) \geq U(\ell')$: quindi, se $V(\ell) = \alpha +$

$\beta\, U(\ell)$ con $\beta > 0$, allora le funzioni di utilità $U(\ell)$ e $V(\ell)$ rappresentano lo stesso sistema di preferenza $\langle \mathcal{L}, \succsim \rangle$. Per dimostrare la necessità della condizione, si considerino due funzioni di utilità attesa $U(\ell)$ e $V(\ell)$ che rappresentino lo stesso sistema di preferenza $\langle \mathcal{L}, \succsim \rangle$. Per ogni lotteria $\ell \in \mathcal{L}$ si ha $U(\ell) = \sum_{i=1}^{n} p_i\, u(x_i) = \lambda(\ell)\, u(\overline{x}) + (1-\lambda(\ell))\, u(\underline{x})$, ove $u(\overline{x}) = \max_{x \in X} u(x)$ e $u(\underline{x}) = \min_{x \in X} u(x)$. Essendo, conseguentemente, $\ell \sim (\overline{x}, \lambda(\ell); \underline{x}, 1-\lambda(\ell))$, si ha $V(\ell) = V(\overline{x}, \lambda(\ell); \underline{x}, 1-\lambda(\ell)) = \lambda(\ell)\, v(\overline{x}) + (1-\lambda(\ell))\, v(\underline{x})$, cioè $V(\ell) = v(\underline{x}) + \lambda(\ell)(v(\overline{x}) - v(\underline{x}))$. Ponendo, allora, $\beta = \dfrac{v(\overline{x}) - v(\underline{x})}{u(\overline{x}) - u(\underline{x})} > 0$ e $\alpha = v(\underline{x}) - \beta\, u(\underline{x})$, si ha $V(\ell) = \alpha + \beta\, u(\underline{x}) + \lambda(\ell)\ \beta\,(u(\overline{x}) - u(\underline{x})) = \alpha + \beta\, U(\ell)$, con $\beta > 0$. Perciò, le funzioni di utilità attesa $U(\ell)$ e $V(\ell)$, che rappresentano lo stesso sistema di preferenza $\langle \mathcal{L}, \succsim \rangle$, risultano essere legate da una relazione lineare crescente. Si può vedere, infine, che se $U(\ell)$ e $V(\ell)$ sono due funzioni di utilità attesa per $\langle \mathcal{L}, \succsim \rangle$, allora $V(\ell) = \alpha + \beta\, U(\ell)$ se e solo se $v(x) = \alpha + \beta\, u(x)$. Infatti, si ha $V(\ell) = \alpha + \beta\, U(\ell)$ per ogni $\ell \in \mathcal{L}$ se e solo se, per ogni $\ell \in \mathcal{L}$, $\sum_{i=1}^{n} p_i\, v(x_i) = \alpha + \beta \sum_{i=1}^{n} p_i\, u(x_i)$, cioè, $\sum_{i=1}^{n} p_i\, v(x_i) = \sum_{i=1}^{n} p_i\, (\alpha + \beta\, u(x_i))$, per cui $V(\ell) = \alpha + \beta\, U(\ell)$ è equivalente a $v(x) = \alpha + \beta\, u(x)$. □

Naturalmente, il sistema di preferenza $\langle \mathcal{L}, \succsim \rangle$, se è rappresentabile con una funzione di utilità $U: \mathcal{L} \to \mathbb{R}$, allora è rappresentabile con una qualsiasi funzione che ne sia una trasformazione monotona crescente (come indicato nel Paragrafo 2.2), non soltanto con le sue trasformazioni lineari crescenti. La Proposizione 7.2 non richiede che la rappresentazione di $\langle \mathcal{L}, \succsim \rangle$ implichi funzioni di utilità che siano legate tra loro da relazioni lineari, ma richiede questa proprietà soltanto per le funzioni di utilità attesa. In altri termini, se $U(\ell)$ è una funzione di utilità attesa che rappresenta il sistema di preferenza $\langle \mathcal{L}, \succsim \rangle$, allora le altre funzioni di utilità attesa che rappresentano lo stesso sistema di preferenza sono trasformazioni lineari crescenti di $U(\ell)$, mentre le trasformazioni monotone crescenti, non lineari, rappresentano anch'esse il sistema di preferenza $\langle \mathcal{L}, \succsim \rangle$, ma non sono funzioni di utilità attesa. Si può vedere come, mentre le funzioni di utilità attesa rappresentano il sistema di preferenza introducendo per ogni lotteria una media aritmetica, ponderata con le probabilità, delle utilità von Neumann-Morgenstern degli esiti possibili della lotteria, le altre funzioni di utilità introducano una generica media associativa (di cui quella aritmetica è un caso particolare). Infatti, sia $U(\ell)$ una funzione di utilità attesa che rappresenta $\langle \mathcal{L}, \succsim \rangle$, cioè, per ogni $\ell \in \mathcal{L}$ si ha $U(\ell) = \sum_{i=1}^{n} p_i\, u(x_i)$. Allora, per ogni altra funzione di utilità $V(\ell)$ che sia una trasformazione monotona crescente di $U(\ell)$, cioè, $V(\ell) = F(U(\ell))$, si ha $V(\ell) = F(\sum_{i=1}^{n} p_i\, F^{-1}(u(x_i)))$, ove $F(.)$ è una generica funzione monotona crescente e $F^{-1}(.)$ è la sua trasformazione inversa. La relazione suindicata $V(\ell) = F(\sum_{i=1}^{n} p_i\, F^{-1}(u(x_i)))$ è proprio la relazione che definisce la media associativa nel senso di Chisini.[2] Ad esempio, se $V(\ell) = e^{U(\ell)}$, allora $V(\ell) = e^{\sum_{i=1}^{n} p_i \ln u(x_i)} = \prod_{i=1}^{n} u(x_i)^{p_i}$, ossia, la funzione di utilità $V(\ell)$ rappresenta il sistema di preferenza $\langle \mathcal{L}, \succsim \rangle$ introducendo per ogni lotteria una media geometrica (anziché aritmetica), ponderata con le probabilità, delle utilità von Neumann-Morgenstern degli esiti possibili. L'utilità attesa, ossia, la media aritmetica ponderata delle utilità von Neumann-Morgenstern, viene preferita nell'analisi perché è di più comodo impiego, ma potrebbe essere sostituita con qualsiasi altra media associativa.

[2] Al riguardo, Chisini (1929), de Finetti (1931) e Montesano (1982).

7.3 Due rappresentazioni geometriche

Si considerino lotterie con tre possibili esiti assegnati $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}^k$ e sia l'insieme $\mathcal{L}$ composto da tutte le lotterie $\ell = (x_1, p_1 ; x_2, p_2 ; x_3, p_3)$, ove $p_1, p_2, p_3 \in \mathbb{R}_+$ con $p_1 + p_2 + p_3 = 1$. Si ha, allora, l'insieme

$$\mathcal{L}(x_1, x_2, x_3) = \{p_1, p_3 \in \mathbb{R}_+ : p_1 + p_3 \leq 1\}$$

che è denominato *triangolo di Marschak-Machina* (dal nome degli economisti che lo hanno introdotto e usato) e che è rappresentato nella Figura 7.4, ove sono indicate anche alcune curve di indifferenza per il caso in cui vale la teoria dell'utilità attesa.

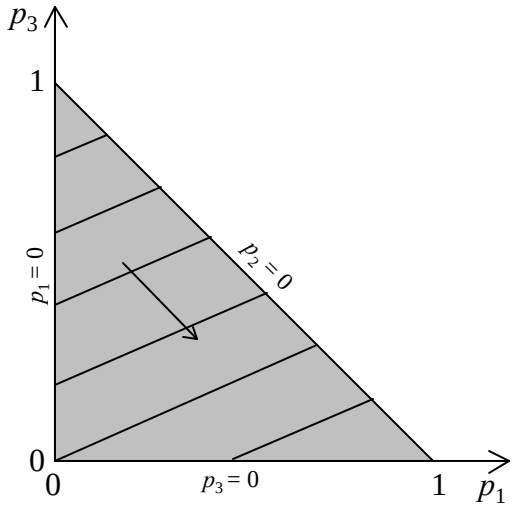

Figura 7.4

Se vale la teoria dell'utilità attesa, il sistema di preferenza $\langle \mathcal{L}(x_1, x_2, x_3), \succsim \rangle$ è rappresentato dalla funzione di utilità attesa $U(\ell) = p_1\, u(x_1) + (1-p_1-p_3)\, u(x_2) + p_3\, u(x_3)$, per cui le curve di indifferenza hanno equazione

$$p_3 = \frac{u(x_2) - U(\ell)}{u(x_2) - u(x_3)} + \frac{u(x_1) - u(x_2)}{u(x_2) - u(x_3)}\, p_1$$

sono, cioè, segmenti paralleli con pendenza $\dfrac{u(x_1) - u(x_2)}{u(x_2) - u(x_3)}$, e, se è $u(x_1) > u(x_2) > u(x_3)$, hanno utilità crescente andando dal vertice $p_1 = 0$, $p_3 = 1$ al vertice $p_1 = 1$, $p_3 = 0$.

Si può vedere come le preferenze del caso del paradosso di Allais, presentato nel Paragrafo 7.2, siano incompatibili, nel triangolo di Marschak-Machina, con curve di indifferenza parallele. Infatti, essendo $\ell_1 \succ \ell_2$ e $\ell_4 \succ \ell_3$, la curva di indifferenza della lotteria ℓ_1 passa in basso rispetto a ℓ_2 e quella di ℓ_3 passa in alto rispetto a ℓ_4 . Risulta, allora, che queste curve di indifferenza non possono essere parallele tra loro poiché il segmento che unisce le lotterie ℓ_1 e ℓ_2 è parallelo a quello che unisce le lotterie ℓ_3 e ℓ_4 .

Una rappresentazione geometrica, nota come diagramma di Hirshleifer-Yaari, è possibile per le lotterie con due soli possibili esiti unidimensionali, cioè, con $\ell = (x_1, p\,;\, x_2\,,\, 1-p)$, ove $x_1, x_2 \in X$, con $X \subset \mathbb{R}_+$, inoltre, con p assegnato. Il sistema di preferenza $\langle \mathcal{L}, \succsim \rangle$ è, allora, rappresentato da una mappa di curve di indifferenza nel piano degli esiti, di assi x_1 e x_2 .

Se vale la teoria dell'utilità attesa e la funzione von Neumann-Morgenstern $u: X \to \mathbb{R}$ è derivabile, la pendenza delle curve di indifferenza $p\,u(x_1) + (1-p)\,u(x_2) = \bar{U}$, è pari a $\dfrac{dx_2(x_1)}{dx_1} = -\dfrac{p}{1-p}\,\dfrac{u'(x_1)}{u'(x_2)}$, per cui, lungo la bisettrice, ove $x_2 = x_1$, si ha sempre la stessa pendenza, pari a $-\dfrac{p}{1-p}$, come nella Figura 7.5.

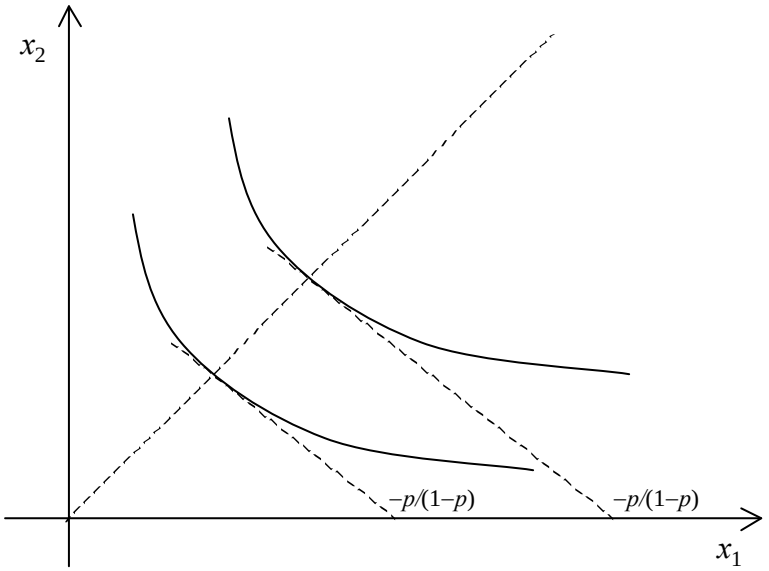

Figura 7.5

7.4 L'avversione al rischio per lotterie con esiti monetari

Si parla di avversione al rischio se il decisore non ama, nel senso che verrà precisato, le azioni che possono generare esiti diversi, per le quali, cioè, non vi è un esito certo. Nel seguito di questo paragrafo, a meno che non sia esplicitamente indicato il contrario, l'avversione al rischio viene esaminata in relazione alle lotterie finite con esiti unidimensionali, cioè, con $X \subseteq \mathbb{R}$, fra cui rientrano le lotterie monetarie (cioè, le lotterie i cui esiti possibili sono somme di moneta).

Sia l'insieme degli esiti possibili un intervallo di $\mathbb{R}$, cioè, $X = [\underline{x}, \overline{x}]$ e sia il sistema di preferenza sull'insieme degli esiti $\langle X, \succsim \rangle$ tale che $x \succ x'$ se e solo se $x > x'$. Sia $\mathcal{L}$ l'insieme di tutte le lotterie finite su X, ossia, composto dalle lotterie $\ell = (x_i, p_i)_{i=1}^{n}$, ove n è un numero finito di esiti possibili e $(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ sono le probabilità dei corrispondenti esiti $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, perciò, con $p_i \geq 0$ per $i = 1, \ldots, n$ e $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$. Sia $\langle \mathcal{L}, \succsim \rangle$ un sistema di preferenza regolare (cioè, completo e transitivo) e continuo, perciò rappresentabile con una funzione di utilità $U: \mathcal{L} \to \mathbb{R}$, che non è necessariamente una funzione di utilità attesa. Quando questa ipotesi viene introdotta, allora si ha $U(\ell) = \sum_{i=1}^{n} p_i\, u(x_i)$, ove $u: X \to \mathbb{R}$ è una funzione di utilità von Neumann-Morgenstern (questa funzione è continua e monotona crescente per le ipotesi appena introdotte).

Nei termini impiegati nel Paragrafo 7.1, si assume che l'insieme degli stati di natura S sia finito, cioè, $S = \{s_1, s_2, \ldots, s_m\}$, per cui non sono possibili più di m esiti, e p_i è la probabilità dell'evento che determina l'esito x_i, per $i = 1, \ldots, n$. Nel seguito verrà esaminato anche il caso in cui S è un insieme qualsiasi di stati di natura, perciò, non necessariamente finito, nel qual caso una lotteria è una distribuzione di probabilità su X, quindi, descrivibile con una *funzione di distribuzione cumulativa* $F(x)$, ove $F(x)$ indica la probabilità che non si verifichi un esito maggiore di x. Per la lotteria $\ell = (x_i, p_i)_{i=1}^{n}$ con $x_i < x_{i+1}$ per ogni $i = 1, \ldots, n-1$, si ha, $F(x) = 0$ per ogni $x \in [\underline{x}, x_1)$, $F(x_i) = \sum_{h=1}^{i} p_h$ per ogni $x \in [x_i, x_{i+1})$ e $F(x) = 1$ per ogni $x \in [x_n, \overline{x}]$. (Se è, come spesso nel seguito, $x_i > x_{i+1}$, si ha $F(x) = 0$ per ogni $x \in [\underline{x}, x_n)$, $F(x) = \sum_{h=i+1}^{n} p_h = 1 - \sum_{h=1}^{i} p_h$ per ogni $x \in [x_{i+1}, x_i)$ e $F(x) = 1$ per ogni $x \in [x_1, \overline{x}]$). La descrizione delle lotterie tramite le funzioni cumulative di probabilità si applica sia alle lotterie finite sia a quelle continue. Quest'ultime sono descritte anche dalle *funzioni di densità di probabilità* $f(x)$, ove $f(x)\,\mathrm{d}x$ è la probabilità che si verifichi un esito compreso tra x e $x + \mathrm{d}x$. La funzione di densità $f(x)$ e la funzione cumulativa $F(x)$ sono legate tra loro dalla relazione $F(x) = \int_{\underline{x}}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$. La teoria dell'utilità attesa istituisce, nel continuo, il funzionale $U(\ell) = \int_X u(x) f(x)\,\mathrm{d}x = \int_X u(x)\,\mathrm{d}F(x)$.

Nelle Figure 7.6 e 7.7 sono indicate due funzioni di distribuzione cumulativa di probabilità, la prima per una lotteria finita, la seconda per una lotteria nel continuo.

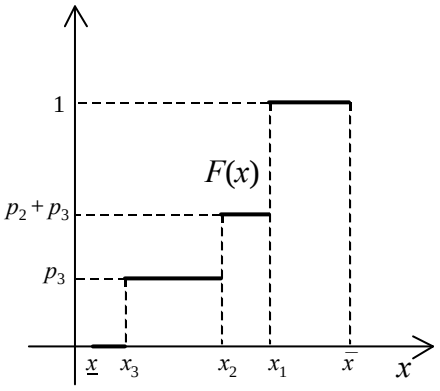

Figura 7.6

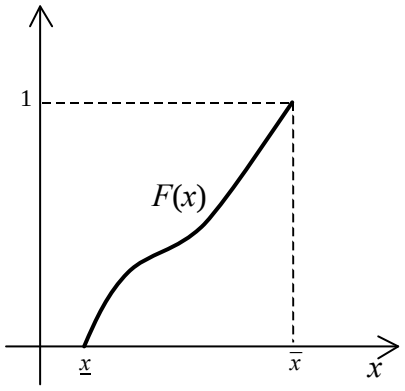

Figura 7.7

Definizione 7.5 (*Valore medio o atteso*) Il *valore medio* (o *atteso*) della lotteria $\ell = (x_i, p_i)_{i=1}^n$ è $EV(\ell) = \sum_{i=1}^n p_i x_i$ e la funzione $EV: \mathcal{L} \to X$ è la *funzione di valore medio*.

Definizione 7.6 (*Equivalente certo*) L'*equivalente certo* $CE(\ell)$ della lotteria $\ell = (x_i, p_i)_{i=1}^n$ è l'esito indifferente alla lotteria, cioè, quell'esito per cui risulta $(CE(\ell), 1) \sim \ell$ nel sistema di preferenza $\langle \mathcal{L}, \succsim \rangle$. Se questo sistema di preferenza è rappresentabile con una funzione di utilità attesa, essendo $U(\ell) = u(CE(\ell))$, risulta la *funzione di equivalente certo* $CE: \mathcal{L} \to X$, con $CE(\ell) = u^{-1}(\sum_{i=1}^n p_i u(x_i))$.

Proposizione 7.3 (*Esistenza e unicità dell'equivalente certo*) Sia il sistema di preferenza sull'insieme degli esiti $\langle X, \succsim \rangle$ tale che $x \succ x'$ se e solo se $x > x'$, con $X = [\underline{x}, \overline{x}]$. Sia $\langle \mathcal{L}, \succsim \rangle$ un sistema di preferenza regolare (cioè, completo e transitivo) e continuo sull'insieme $\mathcal{L}$ di tutte le lotterie su X, tale che $(\overline{x}, 1) \succsim \ell \succsim (\underline{x}, 1)$ per ogni $\ell \in \mathcal{L}$. Allora, per ogni $\ell \in \mathcal{L}$ esiste uno ed un solo equivalente certo $CE(\ell) \in X$. (Si noti come non sia richiesto che $\langle \mathcal{L}, \succsim \rangle$ soddisfi l'assioma di indipendenza, ossia, che valga la teoria dell'utilità attesa).

Dimostrazione. Analogamente alla fase *c*) della dimostrazione della Proposizione 7.1, per ogni $\ell \in \mathcal{L}$, per l'ipotesi di continuità, i due insiemi $\{x \in [\underline{x}, \overline{x}]: (x, 1) \succsim \ell\}$ e $\{x \in [\underline{x}, \overline{x}]: \ell \succsim (x, 1)\}$ sono chiusi, oltre che non vuoti poiché $(\overline{x}, 1) \succsim \ell \succsim (\underline{x}, 1)$. Inoltre, da un lato, ogni $x \in [\underline{x}, \overline{x}]$ appartiene ad almeno uno dei due insiemi indicati (con $\overline{x} \in \{x \in [\underline{x}, \overline{x}]: (x, 1) \succsim \ell\}$ e $\underline{x} \in \{x \in [\underline{x}, \overline{x}]: \ell \succsim (x, 1)\}$) e, dall'altro lato, essendo l'intervallo $[\underline{x}, \overline{x}]$ connesso, vi è un x che appartiene ad entrambi gli insiemi. Si indichi questo esito con $CE(\ell)$. Risulta, allora, $\ell \sim (CE(\ell), 1)$. Inoltre, $CE(\ell)$ è unico: infatti, per ogni coppia $x, x' \in X$, con $x \neq x'$, si ha $(x, 1) \nsim (x', 1)$ per cui non può esservi una coppia $CE(\ell), CE'(\ell) \in X$, con $CE(\ell) \neq CE'(\ell)$, tale che $\ell \sim (CE(\ell), 1) \sim (CE'(\ell), 1)$. □

Definizione 7.7 (*Premio al rischio e avversione al rischio*) Il *premio al rischio* $RP(\ell)$ è la somma massima che l'agente è disposto a pagare per avere il valore medio della lotteria invece che la lotteria: quindi,

$$RP(\ell) = EV(\ell) - CE(\ell)$$

(infatti, la condizione $(EV(\ell) - RP(\ell), 1) \sim \ell$, essendo $\ell \sim (CE(\ell), 1)$, implica $EV(\ell) - RP(\ell) = CE(\ell)$). Un agente è avverso al rischio se il suo sistema di preferenza $\langle \mathcal{L}, \succsim \rangle$ richiede $CE(\ell) \leq EV(\ell)$, cioè $RP(\ell) \geq 0$, per ogni $\ell \in \mathcal{L}$. Correlativamente, è propenso al rischio se $RP(\ell) \leq 0$ e neutrale al rischio se $RP(\ell) = 0$. Egli è strettamente avverso al rischio se è $RP(\ell) > 0$ per ogni $\ell \in \mathcal{L}$ non degenere (strettamente propenso al rischio se $RP(\ell) < 0$).

Proposizione 7.4 Introducendo gli insiemi delle lotterie non preferite all'esito certo x e delle lotterie con valore atteso non superiore a x, cioè,

$$G_\ell(x) = \{\ell \in \mathcal{L}: CE(\ell) \le x\}, \qquad H_\ell(x) = \{\ell \in \mathcal{L}: EV(\ell) \le x\}$$

l'agente è avverso al rischio se e solo se $H_\ell(x) \subseteq G_\ell(x)$ per ogni $x \in X$, propenso al rischio se e solo se $H_\ell(x) \supseteq G_\ell(x)$ e neutrale al rischio se e solo se $H_\ell(x) = G_\ell(x)$.

Dimostrazione. Da un lato, se la relazione $H_\ell(x) \subseteq G_\ell(x)$ non è soddisfatta per ogni $x \in X$, allora vi sono un $x^* \in X$ e un $\ell^* \in H_\ell(x^*)$ tali che $\ell^* \notin G_\ell(x^*)$, cioè, con $EV(\ell^*) \le x^*$ e $CE(\ell^*) > x^*$, per cui si ha $CE(\ell^*) > EV(\ell^*)$ e risulta che l'agente non è avverso al rischio. Quindi, la condizione $H_\ell(x) \subseteq G_\ell(x)$ per ogni $x \in X$ è necessaria perché l'agente sia avverso al rischio. Dall'altro lato, poiché $EV(\ell) \in X$ per ogni $\ell \in \mathcal{L}$, si ha $\ell \in H_\ell(EV(\ell))$ per ogni $\ell \in \mathcal{L}$, per cui la condizione $H_\ell(x) \subseteq G_\ell(x)$ per ogni $x \in X$ implica $\ell \in G_\ell(EV(\ell))$, cioè, $CE(\ell) \le EV(\ell)$ per ogni $\ell \in \mathcal{L}$. Risulta, perciò, che la condizione $H_\ell(x) \subseteq G_\ell(x)$ per ogni $x \in X$ è anche sufficiente perché l'agente sia avverso al rischio. Analogamente, per la propensione al rischio, mentre la condizione per la neutralità al rischio risulta dalla compresenza dell'avversione e della propensione al rischio. □

Nel diagramma di Hirshleifer-Yaari (Figura 7.5 nel Paragrafo 7.3) l'equivalente certo di una lotteria $\ell^* = (x_1^*, p\ ;\ x_2^*, 1-p)$ è rappresentato, per definizione di equivalente certo, dal punto di intersezione tra la bisettrice e la curva di indifferenza della lotteria in esame. Perciò, l'equivalente certo di una lotteria è pari all'ascissa (e all'ordinata) di questo punto. Inoltre, il valore medio della stessa lotteria è pari all'ascissa (e all'ordinata) del punto di intersezione tra la bisettrice e la sua retta di iso-valore medio (di equazione $p\,x_1 + (1-p)\,x_2 = EV(\ell^*) = p\,x_1^* + (1-p)\,x_2^*$), che passa per ℓ^* e ha pendenza pari a $-p/(1-p)$). Allora, vi è avversione (propensione) al rischio se il primo punto di intersezione non è superiore (inferiore) al secondo, come indicato nella Figura 7.8 (ove è indicata la curva di indifferenza di un agente che segue la teoria dell'utilità attesa).

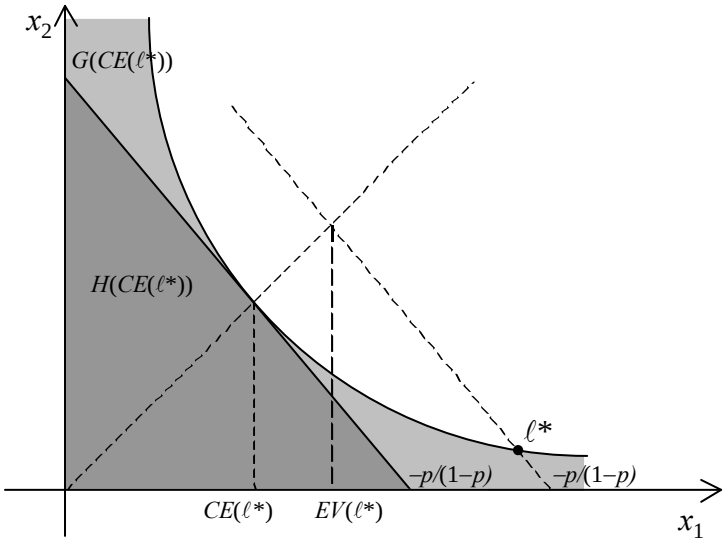

Figura 7.8

La Proposizione 7.4 richiede, perché l'agente sia avverso al rischio, $H_\ell(CE(\ell^*)) \subseteq G_\ell(CE(\ell^*))$, cioè, che la curva di indifferenza e la retta di iso-valore medio passanti per ciascun punto della bisettrice (ove equivalente certo e valore medio coincidono) non si intersechino e che la curva di indifferenza si situi a nord-est rispetto alla retta di iso-valore medio (si situi, invece, a sud-ovest se l'agente è propenso al rischio).

Proposizione 7.5 Se il sistema di preferenza $\langle \mathcal{L}, \succsim \rangle$ è rappresentabile con la funzione di utilità attesa, allora l'agente è avverso al rischio se e solo se la funzione von Neumann-Morgenstern $u: X \to \mathbb{R}$ è concava, propenso al rischio se e solo se è convessa, neutrale al rischio se e solo se è lineare.

Dimostrazione. Se il sistema di preferenza è rappresentabile con una funzione di utilità attesa $U(\ell) = \sum_{i=1}^{n} p_i\, u(x_i)$, si ha, per la Definizione 7.6, $CE(\ell) = u^{-1}(\sum_{i=1}^{n} p_i\, u(x_i))$. Allora, la condizione $CE(\ell) \le EV(\ell)$, cioè, $u^{-1}(\sum_{i=1}^{n} p_i\, u(x_i)) \le \sum_{i=1}^{n} p_i\, x_i$, essendo la funzione $u(x)$ monotona crescente, è equivalente alla condizione[3] $\sum_{i=1}^{n} p_i\, u(x_i)) \le u(\sum_{i=1}^{n} p_i\, x_i)$, ossia, alla concavità della funzione $u(x)$. Analogamente, per la propensione e la neutralità al rischio. □

Come la concavità della funzione $u(x)$ implichi l'avversione al rischio può essere visto nella Figura 7.9, ove è rappresentata una funzione concava di utilità. Vengono indicati, per la lotteria $\ell = (x_1, ½ ; x_2, ½)$, il valore medio, l'utilità attesa e l'equivalente certo.

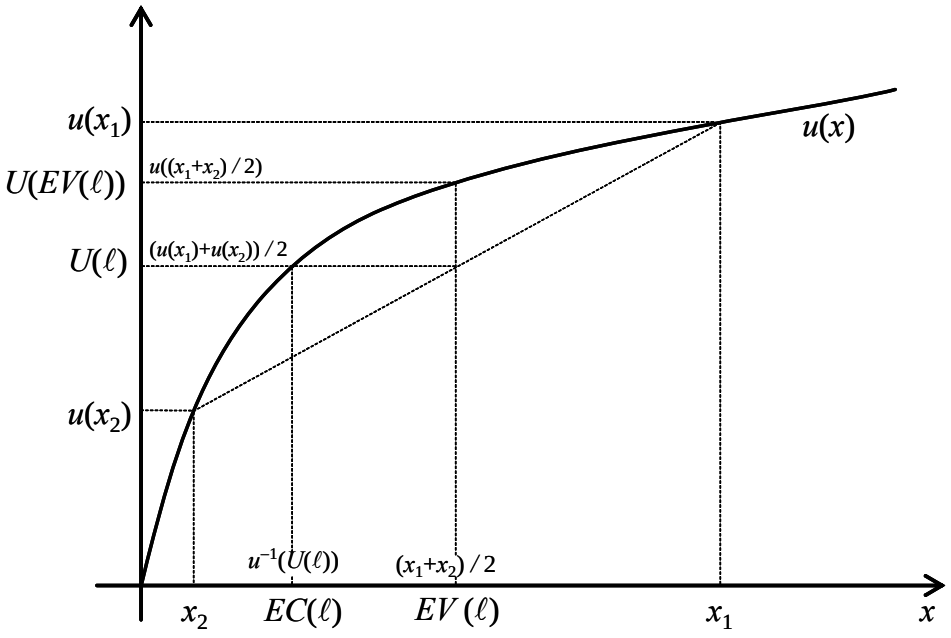

Figura 7.9

[3] Questa disuguaglianza, che definisce la concavità di una funzione, è nota nella letteratura anche come *disuguaglianza di Jensen*.

Prendendo in considerazione la rappresentazione delle lotterie nel triangolo di Marschak-Machina (introdotto nel Paragrafo 7.4), si è già visto come le curve di indifferenza (cioè, di iso-equivalente certo) siano rappresentate, se vale la teoria dell'utilità attesa ed è $x_1 > x_2 > x_3$, da un fascio di segmenti paralleli con pendenza $\frac{u(x_1)-u(x_2)}{u(x_2)-u(x_3)}$. Le rette di iso-valore medio, di equazione $EV(\ell) = p_1 x_1 + (1-p_1-p_3) x_2 + p_3 x_3$, hanno pendenza $\frac{x_1-x_2}{x_2-x_3}$. Se l'agente è avverso al rischio allora la pendenza delle curve di indifferenza è inferiore a quelle di iso-valore medio, poiché la concavità della funzione $u(x)$ richiede $\frac{u(x_1)-u(x_2)}{x_1-x_2} < \frac{u(x_2)-u(x_3)}{x_2-x_3}$. Inoltre, la condizione $H_\ell(x) \subseteq G_\ell(x)$ per ogni $x \in X$, richiede che i segmenti di iso-valore medio $EV(\ell) = x$, oltre ad avere pendenza maggiore, si trovino, per ogni $x \in X$, a nord-ovest dei corrispondenti segmenti di iso-equivalente certo $CE(\ell) = x$, come nella Figura 7.10. All'opposto se l'agente è propenso al rischio: i segmenti di iso-valore medio hanno pendenza inferiore e sono a sud-est dei segmenti di iso-equivalente certo.

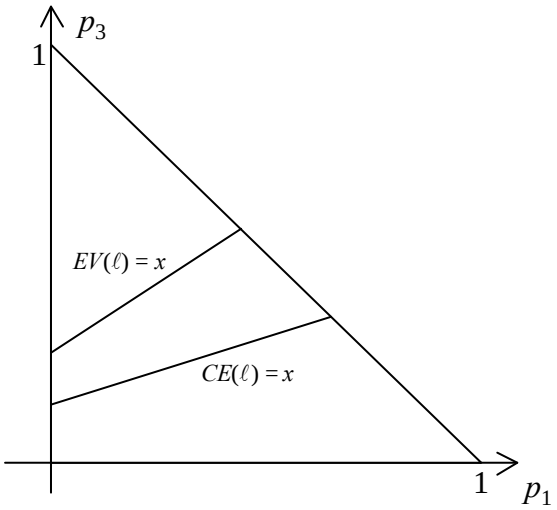

Figura 7.10

La concavità della funzione di utilità von Neumann-Morgenstern implica la concavità della funzione di utilità attesa rispetto agli esiti. Infatti, la concavità di $u(x)$ richiede $u(\lambda x_i+(1-\lambda)x_i') \geq \lambda u(x_i)+(1-\lambda)u(x_i')$ per ogni coppia di esiti $x_i, x_i' \in X$ e $\lambda \in [0, 1]$, per cui, per ogni $\lambda \in [0, 1]$ e ogni terna di lotterie $\ell, \ell', \ell'' \in \mathcal{L}$ con $\ell = (x_i, p_i)_{i=1}^n$, $\ell' = (x_i', p_i)_{i=1}^n$ e $\ell'' = (\lambda x_i+(1-\lambda)x_i', p_i)_{i=1}^n$, risulta $U(\ell'') = \sum_{i=1}^n p_i\, u(\lambda x_i+(1-\lambda)x_i') \geq \sum_{i=1}^n p_i(\lambda u(x_i)+(1-\lambda)\, u(x_i')) = \lambda U(\ell) + (1-\lambda)U(\ell')$. Allora, se l'agente è avverso al rischio e vale la teoria dell'utilità attesa, la funzione $U(\ell)$ è concava (quindi, a maggior ragione,

quasi-concava) rispetto alle conseguenze, per cui le curve di indifferenza nel diagramma di Hirshleifer-Yaari sono convesse (per quanto visto nel Paragrafo 3.4), oltre che situate a nord-est rispetto alla retta di iso-valore medio. (Nella Figura 7.8 è indicata una curva di indifferenza convessa). Analogamente, se l'agente è propenso al rischio, allora le curve di indifferenza sono concave.

Proposizione 7.6 L'agente è avverso al rischio se la funzione di equivalente certo CE: $\mathcal{L} \to X$ è convessa rispetto alle probabilità. L'agente è propenso al rischio se è concava rispetto alle probabilità e neutrale al rischio se è lineare.

Dimostrazione. Si prendano in considerazione, per ogni $(x_i)_{i=1}^n$, tutte le lotterie $\ell = (x_i, p_i)_{i=1}^n$ e la funzione $\phi(p_1, p_2, \ldots, p_n) = CE(\ell) - EV(\ell)$. Poiché le funzioni CE: $\mathcal{L} \to X$ e EV: $\mathcal{L} \to X$ sono, la prima, convessa e, la seconda, lineare rispetto alle probabilità, la funzione $\phi(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ è convessa ed è, quindi, convesso l'insieme $\Phi(p_1, p_2, \ldots, p_n) = \{(p_i)_{i=1}^n : \phi(p_1, p_2, \ldots, p_n) \leq 0\}$. Appartengono a questo insieme tutti i vertici del simplesso delle probabilità $\{(p_i)_{i=1}^n \in \mathbb{R}_+^n : \sum_{i=1}^n p_i = 1\}$, poiché in essi $\phi(p_1, p_2, \ldots, p_n) = 0$. Appartengono, quindi, a Φ tutti i punti del simplesso delle probabilità, essendo l'insieme Φ convesso e i punti del simplesso combinazioni lineari convesse dei suoi vertici. Allora si ha $\phi(p_1, p_2, \ldots, p_n) \leq 0$ per ogni $(p_i)_{i=1}^n$, cioè, $CE(\ell) - EV(\ell) \leq 0$, che è la condizione di avversione al rischio. Analogamente per la propensione al rischio, prendendo in considerazione la funzione $-\phi(p_1, p_2, \ldots, p_n) = EV(\ell) - CE(\ell)$, che è convessa rispetto alle probabilità se la funzione $CE(\ell)$ è concava rispetto ad esse. Se, poi, questa funzione è lineare rispetto alle probabilità, allora è sia convessa che concava, per cui l'agente è, nel contempo, avverso e propenso al rischio, cioè, neutrale. □

La condizione richiesta dalla Proposizione 7.6 è sufficiente, ma non necessaria. Inoltre, non basta che la funzione di equivalente certo sia quasi-convessa rispetto alle probabilità, ossia, non basta, nel triangolo di Marschak-Machina, che le curve di indifferenza siano concave perché vi sia avversione al rischio (e che siano convesse perché vi sia propensione al rischio). Peraltro, se vale la teoria dell'utilità attesa e vi è avversione al rischio, per cui la funzione di von Neumann-Morgenstern è concava, allora la funzione di equivalente certo è convessa rispetto alle probabilità: infatti, in tal caso, si ha $CE(\ell) = u^{-1}(\sum_{i=1}^n p_i\, u(x_i))$, con $u(.)$ crescente e concava, per cui $u^{-1}(.)$ è crescente e convessa. Analogamente, se vi è propensione al rischio o neutralità.

Definizione 7.8 (*Avversione comparata al rischio*) L'agente A è più avverso al rischio dell'agente B se i loro due sistemi di preferenza $\langle \mathcal{L}, \succsim^A \rangle$ e $\langle \mathcal{L}, \succsim^B \rangle$ determinano $CE_A(\ell) \leq CE_B(\ell)$ per ogni $\ell \in \mathcal{L}$.

Questa definizione implica, nel diagramma di Hirshleifer-Yaari, che le curve di indifferenza dei due agenti passanti per uno stesso punto della bisettrice non si intersechino e che la curva di indifferenza dell'agente più avverso al rischio si situi a nord-est rispetto a quella dell'agente meno avverso al rischio, come risulta evidente dalla Figura 7.11.

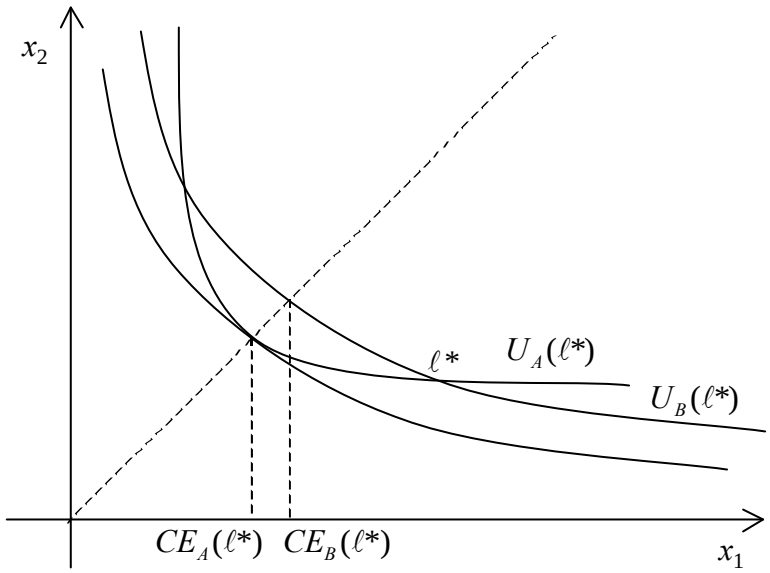

Figura 7.11

Proposizione 7.7 Se l'agente A è più avverso al rischio dell'agente B e i loro sistemi di preferenza $\langle \mathcal{L}, \succsim^A \rangle$ e $\langle \mathcal{L}, \succsim^B \rangle$ sono rappresentabili con la funzione di utilità attesa, allora la funzione di utilità von Neumann-Morgenstern $u_A(x)$ è una trasformazione concava della funzione di utilità $u_B(x)$. Esiste, cioè, una funzione crescente e concava $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che $u_A(x) = g(u_B(x))$ per ogni $x \in X$, ove X è un intervallo chiuso in $\mathbb{R}$.

Dimostrazione. Le funzioni monotone crescenti $u_A(x)$ e $u_B(x)$ sono legate tra loro da una relazione $u_A(x) = g(u_B(x))$ monotona crescente: infatti, $u_B(x') > u_B(x)$ implica che $x' > x$ e, quindi, anche $u_A(x') > u_A(x)$, cosicché $u_B' > u_B$ implica $u_A' > u_A$). Allora, essendo $u_A(CE_A(\ell)) = U_A(\ell) = \sum_{i=1}^n p_i\, u_A(x_i) = \sum_{i=1}^n p_i\, g(u_B(x_i))$ e $u_A(CE_B(\ell)) = g(u_B(CE_B(\ell)) = g(U_B(\ell)) = g(\sum_{i=1}^n p_i\, u_B(x_i))$, si ha $CE_A(\ell) \le CE_B(\ell)$ per ogni lotteria $\ell \in \mathcal{L}$ se e solo se $\sum_{i=1}^n p_i\, g(u_B(x_i)) \le g(\sum_{i=1}^n p_i\, u_B(x_i))$ per ogni lotteria $(x_i, p_i)_{i=1}^n$, cioè, se e solo se la funzione $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è concava. □

Finora è stata considerata l'*avversione globale al rischio*, cioè, la relazione $CE(\ell) \le EV(\ell)$ è stata introdotta per ogni lotteria $\ell \in \mathcal{L}$. Si consideri, ora, l'*avversione locale al rischio*, prendendo in considerazione soltanto le lotterie piccole, cioè, le lotterie che hanno conseguenze poco diverse tra loro. A questo proposito, si indichi con il simbolo $x + t\,\ell$ la lotteria $(x + t\,x_i, p_i)_{i=1}^n$, ove $\ell = (x_i, p_i)_{i=1}^n$.

Definizione 7.9 Un agente è localmente avverso al rischio se, per ogni $x \in X$ e $\ell \in \mathcal{L}$, vi è un $t^* > 0$ tale che $CE(x+t\ell) \le EV(x+t\ell)$ se $t \in [0, t^*]$.

E' localmente propenso al rischio se $CE(x+t\ell) \geq EV(x+t\ell)$ e neutrale al rischio se $CE(x+t\ell) = EV(x+t\ell)$. Perciò, se la funzione di equivalente certo è derivabile, allora l'agente è localmente avverso al rischio se

$$\lim_{t\to 0} \frac{d}{dt}(EV(x+t\ell) - CE(x+t\ell)) > 0$$

e solo se

$$\lim_{t\to 0} \frac{d}{dt}(EV(x+t\ell) - CE(x+t\ell)) \geq 0$$

per ogni $x\in X$ e $\ell\in\mathcal{L}$. Analogamente (con segni opposti) per la propensione locale al rischio.

Nel diagramma di Hirshleifer-Yaari, mentre l'avversione globale al rischio richiede che la curva di indifferenza e la retta di iso-valore medio passanti per ciascun punto della bisettrice non si intersechino e che l'intera curva di indifferenza si situi a nord-est rispetto alla retta di iso-valore medio, l'avversione locale al rischio richiede questa proprietà solo in vicinanza della bisettrice.

Proposizione 7.8 Se vale la teoria dell'utilità attesa, allora l'agente è localmente avverso al rischio se e solo se la funzione von Neumann-Morgenstern $u\colon X \to \mathbb{R}$ è concava, propenso al rischio se e solo se è convessa, neutrale al rischio se e solo se è lineare. In altri termini, se vale la teoria dell'utilità attesa, la condizione è la medesima sia per l'avversione (propensione, neutralità) locale che per quella globale.

Dimostrazione. Questa dimostrazione assume che la funzione $u(x)$, oltre che essere continua e monotona crescente, sia anche derivabile due volte. Poiché la funzione $u(x)$ è monotona crescente, si ha $CE(x+t\ell) \leq EV(x+t\ell)$ se e solo se $u(CE(x+t\ell)) \leq u(EV(x+t\ell))$, cioè, se e solo se $\sum_{i=1}^n p_i\, u(x+tx_i) \leq u(\sum_{i=1}^n p_i\,(x+tx_i)) = u(x+\, t\sum_{i=1}^n p_i\, x_i)$, ossia, se e solo se $u(x+\, t\sum_{i=1}^n p_i\, x_i) - \sum_{i=1}^n p_i\, u(x+tx_i) \geq 0$. Vi è avversione locale al rischio se questa disuguaglianza è soddisfatta per t sufficientemente piccoli. Le derivate prima e seconda della funzione $\rho(t) = u(x+\, t\sum_{i=1}^n p_i\, x_i) - \sum_{i=1}^n p_i\, u(x+tx_i)$ sono

$$\rho'(t) = u'(x+\, t\sum_{i=1}^n p_i\, x_i)\sum_{i=1}^n p_i\, x_i - \sum_{i=1}^n p_i\, u'(x+tx_i)\, x_i$$

$$\rho''(t) = u''(x+\, t\sum_{i=1}^n p_i\, x_i)\,(\sum_{i=1}^n p_i\, x_i)^2 - \sum_{i=1}^n p_i\, u''(x+tx_i)\, x_i^2$$

Si ha, perciò, $\rho(0) = 0$, $\rho'(0) = 0$ e $\rho''(0) = -\,\sigma^2(\ell)\, u''(x)$, ove $\sigma^2(\ell) = \sum_{i=1}^n p_i\,(x_i - EV(\ell))^2$ è la varianza della lotteria ℓ . Allora, è $\rho(t) \geq 0$ per t sufficientemente piccoli se $\rho''(0) > 0$ e solo se $\rho''(0) \geq 0$, cioè, essendo $\sigma^2(\ell) > 0$, se $u''(x) < 0$ e solo se $u''(x) \leq 0$. La condizione $u''(x) \leq 0$ per ogni $x\in X$ equivale alla concavità della funzione $u(x)$. Analogamente, la propensione locale al rischio richiede $\rho''(0) \leq 0$, cioè, $u''(x) \geq 0$ per ogni $x\in X$ e, quindi, la neutralità locale richiede $u''(x) = 0$. □

L'avversione locale al rischio può essere misurata, se vale la teoria dell'utilità attesa, dalla concavità della funzione di utilità von Neumann-Morgenstern $u(x)$. Però, la derivata seconda $u''(x)$, che è una misura della sua convessità, dipende da trasformazioni lineari crescenti di $u(x)$, che è,

invece, definita a meno di esse. Una misura di avversione al rischio, definita anch'essa a meno di una trasformazione lineare crescente di $u(x)$, è l'*indice di de Finetti-Arrow-Pratt* (dovuto a de Finetti, 1952, Pratt, 1964, e Arrow, 1965). Questa misura di avversione (assoluta)[4] al rischio è

$$r(x) = -\frac{u''(x)}{u'(x)}$$

L'indice di de Finetti-Arrow-Pratt può essere giustificato in relazione al premio locale al rischio. Essendo il premio al rischio (per la Definizione 7.7), $RP(\ell) = EV(\ell) - CE(\ell)$, il premio locale al rischio è[5] $RP(x+t\ell) = EV(x+t\ell) - CE(x+t\ell)$, ove $EV(x+t\ell) = x + t\,EV(\ell)$ e $CE(x+t\ell) = u^{-1}(\sum_{i=1}^{n} p_i\, u(x+tx_i))$. Allora, assumendo che questa funzione sia derivabile rispetto a t, si ha $\frac{\partial RP(x+t\ell)}{\partial t} = \sum_{i=1}^{n} p_i\, x_i - u^{-1\prime}(\sum_{i=1}^{n} p_i\, u(x+tx_i))\sum_{i=1}^{n} p_i\, x_i\, u'(x+tx_i)$ e, derivando una seconda volta, $\frac{\partial^2 RP(x+t\ell)}{\partial t^2} = -u^{-1\prime\prime}(\sum_{i=1}^{n} p_i\, u(x+tx_i))\,(\sum_{i=1}^{n} p_i\, x_i\, u'(x+tx_i))^2 - u^{-1\prime}(\sum_{i=1}^{n} p_i\, u(x+tx_i))\,\sum_{i=1}^{n} p_i\, x_i^2\, u''(x+tx_i) = \frac{u''(CE(x+t\ell))}{(u'(CE(x+t\ell))^3}\,(\sum_{i=1}^{n} p_i\, x_i\, u'(x+tx_i))^2 - \frac{1}{u'(CE(x+t\ell))}\sum_{i=1}^{n} p_i x_i^2\, u''(x+tx_i)$. Perciò, $RP(x) = 0$, $\left.\frac{\partial RP(x+t\ell)}{\partial t}\right|_{t=0} = 0$ e $\left.\frac{\partial^2 RP(x+t\ell)}{\partial t^2}\right|_{t=0} = \frac{u''(x)}{u'(x)}((\sum_{i=1}^{n} p_i\, x_i)^2 - \sum_{i=1}^{n} p_i\, x_i^2) = -\frac{u''(x)}{u'(x)}\,\sigma^2(\ell)$. Quindi, in prossimità dell'esito certo x, il premio al rischio risulta essere proporzionale all'indice di de Finetti-Arrow-Pratt. Tuttavia, il fatto che solo la derivata seconda rispetto a t di $RP(x + t\ell)$ possa essere diversa da zero per $t = 0$, mentre la derivata prima è sempre uguale a zero, denota che la teoria dell'utilità attesa ammette solo un'avversione locale al rischio del secondo ordine, mentre quella del primo ordine è nulla. Teorie diverse dall'utilità attesa (ad esempio, l'utilità attesa dipendente dalla posizione degli esiti, o *rank dependent expected utility*, che sarà presentata nel Paragrafo 7.6) ammettono anche l'avversione al rischio del primo ordine e possono, perciò, descrivere preferenze che denotano avversioni al rischio più rilevanti (come quella presente nel paradosso di Allais) dell'avversione al rischio ammessa dalla teoria dell'utilità attesa e misurata dall'indice di de Finetti-Arrow-Pratt.

Inoltre, l'avversione locale al rischio è legata, nel diagramma di Hirshleifer-Yaari, come si è già visto, alla curvatura della curva di indifferenza nel punto in cui questa interseca la bisettrice, cioè, al valore della derivata seconda $x_2''(x_1)$ in $x_1 = x$, ove la funzione $x_2(x_1)$ è definita implicitamente dalla condizione $CE(x_1, x_2) = x$. Allora, se vale

---

[4] Esiste anche una misura di avversione relativa al rischio $r_r(x) = -x\frac{u''(x)}{u'(x)}$, che è rilevante in relazione alle lotterie moltiplicative, cioè, del tipo $\ell = (\alpha_i R, p_i)_{i=1}^{n}$.

[5] Nel corso di questa esposizione si impiegano le relazioni che determinano le derivate prima e seconda di una funzione inversa in base a quelle della funzione diretta. Sia $y = u(x)$, per cui $x = u^{-1}(y)$ e $x = u^{-1}(u(x))$. Allora, derivando questa identità rispetto a x, si ottiene $1 = u^{-1\prime}(u(x))\,u'(x)$, cioè, $u^{-1\prime}(y) = 1/u'(x)$, e, derivando una seconda volta, $0 = u^{-1\prime\prime}(u(x))(u'(x))^2 + u^{-1\prime}(u(x))\,u''(x)$, cioè, $u^{-1\prime\prime}(y) = -u^{-1\prime}(y)\,u''(x)/(u'(x))^2 = -u''(x)/(u'(x))^3$. Nel testo si ha $CE(x+t\ell)$ al posto di x e $\sum_{i=1}^{n} p_i u(x+tx_i)$ al posto di y.

la teoria dell'utilità attesa, si ha $p\,u(x_1) + (1-p)\,u(x_2(x_1)) = u(x)$. Derivando questa relazione rispetto a x_1 , si ha $p\,u'(x_1) + (1-p)\,u'(x_2(x_1))\,x_2'(x_1) = 0$ e, derivando una seconda volta, $p\,u''(x_1) + (1-p)\,u''(x_2(x_1))\,(x_2'(x_1))^2 + (1-p)\,u'(x_2(x_1))\,x_2''(x_1)) = 0$. Risulta, perciò, $x_2(x) = x$, $x_2'(x) = -p/(1-p)$ e $x_2''(x) = -\dfrac{p}{(1-p)^2}\dfrac{u''(x)}{u'(x)}$, ossia, la curvatura delle curve di indifferenza lungo la bisettrice è proporzionale all'indice di de Finetti-Arrow-Pratt.

7.5 Lotterie più o meno rischiose e l'avversione alla crescita del rischio

Non esiste un unico criterio con cui ordinare le lotterie a seconda della loro rischiosità, ossia, un'unica definizione di rischiosità. Nella prima parte di questo paragrafo viene considerato il criterio di ordinamento parziale, secondo cui una lotteria $\ell = (x_i, p_i)_{i=1}^{n}$ è non meno rischiosa della lotteria $\ell^* = (x_i, p_i^*)_{i=1}^{n}$ se la lotteria ℓ può essere ottenuta dalla lotteria ℓ^* con una espansione che non muti il valore medio (cioè, con i *mean preserving spreads* introdotti da Rothschild e Stiglitz, 1970) su tre esiti, ossia, se $EV(\ell) = EV(\ell^*)$, $x_i = x_i^*$ per ogni $i = 1,\ldots, n$ e $p_i = p_i^*$ per ogni $i = 1,\ldots, n$ tranne che per tre esiti $x_a > x_b > x_c$, per i quali si ha $p_a \geq p_a^*$, $p_b \leq p_b^*$ e $p_c \geq p_c^*$. Ad esempio, $\ell = (x_1, p_1\,;\ x_2, p_2\,;\ x_3, p_3)$ è non meno rischiosa di $\ell^* = (x_1, p_1^*; x_2, p_2^*; x_3, p_3^*)$ se $x_1 > x_2 > x_3$ (oppure $x_1 < x_2 < x_3$) , $p_2 \leq p_2^*$, $p_1 = p_1^* + \dfrac{x_2 - x_3}{x_1 - x_3}(p_2^* - p_2)$ e $p_3 = p_3^* + \dfrac{x_1 - x_2}{x_1 - x_3}(p_2^* - p_2)$.

Definizione 7.10 Un agente è avverso alla crescita del rischio (secondo i *mean preserving spreads*) se $CE(\ell) \leq CE(\ell^*)$ per ogni coppia di lotterie ℓ, $\ell^* \in \mathcal{L}$ con ℓ non meno rischiosa (secondo i *mean preserving spreads*) di ℓ^* , è propenso alla crescita del rischio se $CE(\ell) \geq CE(\ell^*)$ ed è neutrale alla crescita del rischio se $CE(\ell) = CE(\ell^*)$.

Proposizione 7.9 Un agente, se è avverso alla crescita del rischio (secondo i *mean preserving spreads*), allora è anche avverso al rischio. Cioè, se è $CE(\ell) \leq CE(\ell^*)$ per ogni coppia di lotterie $\ell, \ell^* \in \mathcal{L}$ con ℓ non meno rischiosa (secondo i *mean preserving spreads*) di ℓ^* , allora è anche $CE(\ell) \leq EV(\ell)$ per ogni $\ell \in \mathcal{L}$. Correlativamente, se è propenso (oppure, neutrale) alla crescita del rischio, allora è anche propenso (neutrale) al rischio.

Dimostrazione. Si dimostra, dapprima, che ogni lotteria $\ell = (x_i, p_i)_{i=1}^{n}$, ove $x_i > x_{i+1}$ per ogni $i = 1,\ldots, n-1$, può generare la lotteria $(EV(\ell), 1)$ attraverso un successione finita di lotterie ℓ_0 , ℓ_1 , ℓ_2 ,…, ℓ_t , ove $\ell_0 = \ell$ e $\ell_t = (EV(\ell), 1)$, tali che ℓ_h è non più rischiosa di ℓ_{h-1} per ogni $h = 1,\ldots, t$. A questo proposito, si generi la lotteria ℓ_h dalla lotteria ℓ_{h-1} sostituendo in questa ai suoi due esiti estremi (il più alto e il più basso) il loro valore medio e assegnando a questo esito la somma delle probabilità degli esiti sostituiti: si ha, allora, ℓ_1

$= (x_2, p_2 ;\ldots;\ \frac{x_1 p_1 + x_n p_n}{p_1 + p_n}, p_1+p_n ;\ldots; x_{n-1}, p_{n-1})$, ecc. In questo modo, non solo si ottiene, per ogni $h = 1,\ldots, t$, che $EV(\ell_h) = EV(\ell_{h-1})$ e che ℓ_h è non più rischiosa di ℓ_{h-1} (secondo i *mean preserving spreads*), ma anche che il numero degli esiti possibili (con probabilità positiva) di ℓ_h è inferiore (di una o due unità) al numero degli esiti possibili di ℓ_{h-1} . Quando questo numero diviene pari a uno (e ciò accade per un $t \leq n-1$), allora si ha $\ell_t = (EV(\ell_{t-1}), 1)$, cioè, essendo $EV(\ell_h) = EV(\ell_{h-1})$ per ogni $h = 1,\ldots, t$, anche $\ell_t = (EV(\ell), 1)$. Conseguentemente, se l'agente è avverso alla crescita del rischio, si ha $CE(\ell_h) \geq CE(\ell_{h-1})$ per ogni $h = 1,\ldots, t$ e, quindi, $EV(\ell) = CE(\ell_t) \geq CE(\ell_0) = CE(\ell)$. □

Proposizione 7.10 Se il sistema di preferenza $\langle \mathcal{L}, \succsim \rangle$ è rappresentabile con la funzione di utilità attesa, allora l'agente è avverso alla crescita del rischio (introdotta con *mean preserving spreads*) se e solo se la funzione von Neumann-Morgenstern $u: X \to \mathbb{R}$ è concava, propenso alla crescita del rischio se e solo se è convessa, neutrale alla crescita del rischio se e solo se è lineare.

Dimostrazione. Per ogni coppia di lotterie $\ell, \ell^* \in \mathcal{L}$ di uguale valore atteso, cioè, con $EV(\ell) = EV(\ell^*)$, che differiscano soltanto nelle probabilità di tre esiti, indicando questi tre esiti con $x_a, x_b, x_c \in X$, ove $x_a > x_b > x_c$, deve essere $p_a - p_a^* = -\frac{x_b - x_c}{x_a - x_c}(p_b - p_b^*)$ e $p_c - p_c^* = -\frac{x_a - x_b}{x_a - x_c}(p_b - p_b^*)$, per cui $u(CE(\ell)) - u(CE(\ell^*)) = (p_a - p_a^*)\, u(x_a) + (p_b - p_b^*)\, u(x_b) + (p_c - p_c^*)\, u(x_c) = (p_b - p_b^*)\frac{(x_a - x_b)(x_b - x_c)}{x_a - x_c}\left(\frac{u(x_b) - u(x_c)}{x_b - x_c} - \frac{u(x_a) - u(x_b)}{x_a - x_b}\right)$. Allora, si ha $u(CE(\ell)) \leq u(CE(\ell^*))$ per ogni coppia di lotterie con ℓ non meno rischiosa di ℓ^* , per cui $p_b - p_b^* \leq 0$, se e solo se $\frac{u(x_b) - u(x_c)}{x_b - x_c} \geq \frac{u(x_a) - u(x_b)}{x_a - x_b}$ per ogni terna $x_a, x_b, x_c \in X$, con $x_a > x_b > x_c$, cioè, se e solo se la funzione $u(x)$ è concava. Analogamente, per la propensione alla crescita del rischio, mentre la condizione per la neutralità risulta dalla congiunzione delle condizioni per l'avversione e la propensione. □

Si noti come la concavità della funzione $u(x)$ risulti condizione necessaria e sufficiente sia per l'avversione al rischio sia per l'avversione alla crescita (*mean preserving spreads*) del rischio. Questa uguaglianza di condizioni vale nel caso della teoria dell'utilità attesa. Con altre teorie risultano, in generale, due condizioni (per l'avversione al rischio e per l'avversione alla crescita del rischio) differenti.

Nel triangolo di Marschak-Machina l'avversione alla crescita del rischio richiede che lungo ogni retta di iso-valore atteso si situino, al crescere di p_1 e p_3 (si ricordi che queste rette sono crescenti) lotterie con equivalente certo non crescente. Ciò perché queste lotterie risultano avere lo stesso valore atteso e differiscono tra loro solo nelle probabilità dei tre esiti assegnati, per cui, al crescere di p_1 e p_3 (e, di conseguenza, al decrescere di p_2) si generano lotterie sempre più rischiose (nel senso dei *mean preserving spreads*). Risulta anche, allora, come rappresentato nella Figura 7.12, che l'avversione alla crescita del rischio richiede in ogni punto del triangolo che la curva di indifferenza abbia pendenza (ammesso che sia determinabile) non superiore alla pendenza della retta di iso-valore atteso. (Se vale la teoria dell'utilità attesa, come si è già visto, anche le curve di indifferenza sono rettilinee e la concavità della funzione $u(x)$ è la condizione perché la loro pendenza sia non superiore a quella delle rette di iso-valore atteso).

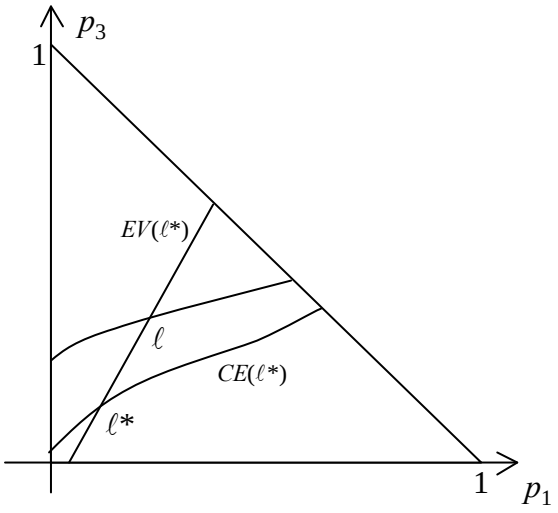

Figura 7.12

Un ordinamento delle lotterie secondo la rischiosità è introdotto anche dalla nozione di *dominanza stocastica del secondo ordine*. Questo ordinamento è, peraltro, equivalente (per lotterie di uguale valore medio) a quello introdotto dai *mean preserving spreads*.

Definizione 7.11 (*Dominanza stocastica del primo ordine*) La lotteria $\ell = (x_i, p_i)_{i=1}^{n}$, ove $x_i > x_{i+1}$ per ogni $i = 1,\ldots, n-1$, esercita dominanza stocastica del primo ordine nei confronti della lotteria $\ell' = (x_i, p_i')_{i=1}^{n}$ se $\sum_{h=1}^{i} p_h \geq \sum_{h=1}^{i} p_h'$ (o, equivalentemente, $\sum_{h=i+1}^{n} p_h \leq \sum_{h=i+1}^{n} p_h'$) per ogni $i = 1,\ldots, n-1$. Ossia, con riferimento alle funzioni di distribuzione cumulativa di probabilità (introdotte nel Paragrafo 7.5) e includendo, perciò, anche le lotterie in cui l'insieme degli stati di natura S non è finito, se si ha $F(x) \leq F'(x)$ per ogni $x \in X$, con $X = [\underline{x}, \overline{x}]$, ove $F(x) = \sum_{h=i+1}^{n} p_h$ per ogni $x \in [x_{i+1}, x_i)$ e, nel continuo, $F(x) = \int_{\underline{x}}^{x} f(t)\, dt$.

La dominanza stocastica del primo ordine, richiedendo $\sum_{h=1}^{i} p_h \geq \sum_{h=1}^{i} p_h'$ per ogni $i = 1,\ldots, n$, significa, sostanzialmente, che la lotteria dominante ha, per gli esiti migliori, probabilità più elevate della lotteria dominata e probabilità minori per gli esiti peggiori, come rappresentato nelle Figure 7.13 e 7.14.

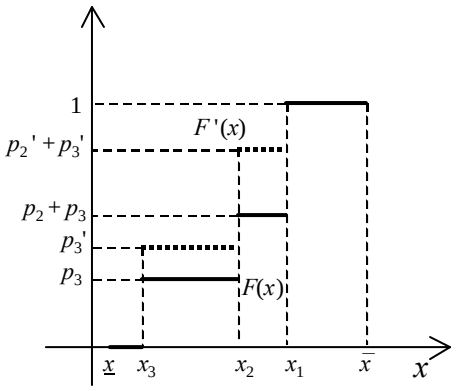

Figura 7.13

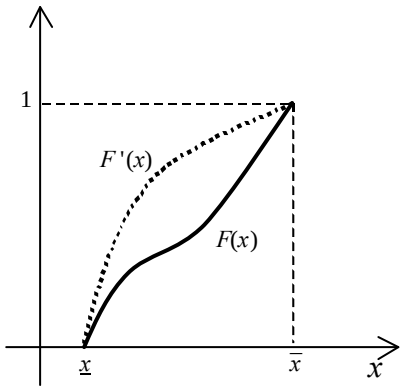

Figura 7.14

E', allora, naturale immaginare che un sistema razionale di preferenza $\langle \mathcal{L}, \succsim \rangle$ richieda $\ell \succsim \ell'$, come indica la successiva Proposizione 7.11. Inoltre, per ogni lotteria $\ell = (x_i, p_i)_{i=1}^{n}$ con $x_i > x_{i+1}$ per $i = 1,\ldots, n-1$, si ha $EV(\ell) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i = x_n + \sum_{i=1}^{n-1}(x_i - x_{i+1}) \sum_{h=1}^{i} p_h$, per cui, nel diagramma ove è rappresentata la funzione di distribuzione cumulativa di probabilità, il valore medio $EV(\ell)$ è misurato dall'area racchiusa tra la retta orizzontale di ordinata unitaria e la distribuzione cumulativa di probabilità. Allora, la condizione $\sum_{h=1}^{i} p_h \geq \sum_{h=1}^{i} p_h'$ per ogni $i = 1,\ldots, n$ implica $EV(\ell) \geq EV(\ell')$ (la dominanza stocastica del primo ordine non è, però, condizione necessaria per la disuguaglianza $EV(\ell) \geq EV(\ell')$, così come la disuguaglianza $EV(\ell) \geq EV(\ell')$ non è condizione, né necessaria né sufficiente, perché sia $CE(\ell) \geq CE(\ell')$).

Proposizione 7.11 Se vale la teoria dell'utilità attesa, risulta $U(\ell) \geq U(\ell')$ per ogni funzione di utilità von Neumann-Morgenstern $u: X \to \mathbb{R}$ non decrescente se e solo se ℓ esercita dominanza stocastica del primo ordine su ℓ'.

Dimostrazione. La teoria dell'utilità attesa richiede $U(\ell) = \sum_{i=1}^{n} p_i\, u(x_i) = u(x_n) + \sum_{i=1}^{n-1}(u(x_i) - u(x_{i+1})) \sum_{h=1}^{i} p_h$, ove $\ell = (x_i, p_i)_{i=1}^{n}$ con $x_i > x_{i+1}$ per ogni $i = 1,\ldots, n-1$, per cui $U(\ell) - U(\ell') = \sum_{i=1}^{n-1}(u(x_i) - u(x_{i+1}))\,(\sum_{h=1}^{i} p_h - \sum_{h=1}^{i} p_h')$. Allora, per ogni funzione di utilità von Neumann-Morgenstern $u: X \to \mathbb{R}$ non decrescente si ha $u(x_i) - u(x_{i+1}) \geq 0$ per ogni $i = 1,\ldots, n-1$, cosicché la dominanza stocastica del primo ordine, che richiede $\sum_{h=1}^{i} p_h \geq \sum_{h=1}^{i} p_h'$ per ogni $i = 1,\ldots, n$, implica $U(\ell) - U(\ell') \geq 0$. Inoltre, la dominanza stocastica del primo ordine è necessaria, poiché, se non vi è dominanza stocastica del primo ordine, allora esiste un i per cui $\sum_{h=1}^{i} p_h < \sum_{h=1}^{i} p_h'$ e risulta $U(\ell) - U(\ell') < 0$ per la funzione di utilità von Neumann-Morgenstern non decrescente $u(x_1) = \ldots = u(x_i) > u(x_{i+1}) = \ldots = u(x_n)$. □

Definizione 7.12 (*Dominanza stocastica del secondo ordine*) La lotteria $\ell = (x_i, p_i)_{i=1}^{n}$, ove $x_i > x_{i+1}$ per ogni $i = 1,\ldots, n-1$, esercita dominanza stocastica del secondo ordine nei confronti della lotteria $\ell' = (x_i, p_i')_{i=1}^{n}$ se $D_j(\ell,\ell') = \sum_{i=j}^{n-1}(x_i - x_{i+1}) \sum_{h=1}^{i}(p_h - p_h') \geq 0$ per ogni $j = 1,\ldots, n-1$. Nel continuo, se $\int_{\underline{x}}^{x} (F(t) - F'(t))\, \mathrm{d}t \leq 0$ per ogni $x \in X$.

Si noti come la dominanza stocastica del primo ordine implichi quella del secondo ordine, ma non viceversa.

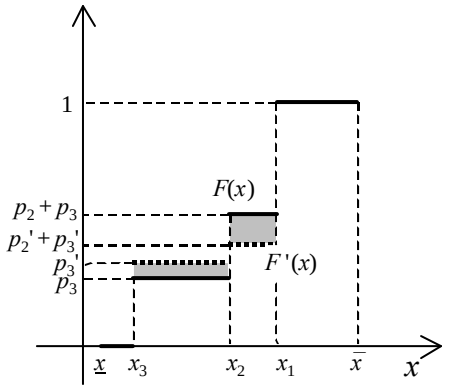

Figura 7.15

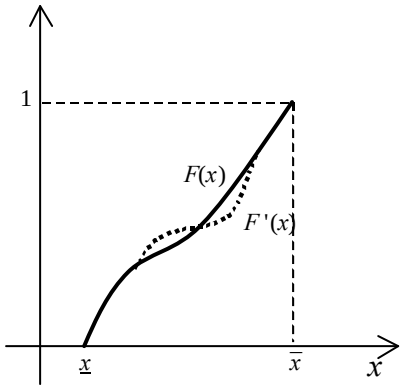

Figura 7.16

Nelle Figure 7.15 e 7.16 vi sono le funzioni $F(x)$ e $F'(x)$ di distribuzione cumulativa di probabilità di lotterie ℓ e ℓ' di pari valore medio (le aree ombreggiate nella Figura 7.15 sono uguali) con ℓ che esercita dominanza stocastica del secondo ordine su ℓ'.

Proposizione 7.12 Abbiano due lotterie ℓ e ℓ' lo stesso valore medio, per cui si ha $\sum_{i=1}^{n-1}(x_i-x_{i+1})\sum_{h=1}^{i}(p_h-p_h') = 0$. Se la lotteria ℓ' è più rischiosa della lotteria ℓ perchè differisce da questa per un *mean preserving spread* su tre esiti, allora ℓ esercita dominanza stocastica del secondo ordine su ℓ' . Per converso, se ℓ esercita dominanza stocastica del secondo ordine su ℓ' , allora ℓ' può essere ottenuta da ℓ attraverso una successione ℓ^1, ℓ^2, … di *mean preserving spreads* su tre esiti. Inoltre, esiste una successione ℓ^1, ℓ^2 ,… tale che ciascuna lotteria della successione esercita dominanza stocastica del secondo ordine su ℓ'.

Dimostrazione. Se ℓ' differisce da ℓ per un *mean preserving spread* su tre esiti, si hanno, per tre esiti $x_a > x_b > x_c$, probabilità $p_b-p_b' \geq 0$, $p_a-p_a' = -\dfrac{x_b-x_c}{x_a-x_c}(p_b-p_b')$ e $p_c-p_c' = -\dfrac{x_a-x_b}{x_a-x_c}(p_b-p_b')$. Allora, per $j\in[c, n-1]$, si ha $D_j(\ell,\ell') = \sum_{i=j}^{n-1}(x_i-x_{i+1})\sum_{h=1}^{i}(p_h-p_h') = (x_j-x_n)(p_a-p_a'+p_b-p_b'+p_c-p_c') = 0$; per $j\in[b, c-1]$, si ha $D_j(\ell,\ell') = \sum_{i=j}^{c-1}(x_i-x_{i+1})\sum_{h=1}^{i}(p_h-p_h') + \sum_{i=c}^{n-1}(x_i-x_{i+1})\sum_{h=1}^{i}(p_h-p_h') = (x_j-x_c)(p_a-p_a'+p_b-p_b') = (x_j-x_c)\dfrac{x_a-x_b}{x_a-x_c}(p_b-p_b') \geq 0$; per $j\in[a, b-1]$ si ha $D_j(\ell,\ell') = \sum_{i=j}^{b-1}(x_i-x_{i+1})\sum_{h=1}^{i}(p_h-p_h') + \sum_{i=b}^{n-1}(x_i-x_{i+1})\sum_{h=1}^{i}(p_h-p_h') = -(x_j-x_b)(p_a-p_a') + (x_b-x_c)(p_a-p_a'+p_b-p_b') = (x_a-x_j)\dfrac{x_b-x_c}{x_a-x_c}(p_b-p_b') \geq 0$; e, infine, per $j\in[1, a-1]$, si ha $D_j(\ell,\ell') = \sum_{i=j}^{a-1}(x_i-x_{i+1})\sum_{h=1}^{i}(p_h-p_h') + \sum_{i=a}^{n-1}(x_i-x_{i+1})\sum_{h=1}^{i}(p_h-p_h') = 0$, cosicché ℓ risulta dominare ℓ' stocasticamente nel secondo ordine.

Per converso, eserciti ℓ dominanza stocastica del secondo ordine su ℓ' , sia, cioè, $D_j(\ell,\ell') = \sum_{i=j}^{n-1}(x_i-x_{i+1})\sum_{h=1}^{i}(p_h-p_h') \geq 0$ per ogni $j = 1,\ldots, n-1$ (con l'uguaglianza a zero per $j = 1$, come richiesto perché sia $EV(\ell) = EV(\ell')$). Se vi sono in ℓ e ℓ' esiti con uguale probabilità, si hanno le stesse condizioni, sia che si prendano in considerazione le lotterie indicate, sia che si azzerino le probabilità di questi esiti e si suddividano le loro probabilità in parti uguali tra tutti gli altri esiti. Infatti, se $p_s-p_s' = 0$, ponendo $\ell_s = (x_1, p_1+\frac{1}{n-1}p_s;\ldots; x_{s-1}, p_{s-1}+\frac{1}{n-1}p_s; x_s, 0; x_{s+1}, p_{s+1}+\frac{1}{n-1}p_s;\ldots; x_n, p_n+\frac{1}{n-1}p_s)$ e analogamente per ℓ_s' , si ha $D_j(\ell_s,\ell_s') = D_j(\ell,\ell')$ per ogni $j = 1,\ldots, n-1$ poiché questa trasformazione di probabilità non altera $\sum_{h=1}^{i}(p_h-p_h')$ per nessun $i = 1,\ldots, n$. E' possibile, allora, proseguire la dimostrazione, senza perdita di generalità, assumendo che ℓ e ℓ' siano tali che $p_i-p_i' \neq 0$ per ogni $i = 1,\ldots, n$. La condizione $D_{n-1}(\ell,\ell') \geq 0$, essendo $D_{n-1}(\ell,\ell') = (x_{n-1}-x_n)\times\sum_{h=1}^{n-1}(p_h-p_h') = -(x_{n-1}-x_n)(p_n-p_n')$, richiede $p_n-p_n' < 0$. Esiste, allora, un indice per cui $p_b-p_b' > 0$. Si prenda, fra questi, l'indice più elevato, cioè, è $p_b-p_b' > 0$ con $p_h-p_h' < 0$ per ogni $h > b$. Si introduca, ora, la lotteria ℓ^1 applicando alla lotteria ℓ un *mean preserving spread* sugli esiti x_{b-1} , x_b e x_n in modo che $p_b-p_b^1 = \min\{p_b-p_b'$,

$\frac{x_{b-1}-x_n}{x_{b-1}-x_b}(p_n'-p_n)\}$. Perciò, se $p_b-p_b' \leq \frac{x_{b-1}-x_n}{x_{b-1}-x_b}(p_n'-p_n)$, si ha $p_b^1 = p_b' < p_b$, $p_{b-1}^1-p_{b-1}$ $= -\frac{x_b-x_n}{x_{b-1}-x_n}(p_b'-p_b) > 0$ e $p_n^1-p_n = -\frac{x_{b-1}-x_b}{x_{b-1}-x_n}(p_b'-p_b) > 0$, con $p_n^1 \leq p_n'$ (poiché p_b-p_b' $\leq \frac{x_{b-1}-x_n}{x_{b-1}-x_b}(p_n'-p_n)$). Se $p_b-p_b' \geq \frac{x_{b-1}-x_n}{x_{b-1}-x_b}(p_n'-p_n)$, si ha $p_b^1-p_b = -\frac{x_{b-1}-x_n}{x_{b-1}-x_b}(p_n'-p_n) < 0$, con $p_b^1 \geq p_b'$, $p_n^1 = p_n' > p_n$ e $p_{b-1}^1-p_{b-1} = \frac{x_b-x_n}{x_{b-1}-x_b}(p_n'-p_n) > 0$. Si ha, comunque, $p_n^1 \in [p_n , p_n']$ e $p_b^1 \in [p_b', p_b]$, con $p_n^1 = p_n'$ e/o $p_b^1 = p_b'$. Essendo ℓ^1 un *mean preserving spread* di ℓ , per quanto visto nella prima parte della dimostrazione, si ha che ℓ esercita dominanza stocastica del secondo ordine, oltre che su ℓ' , anche su ℓ^1 . Si ha, anche (ed è questo che è rilevante), che ℓ^1 esercita dominanza stocastica del secondo ordine su ℓ' . Si dimostra questo punto dimostrando che valgono le disuguaglianze $D_j(\ell^1, \ell') \geq 0$ per ogni j $= 1,\ldots, n-1$, tenendo conto che si ha, per ipotesi, $D_j(\ell,\ell') \geq 0$ per ogni $j = 1,\ldots, n-1$. Infatti, si ha: per $i < b-1$, $\sum_{h=1}^{i}(p_h^1-p_h') = \sum_{h=1}^{i}(p_h-p_h')$; per $i = b-1$, $\sum_{h=1}^{b-1}(p_h^1-p_h') =$ $p_{b-1}^1-p_{b-1} + \sum_{h=1}^{b-1}(p_h-p_h') = \frac{x_b-x_n}{x_{b-1}-x_n}(p_b-p_b^1) + \sum_{h=1}^{b-1}(p_h-p_h') \geq \sum_{h=1}^{b-1}(p_h-p_h')$; e, per $i \geq b$, $\sum_{h=1}^{i}(p_h^1-p_h') = p_{b-1}^1-p_{b-1} + p_b^1-p_b + \sum_{h=1}^{i}(p_h-p_h') = p_n-p_n^1 - \sum_{h=i+1}^{n}(p_h-p_h') = p_n'-p_n^1 +$ $\sum_{h=i+1}^{n-1}(p_h'-p_h) \geq 0$ (essendo $p_h-p_h' < 0$ per ogni $h > b$). Allora, per $j \geq b$, si ottiene $D_j(\ell^1,\ell') = \sum_{i=j}^{n-1}(x_i-x_{i+1}) \sum_{h=1}^{i}(p_h^1-p_h') = \sum_{i=j}^{n-1}(x_i-x_{i+1}) (p_n'-p_n^1 + \sum_{h=i+1}^{n-1}(p_h'-p_h)) \geq 0$, e, per $j < b$, $D_j(\ell^1,\ell') = \sum_{i=j}^{b-2}(x_i-x_{i+1})\times \sum_{h=1}^{i}(p_h^1-p_h') + (x_{b-1}-x_b) \sum_{h=1}^{b-1}(p_h^1-p_h') + \sum_{i=b}^{n-1}(x_i-x_{i+1})$ $\sum_{h=1}^{i}(p_h^1-p_h') = \sum_{i=j}^{b-2}(x_i-x_{i+1})\times \sum_{h=1}^{i}(p_h-p_h') + (x_{b-1}-x_b) (p_{b-1}^1-p_{b-1} + \sum_{h=1}^{b-1}(p_h-p_h')) +$ $\sum_{i=b}^{n-1}(x_i-x_{i+1})(p_{b-1}^1-p_{b-1} + p_b^1-p_b + \sum_{h=1}^{i}(p_h-p_h')) = D_j(\ell,\ell') + (x_{b-1}-x_b) (p_{b-1}^1-p_{b-1}) +$ $\sum_{i=b}^{n-1}(x_i-x_{i+1})(p_{b-1}^1-p_{b-1} + p_b^1-p_b) = D_j(\ell,\ell') + (x_{b-1}-x_n) (p_{b-1}^1-p_{b-1}) + (x_b-x_n) (p_b^1-p_b) =$ $D_j(\ell,\ell') + (x_{b-1}-x_n) \frac{x_b-x_n}{x_{b-1}-x_n}(p_b-p_b^1) + (x_b-x_n) (p_b^1-p_b) = D_j(\ell,\ell') \geq 0$. Poiché ℓ^1 esercita, così come ℓ, dominanza stocastica del secondo ordine su ℓ' , si può procedere nella successione, applicando alla lotteria ℓ^1 un *mean preserving spread* (analogo a quello prima operato sulla lotteria ℓ). Si introduce, così, la lotteria ℓ^2 , che esercita dominanza stocastica del secondo ordine sulla lotteria ℓ' , così come ℓ^1 . La successione ℓ^1 , ℓ^2 , … converge nella lotteria ℓ' , poiché, in ogni passo, la probabilità di almeno un esito viene resa uguale al valore che essa ha nella lotteria ℓ' , di modo che dopo non più di $n-2$ passi si perviene a ℓ' . Si è così dimostrato che se ℓ esercita dominanza stocastica del secondo ordine su ℓ' , allora ℓ' può essere ottenuta da ℓ attraverso una successione di *mean preserving spreads* su tre esiti, tali, inoltre, che ciascuna lotteria della successione esercita dominanza stocastica del secondo ordine su ℓ' . □

L'equivalenza, per lotterie con uguale valore medio, tra dominanza stocastica del secondo ordine e *mean preserving spreads*, stabilita dalla Proposizione 7.12, implica che le stesse condizioni che determinano l'avversione alla crescita del rischio (introdotta con *mean preserving spreads*) determinano anche l'avversione per le lotterie stoscasticamente dominate nel secondo ordine (nel confronto tra lotterie di pari valore medio). Da questa osservazione e dalla Proposizione 7.10 consegue, allora, la Proposizione seguente.

Proposizione 7.13 Se il sistema di preferenza $\langle \mathcal{L}, \succsim \rangle$ è rappresentabile con la funzione di utilità attesa, allora, per ogni coppia di lotterie ℓ , ℓ' con $EV(\ell) = EV(\ell')$ e con ℓ che esercita dominanza stocastica del secondo ordine su ℓ' , si ha $U(\ell) \geq U(\ell')$ se e solo se la funzione von Neumann-Morgenstern $u: X \to \mathbb{R}$ è concava, $U(\ell) \leq U(\ell')$ se e solo se è convessa, $U(\ell) = U(\ell')$ se e solo se è lineare.

7.6 Il modello di utilità attesa dipendente dalla posizione degli esiti

La teoria dell'utilità attesa è normalmente condivisa dal punto di vista normativo, dal momento che le ipotesi o assiomi (indicati nel Paragrafo 7.2), che la giustificano, sono ritenuti razionali. Non è, invece, condivisa dal punto di vista positivo, non è, cioè, ritenuta una buona rappresentazione dei comportamenti reali, come nel caso del paradosso di Allais (presentato anch'esso nel Paragrafo 7.2). Vi sono molti risultati di economia sperimentale che mostrano scelte sistematicamente difformi dal dettato della teoria dell'utilità attesa. Una generalizzazione della teoria dell'utilità attesa che si è dimostrata vantaggiosa per rappresentare molti comportamenti reali, anomali per la teoria dell'utilità attesa, come il paradosso di Allais, è l'utilità attesa dipendente dalla posizione degli esiti, o *rank dependent expected utility*. Questo modello, introdotto dapprima da Quiggin (1982) con il nome di *anticipated utility* e poi sviluppato da numerosi studiosi (tra cui, Chew, 1985, Yaari, 1987, e Roell, 1987), può essere formalizzato in modo analogo a quello dell'utilità attesa (come indicato nel Paragrafo 7.2), indebolendo l'assioma di indipendenza. Ad esempio, seguendo l'impostazione di Quiggin, si possono introdurre, al posto dell'assioma di indipendenza, le ipotesi per cui si ha $\ell \succsim \ell'$ se ℓ esercita dominanza stocastica del primo ordine su ℓ' e l'*assioma di sostituzione debole dell'equivalente certo* (che è implicato dal principio delle lotterie composte, introdotto dalla Definizione 7.1, senza implicarlo), secondo cui, per ogni coppia di lotterie $\ell, \ell' \in \mathcal{L}$ tali che $\ell = (x_i, p_i)_{i=1}^{n}$ e $\ell' = (x_i', p_i)_{i=1}^{n}$, con $x_i \geq x_{i+1}$ e $x_i' \geq x_{i+1}'$ per ogni $i = 1,\ldots, n-1$ e $x_i \geq x_i'$ per ogni $i = 1,\ldots, n$ (quest'ultima condizione esprime la condizione di dominanza stocastica del primo ordine della lotteria $\ell = (x_i, p_i)_{i=1}^{n}$ sulla lotteria $\ell' = (x_i', p_i)_{i=1}^{n}$), si ha che la lotteria $(CE(\ell), ½ ; CE(\ell'), ½)$ (ove $CE(\ell)$ e $CE(\ell')$ sono gli equivalenti certi delle lotterie ℓ e ℓ' , cioè, con $\ell \sim (CE(\ell), 1)$ e $\ell' \sim (CE(\ell'), 1)$), è indifferente alla lotteria $(CE_i, p_i)_{i=1}^{n}$ (ove CE_i è l'equivalente certo della lotteria $(x_i, ½ ; x_i', ½)$, per ogni $i = 1,\ldots, n$).

Definizione 7.13 (*Utilità attesa dipendente dalla posizione degli esiti*) Il sistema di preferenza $\langle \mathcal{L}, \succsim \rangle$ è rappresentato da una funzione di utilità attesa dipendente dalla posizione degli esiti (*rank dependent expected utility*) $U: \mathcal{L} \to \mathbb{R}$ se, per ogni lotteria $\ell \in \mathcal{L}$ con $\ell = (x_i, p_i)_{i=1}^{n}$ e $x_i > x_{i+1}$ per ogni $i = 1,\ldots, n-1$, ove $x_i \in X$, con $X = [\underline{x}\ ,\ \overline{x}\ ] \subset \mathbb{R}_+$ (considerando, cioè, per semplicità, lotterie monetarie), si ha

$$U(\ell) = u(x_n) + \sum_{i=1}^{n-1} (u(x_i) - u(x_{i+1}))\ \varphi(\sum_{h=1}^{i} p_h)$$

ossia,

$$U(\ell) = u(x_1)\ \varphi(p_1) + \sum_{i=2}^{n} u(x_i)\ (\varphi(\sum_{h=1}^{i} p_h) - \varphi(\sum_{h=1}^{i-1} p_h))$$

ove $u\colon X \to \mathbb{R}$ è una funzione di utilità che rappresenta il sistema di preferenza $\langle X, \succsim \rangle$ sull'insieme degli esiti e $\varphi\colon [0, 1] \to [0, 1]$ è una funzione crescente con $\varphi(0) = 0$ e $\varphi(1) = 1$, che distorce la funzione decumulativa di probabilità $G(x) = \sum_{h=1}^{i} p_h$ per $x \in [x_{i+1}, x_i)$ (ove $G(x)$ indica la probabilità che si verifichi un esito maggiore di x , perciò tale che la funzione cumulativa di probabilità, introdotta nel Paragrafo 7.4, $F(x) = \sum_{h=i+1}^{n} p_h$ per $x \in [x_{i+1}, x_i)$, e quella decumulativa $G(x)$ sono legate tra loro dalla relazione $F(x) + G(x) = 1$). Allora, per ogni coppia di lotterie $\ell, \ell' \in \mathcal{L}$, con $\ell = (x_i, p_i)_{i=1}^{n}$, ove $x_i > x_{i+1}$ per ogni $i = 1, \ldots, n-1$, e $\ell' = (x_i', p_i')_{i=1}^{n'}$, ove $x_i' > x_{i+1}'$ per ogni $i = 1, \ldots, n'-1$, si ha $\ell \succsim \ell'$ se e solo se $u(x_n) + \sum_{i=1}^{n-1} (u(x_i) - u(x_{i+1}))\ \varphi(\sum_{h=1}^{i} p_h) \geq u(x_{n'}') + \sum_{i=1}^{n'-1} (u(x_i') - u(x_{i+1}'))\ \varphi(\sum_{h=1}^{i} p_h')$. Nel continuo, il sistema di preferenza $\langle \mathcal{L}, \succsim \rangle$ è rappresentato dal funzionale $U(\ell) = -\int_X u(x)\, \mathrm{d}\varphi(G(x)) = u(\underline{x}) + \int_X \varphi(G(x))\, \mathrm{d}u(x)$, o, anche, $U(\ell) = -\int_X u(x)\, \mathrm{d}\varphi(1 - F(x)) = u(\underline{x}) + \int_X \varphi(1 - F(x))\, \mathrm{d}u(x)$. (Talvolta, invece della funzione $\varphi(p)$ di distorsione della probabilità, viene introdotta la funzione $\psi(p)$, tale che $\psi(p) = 1 - \varphi(1-p)$, per cui risulta $U(\ell) = \int_X u(x)\, \mathrm{d}\psi(F(x)) = u(\overline{x}) - \int_X \psi(F(x))\, \mathrm{d}u(x)$).

Si noti come l'utilità attesa dipendente dalla posizione degli esiti coincida con l'utilità attesa (Definizione 7.4) se la funzione φ di distorsione della probabilità è la funzione identità, cioè, $\varphi(p) = p$ per ogni $p \in [0, 1]$. Inoltre, l'utilità attesa dipendente dalla posizione degli esiti può descrivere preferenze che determinano il paradosso di Allais.[6]

Il modello di utilità attesa dipendente dalla posizione degli esiti è molto istruttivo per l'analisi dell'avversione al rischio e dell'avversione alla crescita del rischio. Conviene tenere presente, da un lato, che questo modello descrive il sistema di preferenza dell'agente tramite le funzioni di utilità $u\colon X \to \mathbb{R}$ e di distorsione della probabilità $\varphi\colon [0, 1] \to [0, 1]$ (il modello di utilità attesa include soltanto la prima) e, dall'altro lato, che un agente è avverso al rischio (per la Definizione 7.7) se il suo sistema di preferenza $\langle \mathcal{L}, \succsim \rangle$ richiede $CE(\ell) \leq EV(\ell)$ per ogni $\ell \in \mathcal{L}$, cioè, se il premio al rischio $RP(\ell) = EV(\ell) - CE(\ell)$ è non negativo per ogni $\ell \in \mathcal{L}$ (correlativamente, propenso al rischio se il premio al rischio è non positivo e neutrale al rischio se è nullo). Il premio al rischio $RP(\ell)$ può essere scisso in due parti: il premio al rischio del primo ordine $RP_1(\ell) = CE_{EU}(\ell) - CE(\ell)$ (con $CE_{EU}(\ell) = u^{-1}(\sum_{i=1}^{n} p_i\, u(x_i))$) e quello del secondo ordine $RP_2(\ell) = EV(\ell) - CE_{EU}(\ell)$. Una scissione alternativa, equivalente a questa nell'analisi successiva, indica $RP_1'(\ell) = EV(\ell) - RDEV(\ell)$ (con $RDEV(\ell) = x_n + \sum_{i=1}^{n-1} (x_i - x_{i+1})\ \varphi(\sum_{h=1}^{i} p_h)$ per $\ell = (x_i, p_i)_{i=1}^{n}$ con $x_i > x_{i+1}$ per ogni $i = 1, \ldots, n-1$) e $RP_2'(\ell) = RDEV(\ell) - CE(\ell)$.

Proposizione 7.14 Se il sistema di preferenza $\langle \mathcal{L}, \succsim \rangle$ è rappresentabile con la funzione di utilità attesa dipendente dalla posizione degli esiti, allora l'agente è avverso al

[6] Riprendendo l'esempio del paradosso di Allais presentato nel Paragrafo 7.2 e introducendo le funzioni di utilità degli esiti $u = x/(500.000+x)$ e di distorsione della probabilità $\varphi(p) = p^2$, si ottiene $U(\ell_1) = 0{,}5$, $U(\ell_2) = 2{,}9603/6$, $U(\ell_3) = 0{,}0363/6$ e $U(\ell_4) = 0{,}05/6$, cosicché risulta $\ell_1 \succ \ell_2$ e $\ell_4 \succ \ell_3$.

rischio del primo ordine, cioè, è $RP_1(\ell) = CE_{EU}(\ell) - CE(\ell) \geq 0$ e $RP_1'(\ell) = EV(\ell) - RDEV(\ell) \geq 0$ per ogni $\ell \in \mathcal{L}$, se e solo se la funzione $\varphi : [0, 1] \to [0, 1]$ di distorsione della probabilità soddisfa la condizione $\varphi(p) \leq p$ per ogni $p \in [0, 1]$, propenso al rischio se e solo se $\varphi(p) \geq p$, neutrale al rischio se e solo se $\varphi(p) = p$.

Dimostrazione. Essendo la funzione di utilità $u: X \to \mathbb{R}$ monotona crescente, si ha $CE_{EU}(\ell) \geq CE(\ell)$ se e solo se $u(CE_{EU}(\ell)) \geq u(CE(\ell))$, cioè, se e solo se $\sum_{i=1}^{n} p_i u(x_i) \geq u(x_n) + \sum_{i=1}^{n-1} (u(x_i) - u(x_{i+1}))\, \varphi(\sum_{h=1}^{i} p_h)$, ossia, $\sum_{i=1}^{n-1} (u(x_i) - u(x_{i+1}))\, (\sum_{h=1}^{i} p_h - \varphi(\sum_{h=1}^{i} p_h)) \geq 0$. Essendo $x_i > x_{i+1}$ e, quindi, $u(x_i) > u(x_{i+1})$, per ogni $i = 1, \ldots, n-1$, si ha $CE_{EU}(\ell) \geq CE(\ell)$ se e solo se $\sum_{h=1}^{i} p_h \geq \varphi(\sum_{h=1}^{i} p_h)$ e, quindi, $p \geq \varphi(p)$ per ogni $p \in [0, 1]$. Allo stesso modo, si ha $EV(\ell) \geq RDEV(\ell)$ se e solo se $\sum_{i=1}^{n-1} (x_i - x_{i+1})\, (\sum_{h=1}^{i} p_h - \varphi(\sum_{h=1}^{i} p_h)) \geq 0$, cioè, $p \geq \varphi(p)$ per ogni $p \in [0, 1]$. Analogamente, per la propensione e la neutralità al rischio del primo ordine. □

Proposizione 7.15 Se il sistema di preferenza $\langle \mathcal{L}, \succsim \rangle$ è rappresentabile con la funzione di utilità attesa dipendente dalla posizione degli esiti, allora l'agente è avverso al rischio del secondo ordine, cioè, è $RP_2(\ell) = EV(\ell) - CE_{EU}(\ell) \geq 0$ e $RP_2'(\ell) = RDEV(\ell) - CE(\ell) \geq 0$ per ogni $\ell \in \mathcal{L}$, se e solo se la funzione di utilità $u: X \to \mathbb{R}$ è concava, propenso al rischio se e solo se u è convessa, neutrale al rischio se e solo se è lineare.

Dimostrazione. Questa Proposizione coincide, per quanto riguarda la condizione $RP_2(\ell) = EV(\ell) - CE_{EU}(\ell) \geq 0$ con la Proposizione 7.5. La condizione $RP_2'(\ell) = RDEV(\ell) - CE(\ell) \geq 0$, essendo la funzione $u(x)$ monotona crescente, equivale alla condizione $u(RDEV(\ell)) \geq u(CE(\ell))$, cioè, $u(x_n + \sum_{i=1}^{n-1} (x_i - x_{i+1}) \varphi(\sum_{h=1}^{i} p_h)) \geq u(x_n) + \sum_{i=1}^{n-1} (u(x_i) - u(x_{i+1})) \times \varphi(\sum_{h=1}^{i} p_h)$, ossia, $u(\sum_{i=1}^{n} x_i \pi_i) \geq \sum_{i=1}^{n} u(x_i) \pi_i$, ove $\pi_1 = \varphi(p_1)$ e $\pi_i = \varphi(\sum_{h=1}^{i} p_h) - \varphi(\sum_{h=1}^{i-1} p_h)$ per $i = 2, \ldots, n$. Ne consegue che $u(RDEV(\ell)) \geq u(CE(\ell))$ se e solo se la funzione $u(x)$ è concava (disuguaglianza di Jensen). Analogamente, per la propensione e la neutralità al rischio del secondo ordine. □

Dalle Proposizioni 7.14 e 7.15 consegue immediatamente la proposizione seguente.

Proposizione 7.16 Se il sistema di preferenza $\langle \mathcal{L}, \succsim \rangle$ è rappresentabile con la funzione di utilità attesa dipendente dalla posizione degli esiti, allora l'agente è avverso al rischio, cioè, $RP(\ell) = EV(\ell) - CE(\ell) \geq 0$ per ogni $\ell \in \mathcal{L}$, se la funzione $\varphi: [0, 1] \to [0, 1]$ soddisfa la condizione $\varphi(p) \leq p$ per ogni $p \in [0, 1]$ e la funzione $u: X \to \mathbb{R}$ è concava, propenso al rischio se $\varphi(p) \geq p$ e u è convessa, neutrale al rischio se e solo se $\varphi(p) = p$ e u è lineare.

Si prenda, ora, in considerazione la avversione locale al rischio, introdotta con la Definizione 7.9. Risulta la seguente proposizione.

Proposizione 7.17 Se il sistema di preferenza $\langle \mathcal{L}, \succsim \rangle$ è rappresentabile con la funzione di utilità attesa dipendente dalla posizione degli esiti, allora l'agente è localmente avverso al rischio se la funzione $\varphi: [0, 1] \to [0, 1]$ di distorsione della probabilità soddisfa la condizione $\varphi(p) < p$ per ogni $p \in (0, 1)$ e solo se $\varphi(p) \leq p$, propenso al rischio se $\varphi(p) > p$ e solo se $\varphi(p) \geq p$, neutrale al rischio solo se $\varphi(p) = p$. In altri termini, se vale la teoria dell'utilità attesa dipendente dalla posizione degli esiti, la condizione è sostanzialmente la medesima sia per l'avversione (propensione, neutralità) locale che per quella globale del primo ordine. (Ne consegue che la misura di avversione al rischio fornita dall'indice di de Finetti-Arrow-Pratt, che ha per oggetto la funzione di utilità $u(x)$, non ha rilievo nel caso dell'utilità attesa dipendente dalla posizione degli esiti).

Dimostrazione. Vi è avversione locale al rischio se, per ogni lotteria $\ell = (x_i, p_i)_{i=1}^{n}$ con $x_i > x_{i+1}$ per $i = 1,\ldots, n-1$, si ha $EV(x+t\ell) \geq CE(x+t\ell)$ per $t > 0$ sufficientemente piccoli. Questa condizione richiede $u(EV(x+t\ell)) \geq u(CE(x+t\ell))$ (poichè la funzione $u(x)$ è monotona crescente), cioè $u(\sum_{i=1}^{n} p_i(x+tx_i)) \geq u(x+tx_n)+\sum_{i=1}^{n-1}(u(x+tx_i)-u(x+tx_{i+1}))\varphi(\sum_{h=1}^{i} p_h)$. Ora, la funzione $\rho(t) = u(\sum_{i=1}^{n} p_i(x+tx_i)) - u(x+tx_n) - \sum_{i=1}^{n-1}(u(x+tx_i)-u(x+tx_{i+1}))\varphi(\sum_{h=1}^{i} p_h)$ ha derivata prima $\rho'(t) = u'(x+t\sum_{i=1}^{n} p_ix_i)\sum_{i=1}^{n} p_ix_i - u'(x+tx_n)\ x_n - \sum_{i=1}^{n}(u'(x+tx_i)x_i - u'(x+tx_{i+1})x_{i+1})\ \varphi(\sum_{h=1}^{i} p_h)$, per cui risulta $\rho(0) = 0$ e $\rho'(0) = u'(x)\ (EV(\ell) - RDEV(\ell)) = u'(x)\ RP_1'(\ell)$. Allora, è $\rho(t) \geq 0$ per t piccoli se $\rho'(0) > 0$ e solo se $\rho'(0) \geq 0$, cioè, essendo $u'(x) > 0$, se $RP_1'(\ell) > 0$ e solo se $RP_1'(\ell) \geq 0$. La condizione $RP_1'(\ell) \geq 0$ equivale, per la Proposizione 7.14, alla condizione $\varphi(p) \leq p$ per ogni $p\in[0, 1]$ e la condizione $RP_1'(\ell) > 0$ alla condizione $\varphi(p) < p$ per ogni $p\in(0, 1)$. Analogamente, vi è propensione locale al rischio se $\rho'(0) < 0$ e solo se $\rho'(0) \leq 0$, cioè, se $\varphi(p) > p$ per ogni $p\in(0, 1)$ e $\varphi(p) \geq p$ per ogni $p\in[0, 1]$. Quindi, vi è neutralità locale al rischio solo se $\varphi(p) = p$ per ogni $p\in[0, 1]$. □

Se il sistema di preferenza $\langle \mathcal{L}, \succsim \rangle$ è rappresentabile con la funzione di utilità attesa dipendente dalla posizione degli esiti ed è $\varphi(p) \neq p$ per ogni $p\in(0, 1)$, la derivata prima rispetto a t del premio al rischio $RP(x+t\ell) = EV(x+t\ell) - CE(x+t\ell)$ è discontinua per $t = 0$ per ogni $\ell\in\mathcal{L}$. Per $\ell = (x_i, p_i)_{i=1}^{n}$ con $x_i > x_{i+1}$ per ogni $i = 1,\ldots, n-1$, si ha, per $t > 0$, $RP(x+t\ell) = x + t\ EV(\ell) - u^{-1}(u(x+tx_n)+\sum_{i=1}^{n-1}(u(x+tx_i)-u(x+tx_{i+1}))\varphi(\sum_{h=1}^{i} p_h))$. Quindi, $\dfrac{\partial RP(x+t\ell)}{\partial t} = EV(\ell) - u^{-1\prime}(u(x+tx_n)+\sum_{i=1}^{n-1}(u(x+tx_i)-u(x+tx_{i+1}))\varphi(\sum_{h=1}^{i} p_h))\ (u'(x+tx_n)\ x_n + \sum_{i=1}^{n-1}(u'(x+tx_i)\ x_i - u'(x+tx_{i+1})\ x_{i+1})\varphi(\sum_{h=1}^{i} p_h))$ e $\lim_{t\to 0^+} \dfrac{\partial RP(x+t\ell)}{\partial t} = EV(\ell) - RDEV(\ell) = \sum_{i=1}^{n-1}(x_i-x_{i+1})(\sum_{h=1}^{i} p_h-\varphi(\sum_{h=1}^{i} p_h))$. Per $t < 0$, si ha $RP(x+t\ell) = x + t\ EV(\ell) - u^{-1}(u(x+tx_1)+\sum_{i=1}^{n-1}(u(x+tx_{i+1})-u(x+tx_i))\varphi(1-\sum_{h=1}^{i} p_h))$ e, quindi, $\lim_{t\to 0^-} \dfrac{\partial RP(x+t\ell)}{\partial t} = \sum_{i=1}^{n-1}(x_i-x_{i+1})(1-\sum_{h=1}^{i} p_h-\varphi(1-\sum_{h=1}^{i} p_h))$. Ad esempio, se $n = 2$, con $x_1 > x_2$, si ha $\lim_{t\to 0^+} \dfrac{\partial RP(x+t\ell)}{\partial t} = (x_1-x_2)(p_1-\varphi(p_1))$ e $\lim_{t\to 0^-} \dfrac{\partial RP(x+t\ell)}{\partial t} = (x_1-x_2)(p_2-\varphi(p_2))$. (Con la teoria dell'utilità attesa, si ha $\lim_{t\to 0^+} \dfrac{\partial RP(x+t\ell)}{\partial t} = \lim_{t\to 0^-} \dfrac{\partial RP(x+t\ell)}{\partial t} = 0$).

Nella Figura 7.17 è rappresentata, per un agente avverso al rischio, la funzione $RP(x+t\ell)$, ove gli angoli α e β sono tali che $\text{tang}\ \alpha = (x_1-x_2)(p_1-\varphi(p_1))$ e $\text{tang}\ \beta = (x_1-x_2)(p_2-\varphi(p_2))$. L'altra curva (indicata come $RP_{EU}(t)$) rappresenta la stessa funzione nel caso in cui vale la teoria dell'utilità attesa, invece che l'utilità attesa dipendente dalla posizione degli esiti. Nel diagramma di Hirshleifer-Yaari, le curve di indifferenza presentano uno spigolo in corrispondenza delle lotterie degeneri (cioè, per $x_1 = x_2$), se $p_1 \neq \varphi(p_1)$ e/o $p_2 \neq \varphi(p_2)$, come rappresentato nella Figura 7.18. Infatti, essendo la curva di indifferenza $x_2(x_1)$ definita dalla condizione $CE(x_1, x_2) = x$, si ha, per $x_1 \geq x_2$, $u(x_1)\ \varphi(p_1) + u(x_2(x_1))\ (1-\varphi(p_1)) = u(x)$ e, per $x_2 \geq x_1$, $u(x_2(x_1))\ \varphi(p_2) + u(x_1)\ (1-\varphi(p_2)) = u(x)$. Derivando queste relazioni rispetto a x_1, si ha, rispettivamente, per $x_1 \geq x_2$, $u'(x_1)\ \varphi(p_1) + u'(x_2(x_1))\ x_2'(x_1)\ (1-\varphi(p_1)) = 0$ e, per $x_2 \geq x_1$, $u'(x_2(x_1))\ x_2'(x_1)\ \varphi(p_2) + u'(x_1)\ (1-\varphi(p_2)) = 0$.

Risultano, allora, $\lim_{x_1 - x_2 \to 0^+} x_2'(x_1) = \varphi(p_1)/(1-\varphi(p_1)) = \text{tang}\ \gamma$ (nella Figura 7.18) e $\lim_{x_1 - x_2 \to 0^-} x_2'(x_1) = (1-\varphi(p_2))/\varphi(p_2) = \text{tang}\ \delta$.

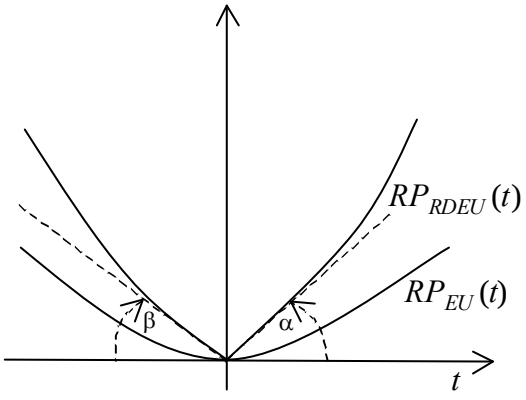

Figura 7.17

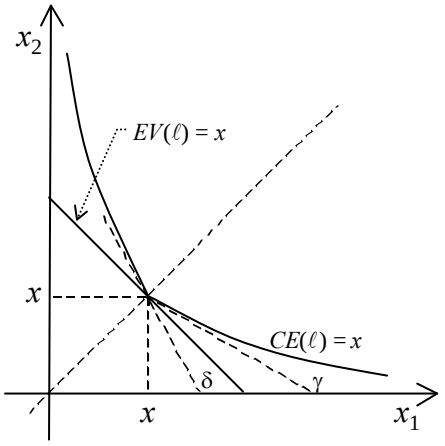

Figura 7.18

Mentre nel caso in cui vale la teoria dell'utilità attesa l'avversione (propensione, neutralità) al rischio e quella alla crescita del rischio (introdotta dalla Definizione 7.10 con i *mean preserving spreads*) sono espresse dalla stessa condizione, cioè, dalla concavità (convessità, linearità) della funzione di utilità von Neumann-Morgenstern (Proposizioni 7.8 e 7.10), esse sono espresse da condizioni diverse se vale la teoria dell'utilità attesa dipendente dalla posizione degli esiti. Mentre per l'avversione al rischio si ha la Proposizione 7.16, per l'avversione alla (*mean preserving spreads*) crescita del rischio si ha la proposizione seguente.

Proposizione 7.18 Se il sistema di preferenza $\langle \mathcal{L}, \succsim \rangle$ è rappresentabile con la funzione di utilità attesa dipendente dalla posizione degli esiti, allora l'agente è avverso alla **(***mean preserving spreads*) crescita del rischio se la funzione φ: $[0, 1] \to [0, 1]$ è convessa e la funzione u: $X \to \mathbb{R}$ è concava, propenso al rischio se $\varphi(p)$ è concava e $u(x)$ è convessa, neutrale al rischio se e solo se $\varphi(p)$ e $u(x)$ sono lineari.

Dimostrazione. Si tenga conto, come indicato all'inizio del Paragrafo 7.5, che una lotteria $\ell = (x_i, p_i)_{i=1}^n$ è non meno rischiosa della lotteria $\ell^* = (x_i, p_i^*)_{i=1}^n$, ove $x_i \geq x_{i+1}$ per ogni $i = 1,\ldots, n-1$, se la lotteria ℓ può essere ottenuta dalla lotteria ℓ^* con una espansione che non muti il valore su tre esiti, ossia, se $EV(\ell) = EV(\ell^*)$, $x_i = x_i^*$ per ogni $i = 1,\ldots, n$ e $p_i = p_i^*$ per ogni $i = 1,\ldots, n$ tranne che per tre esiti $x_a > x_b > x_c$, per i quali si ha $p_a \geq p_a^*$, $p_b \leq p_b^*$ e $p_c \geq p_c^*$ e, quindi, $p_a - p_a^* = -\dfrac{x_b - x_c}{x_a - x_c}(p_b - p_b^*) \geq 0$ e $p_c - p_c^* = -\dfrac{x_a - x_b}{x_a - x_c}(p_b - p_b^*) \geq 0$. Allora, da un lato, la convessità di $\varphi(p)$ implica le disuguaglianze $\varphi(\Sigma_{h=1}^{i} p_h^* + p_a - p_a^*) - \varphi(\Sigma_{h=1}^{i} p_h^*) \geq \varphi(\Sigma_{h=1}^{i-1} p_h^* + p_a - p_a^*) - \varphi(\Sigma_{h=1}^{i-1} p_h^*)$ e $\varphi(\Sigma_{h=1}^{i} p_h^*) - \varphi(\Sigma_{h=1}^{i} p_h^* - p_c + p_c^*) \geq \varphi(\Sigma_{h=1}^{i-1} p_h^*) - \varphi(\Sigma_{h=1}^{i-1} p_h^* - p_c + p_c^*)$ rispettivamente per $i = a+1,\ldots, b-1$ e $i = b,\ldots, c-1$, e, essendo, $\Sigma_{h=1}^{b-1} p_h^* + p_a - p_a^* = \Sigma_{h=1}^{b} p_h^* - p_c + p_c^* - p_b \leq \Sigma_{h=1}^{b} p_h^* - p_c + p_c^*$, anche la disuguaglianza $\dfrac{\varphi(\Sigma_{h=1}^{b} p_h^*) - \varphi(\Sigma_{h=1}^{b} p_h^* - p_c + p_c^*)}{p_c - p_c^*} \geq$

$\frac{\varphi(\Sigma_{h=1}^{b-1} p_h^* + p_a - p_a^*) - \varphi(\Sigma_{h=1}^{b-1} p_h^*)}{p_a - p_a^*}$. Dall'altro lato, la concavità di $u(x)$ implica la disuguaglianza $\frac{u(x_b) - u(x_c)}{x_b - x_c} \geq \frac{u(x_a) - u(x_b)}{x_a - x_b}$. Ne consegue che $u(CE(\ell^*)) - u(CE(\ell)) =$

$\sum_{i=1}^{n-1} (u(x_i) - u(x_{i+1}))(\varphi(\Sigma_{h=1}^{i} p_h^*) - \varphi(\Sigma_{h=1}^{i} p_h)) = \sum_{i=a}^{b-1} (u(x_i) - u(x_{i+1}))(\varphi(\Sigma_{h=1}^{i} p_h^*) - \varphi(\Sigma_{h=1}^{i} p_h^* + p_a - p_a^*))$

$+ \quad \sum_{i=b}^{c-1} (u(x_i) - u(x_{i+1})) \quad (\varphi(\Sigma_{h=1}^{i} p_h^*) - \varphi(\Sigma_{h=1}^{i} p_h^* + p_c^* - p_c)) \quad \geq \quad \sum_{i=a}^{b-1} (u(x_i) - u(x_{i+1})) \times$

$(\varphi(\Sigma_{h=1}^{b-1} p_h^*) - \varphi(\Sigma_{h=1}^{b-1} p_h^* + p_a - p_a^*)) + \sum_{i=b}^{c-1} (u(x_i) - u(x_{i+1}))(\varphi(\Sigma_{h=1}^{b} p_h^*) - \varphi(\Sigma_{h=1}^{b} p_h^* + p_c^* - p_c)) =$

$(u(x_a) - u(x_b))(\varphi(\Sigma_{h=1}^{b-1} p_h^*) - \varphi(\Sigma_{h=1}^{b-1} p_h^* + p_a - p_a^*) + (u(x_b) - u(x_c))(\varphi(\Sigma_{h=1}^{b} p_h^*) - \varphi(\Sigma_{h=1}^{b} p_h^* + p_c^* - p_c))$

$\geq \quad ((u(x_b) - u(x_c))\ (p_c - p_c^*) - (u(x_a) - u(x_b))\ (p_a - p_a^*))\ \frac{\varphi(\Sigma_{h=1}^{b-1} p_h^* + p_a - p_a^*) - \varphi(\Sigma_{h=1}^{b-1} p_h^*)}{p_a - p_a^*} =$

$(p_b^* - p_b) \frac{(x_a - x_b)(x_b - x_c)}{x_a - x_c} \left(\frac{u(x_b) - u(x_c)}{x_b - x_c} - \frac{u(x_a) - u(x_b)}{x_a - x_b} \right) \frac{\varphi(\Sigma_{h=1}^{b-1} p_h^* + p_a - p_a^*) - \varphi(\Sigma_{h=1}^{b-1} p_h^*)}{p_a - p_a^*} \geq 0.$

Allora, essendo $u(CE(\ell^*)) - u(CE(\ell)) \geq 0$, si ha $CE(\ell^*) \geq CE(\ell)$ e, quindi, $\ell^* \succsim \ell$, ove ℓ è una qualsiasi lotteria ottenuta applicando un *mean preserving spread* su tre esiti alla lotteria ℓ^* . Analogamente, per la propensione alla crescita del rischio e per la neutralità. □

Si noti come la convessità della funzione $\varphi: [0, 1] \to [0, 1]$ implichi, essendo $\varphi(0) = 0$ e $\varphi(1) = 1$, la condizione $\varphi(p) \leq p$ per ogni $p \in [0, 1]$, per cui le condizioni della Proposizione 7.18 implicano quelle della 7.16, in accordo con la Proposizione 7.9.

La teoria dell'utilità attesa dipendente dalla posizione degli esiti mette in luce un tipo di rischiosità e di avversione ad essa non rilevata dalla teoria dell'utilità attesa (nel senso che gli agenti le cui preferenze sono rappresentate dall'utilità attesa risultano neutrali a questo tipo di crescita del rischio). Si considerino, ad esempio, lotterie composte a due stadi, i cui esiti diretti, cioè, sono lotterie invece che somme di denaro, implicando, perciò, una successione di due nodi aleatori anziché uno soltanto. La presenza di una succesione di nodi aleatori rende queste lotterie più rischiose di quelle con un solo nodo aleatorio. Questa maggiore rischiosità può essere analizzata introducendo le *misture probabilistiche di due lotterie*. Per ogni scalare $\lambda \in [0, 1]$ e ogni coppia di lotterie $\ell_a = (x_a(s_j)\ ,\ p(s_j))_{j=1}^{m}$ e $\ell_b = (x_b(s_j)\ ,\ p(s_j))_{j=1}^{m}$ (ove $S = \{s_1\ ,\ s_2\ ,\ldots,\ s_m\}$ è l'insieme degli stati di natura e $p(s_j)$ è la probabilità dello stato di natura $s_j \in S$ che determina, rispettivamente, per le lotterie ℓ_a e ℓ_b , gli esiti $x_a(s_j) \in X$ e $x_b(s_j) \in X$), si definisce come loro mistura probabilistica la lotteria $\lambda\ell_a \oplus (1-\lambda)\ell_b = (\ell(s_j)\ ,\ p(s_j))_{j=1}^{m}$, i cui esiti sono le lotterie $\ell(s_j) = (x_a(s_j),\ \lambda;\ x_b(s_j),\ 1-\lambda)$, ciascuna delle quali, cioè, genera l'esito $x_a(s_j)$ con probabilità λ e l'esito $x_b(s_j)$ con probabilità $1-\lambda$. Quindi, la mistura probabilistica $\lambda\ell_a \oplus (1-\lambda)\ell_b$ è una particolare lotteria composta, il cui diagramma ad albero è rappresentato nella Figura 7.19 (ove $S = \{s_1\ ,\ s_2\}$).

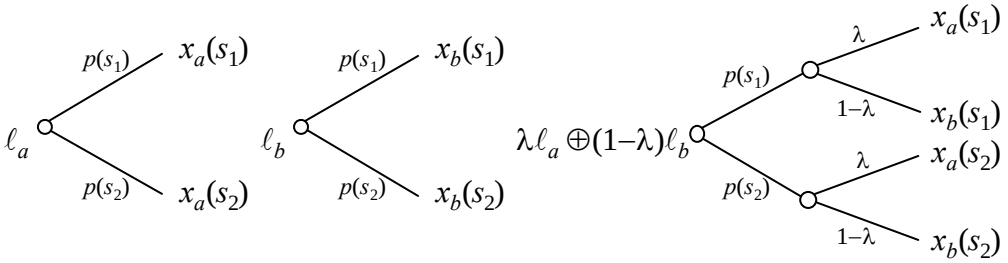

Figura 7.19

La teoria dell'utilità attesa dipendente dalla posizione degli esiti, fin qui introdotta, riguarda le lotterie semplici (cioè, ad un solo stadio, come sono le lotterie ℓ_a e ℓ_b), non le lotterie composte (come è la lotteria $\lambda\ell_a \oplus (1-\lambda)\ell_b$). Introducendo l'assioma delle lotterie composte (Definizione 7.1) si può estendere questa teoria anche alle lotterie a più stadi, ponendo $\lambda\ell_a \oplus (1-\lambda)\ell_b \sim (x_a(s_j), \lambda\, p(s_j)\,;\, x_b(s_j), (1-\lambda)\, p(s_j))_{j=1}^{m}$. Mettendo in ordine gli esiti $(x_a(s_j))_{j=1}^{m}$, $x_b(s_j))_{j=1}^{m}$, per cui $x_1 = \max\{(x_a(s_j))_{j=1}^{m}, x_b(s_j))_{j=1}^{m}\}$, $x_2 = \max\{(x_a(s_j))_{j=1}^{m}, x_b(s_j))_{j=1}^{m}\}\backslash\{x_1\}$, $x_3 = \max\{(x_a(s_j))_{j=1}^{m}, x_b(s_j))_{j=1}^{m}\}\backslash\{x_1, x_2\}$, …, $x_n = \min\{(x_a(s_j))_{j=1}^{m}, x_b(s_j))_{j=1}^{m}\}$, si ha $\ell_a = (x_i, p_{ai})_{i=1}^{n}$ e $\ell_b = (x_i, p_{bi})_{i=1}^{n}$, con $p_{ai} = p(s_j)$ se $x_i = x_a(s_j)$ e $p_{ai} = 0$ se $x_i \notin \{(x_a(s_j))_{j=1}^{m}\}$ (analogamente per p_{bi}), per cui $\lambda\ell_a \oplus (1-\lambda)\ell_b \sim (x_i, \lambda\, p_{ai} + (1-\lambda)\, p_{bi})_{i=1}^{n}$.

Tenendo conto di ciò, è possibile definire la seguente avversione alla crescita del rischio e determinare la condizione per la sua presenza.

Definizione 7.14 Un agente è avverso alla crescita del rischio (introdotta con *misture di probabilità*) se $CE(\lambda\ell_a \oplus (1-\lambda)\ell_b) \leq \max\{CE(\ell_a), CE(\ell_b)\}$ per ogni coppia di lotterie $\ell_a, \ell_b \in \mathcal{L}$ e ogni scalare $\lambda \in [0, 1]$, è propenso alla crescita del rischio se $CE(\lambda\ell_a \oplus (1-\lambda)\ell_b) \geq \min\{CE(\ell_a), CE(\ell_b)\}$ ed è neutrale alla crescita del rischio se è sia avverso che propenso alla crescita del rischio.

La teoria dell'utilità attesa, richiedendo $U(\lambda\ell_a \oplus (1-\lambda)\ell_b) = \lambda U(\ell_a) + (1-\lambda)U(\ell_b)$, implica la neutralità alla crescita del rischio introdotta con misture di probabilità. Non è così, invece, per la teoria dell'utilità attesa dipendente dalla posizione degli esiti.

Proposizione 7.19 Se il sistema di preferenza $\langle \mathcal{L}, \succsim \rangle$ è rappresentabile con la funzione di utilità attesa dipendente dalla posizione degli esiti e vale il principio delle lotterie composte, allora l'agente è avverso alla crescita del rischio **(**introdotta con *misture di probabilità*) se e solo se la funzione $\varphi: [0, 1] \to [0, 1]$ è convessa, propenso al rischio se e solo se è concava e neutrale al rischio se e solo se è lineare.

Dimostrazione. La condizione $\lambda\ell_a \oplus (1-\lambda)\ell_b \sim (x_i, \lambda\, p_{ai} + (1-\lambda)\, p_{bi})_{i=1}^{n}$ implica $U(\lambda\ell_a \oplus (1-\lambda)\ell_b) = u(x_n) + \sum_{i=1}^{n-1}(u(x_i) - u(x_{i+1}))\ \varphi(\sum_{h=1}^{i}(\lambda p_{ah} + (1-\lambda)p_{bh}))$. Risulta, allora, $U(\lambda\ell_a \oplus (1-\lambda)\ell_b) - \lambda U(\ell_a) - (1-\lambda)U(\ell_b) = \sum_{i=1}^{n-1}(u(x_i) - u(x_{i+1}))\ (\varphi(\sum_{h=1}^{i}(\lambda\, p_{ah} + (1-\lambda)\, p_{bh})) - \lambda\ \varphi(\sum_{h=1}^{i} p_{ah}) - (1-\lambda)\ \varphi(\sum_{h=1}^{i} p_{bh}))$, che è non positivo per ogni $\ell_a, \ell_b \in \mathcal{L}$ e $\lambda \in [0, 1]$ se e solo se la funzione $\varphi(p)$ è convessa, cioè, $\varphi(\lambda p_a + (1-\lambda)p_b) \leq \lambda\ \varphi(p_a) + (1-\lambda)\ \varphi(p_b)$ per ogni terna $p_a, p_b, \lambda \in [0, 1]$. E', inoltre, $U(\lambda\ell_a \oplus (1-\lambda)\ell_b) \leq \max\{U(\ell_a), U(\ell_b)\}$, cioè, $CE(\lambda\ell_a \oplus (1-\lambda)\ell_b) \leq \max\{CE(\ell_a), CE(\ell_b)\}$, per ogni coppia $\ell_a, \ell_b \in \mathcal{L}$ e $\lambda \in [0, 1]$, se e solo se $U(\lambda\ell_a \oplus (1-\lambda)\ell_b) \leq \lambda\ U(\ell_a) + (1-\lambda)\ U(\ell_b)$. Quindi, l'agente è avverso alla (misture di probabilità) crescita del rischio se e solo se la funzione φ di distorsione della probabilità è convessa. Analogamente per la propensione alla crescita del rischio. □

Poiché la convessità della funzione $\varphi: [0, 1] \to [0, 1]$ implica $\varphi(p) \leq p$ per ogni $p \in [0, 1]$ (come già osservato), se il sistema di preferenza $\langle \mathcal{L}, \succsim \rangle$ è rappresentabile con la funzione di utilità attesa dipendente dalla posizione degli esiti, vale il principio delle lotterie composte e l'agente è avverso alla crescita del rischio (introdotta con *misture di probabilità*), allora egli è anche avverso al rischio del primo ordine. Infatti, questa avversione è equivalente alla condizione $\varphi(p) \leq p$ (per la Proposizione 7.14) mentre l'avversione alla crescita del rischio è equivalente alla convessità della funzione φ (per la Proposizione 7.19).

7.7 Alcune applicazioni: la scelta di un'assicurazione, di un'attività finanziaria rischiosa, di un portafoglio di attività rischiose

La scelta di un'assicurazione. Abbia l'agente una ricchezza pari a R euro e corra, con probabilità p, il rischio di perderne una parte (per incidente, furto, incendio, ecc.), pari a D euro. Abbia la possibilità di assicurarsi, pagando il premio π per ogni euro assicurato: perciò, se vuole assicurarsi per l'intero danno D, deve pagare πD euro; se vuole assicurarsi parzialmente, ad esempio, per la somma A, deve pagare la somma πA euro per ricevere dall'assicurazione, se l'evento dannoso si verifica, la somma assicurata A. L'agente, allora, può scegliere quanto assicurarsi, cioè, può scegliere A, normalmente, sotto il vincolo $A \in [0, D]$, perché sono vietate, da un lato, l'assicurazione eccedente il danno possibile e, dall'altro lato, l'assicurazione negativa (che vedrebbe l'assicurazione pagare un premio all'assicurato e riscuotere da questi una somma nel caso si verifichi l'evento dannoso).

Questa situazione è descritta dalla lotteria

$$\ell(A) = (R-\pi A,\ 1-p\ ;\ R-\pi A-D+A,\ p)$$

i cui esiti sono la ricchezza $R-\pi A$ se l'evento dannoso non si verifica e la ricchezza $R-\pi A-D+A$ se l'evento dannoso si verifica. Allora, la ricchezza attesa (o media) dell'agente è $EV(\ell(A)) = R-\pi A- p(D-A)$ (in assenza di assicurazione, cioè, con $A = 0$, $EV(\ell(0)) = R-pD$).

Il premio unitario π è dato per l'agente in esame: è determinato dalle condizioni del mercato delle assicurazioni (è scelto dall'assicuratore se questi ha potere di mercato). In ogni caso, è $\pi \leq 1$, altrimenti nessun agente (con preferenze monotone) si assicurerebbe ed è $\pi \geq p$, altrimenti l'assicuratore incorrerebbe in una perdita attesa. Infatti, il suo profitto atteso (in assenza di altri ricavi e costi) è pari a $\pi A - pA$ (ove πA è il ricavo, che è certo, mentre A è la sua spesa, che si verifica con probabilità p). L'*assicurazione* viene qualificata come *attuarialmente equa* se è $\pi = p$ (nel qual caso, il profitto atteso dell'assicuratore è nullo).

Se le preferenze dell'agente soggetto al rischio sono rappresentabili con la teoria dell'utilità attesa (Definizione 7.4), si ha

$$U(\ell(A)) = u(R-\pi A)\,(1-p) + u(R-\pi A-D+A)\,p$$

ove $u(.)$ è la sua funzione di utilità von Neumann-Morgenstern. Allora, la scelta di assicurazione può essere determinata mediante la massimizzazione dell'utilità attesa sotto il vincolo $A \in [0, D]$, ove $D > 0$, cioè, risolvendo il problema

$$\max_{A \in [0,D]}\ u(R-\pi A)\,(1-p) + u(R-\pi A-D+A)\,p$$

La condizione del primo ordine per un massimo relativo interno (cioè, se la condizione del primo ordine determina $A^* \in [0, D]$) richiede

$$-\pi\,(1-p)\,u'(R-\pi A^*) + p\,(1-\pi)\,u'(R-\pi A^*-D+A^*) = 0$$

e quella del secondo ordine

$$\pi^2\,(1-p)\,u''(R-\pi A^*) + p\,(1-\pi)^2\,u''(R-\pi A^*-D+A^*) \le 0$$

Possono esservi soluzioni di frontiera, cioè, $A^* = 0$ oppure $A^* = D$. Si ha $A^* = 0$ se è $-\pi\,(1-p)\,u'(R) + p\,(1-\pi)\,u'(R-D) \le 0$ e $A^* = D$ se è $-\pi\,(1-p)\,u'(R-\pi D) + p\,(1-\pi)\,u'(R-\pi D) \ge 0$. Si ha, allora, $A^* = D$, essendo $u'(R-\pi D) > 0$, solo se $\pi \le p$, ossia, dovendo essere $\pi \ge p$, solo se $\pi = p$, cioè, solo se l'assicurazione è attuarialmente equa.

Proposizione 7.20 Se l'assicurazione è attuarialmente equa e l'agente è strettamente avverso al rischio (secondo la Definizione 7.7), allora l'agente si assicura completamente, sceglie, cioè, $A^* = D$, sia che valga la teoria dell'utilità attesa, sia che questa teoria non valga.

Dimostrazione. Un agente strettamente avverso al rischio preferisce il valore atteso della lotteria alla lotteria (Definizione 7.7). Se l'assicurazione è attuarialmente equa, egli ottiene, con l'assicurazione completa, qualunque evento si verifichi, un esito pari al valore atteso: infatti, per $A = D$, la lotteria $\ell(A) = (R-\pi A,\ 1-p\ ;\ R-\pi A-D+A,\ p)$ diviene la lotteria degenere $\ell(D) = (R-\pi D,\ 1)$, ove $R-\pi D = EV(\ell(A))$ se $\pi = p$, per cui $CE(\ell(D)) = EV(\ell(A))$. Quindi, se l'agente è strettamente avverso al rischio, allora è $CE(\ell(A)) < CE(\ell(D)) = EV(\ell(A))$ per ogni $A \in [0, D)$, per cui $A^* = D$.

Se vale la teoria dell'utilità attesa, si può ottenere questo risultato, oltre che con la dimostrazione precedente, anche analizzando il problema di massimo suindicato. Se $\pi = p$, la condizione del primo ordine suindicata richiede $u'(R-\pi A^*-D+A^*) = u'(R-\pi A^*)$, cioè, $A^* = D$, e la condizione del secondo ordine è soddisfatta perché la funzione u è concava. La soluzione di frontiera $A^* = 0$ richiederebbe $u'(R-D) \le u'(R)$, che è incompatibile con la stretta concavità di u. Ne consegue che vi è un unico massimo relativo, che è, perciò, un massimo assoluto, corrispondente alla scelta $A^* = D$. □

Si noti come la condizione di equità attuariale sia sufficiente perché un agente strettamente avverso al rischio si assicuri completamente e sia anche necessaria se, inoltre, vale la teoria dell'utilità attesa.

Nella Figura 7.20 è rappresentato il diagramma di Hirshleifer-Yaari che raffigura la situazione in esame nel caso in cui vale la teoria dell'utilità attesa. Si noti, sulla retta di iso-valore medio, il segmento che rappresenta l'insieme delle scelte possibili dell'agente e come questi preferisca, se è strettamente avverso al rischio, il punto di esso sulla bisettrice.

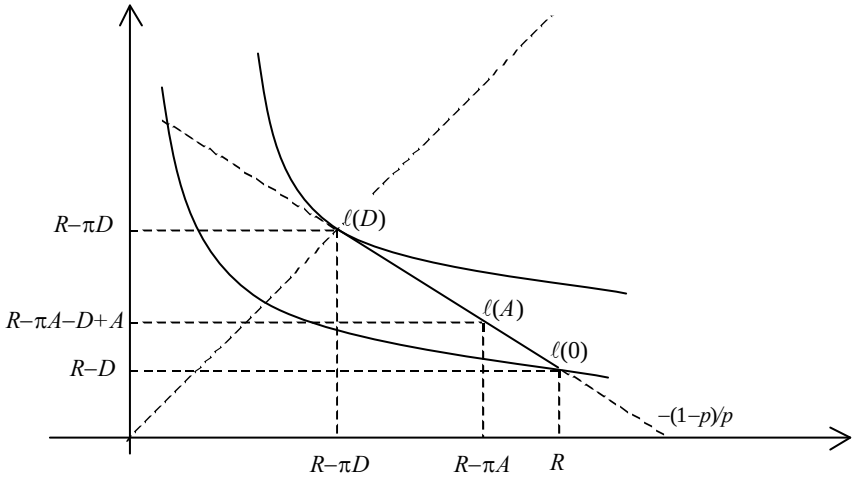

Figura 7.20

Dall'analisi precedente conseguono altri risultati.

Se l'agente è neutrale al rischio e l'assicurazione è attuarialmente equa, allora qualsiasi livello di assicurazione $A^* \in [0, D]$ gli è indifferente, cioè, per lui è indifferente assicurarsi o no e assicurarsi completamente o parzialmente.

Se l'agente segue la teoria dell'utilità attesa ed è strettamente propenso al rischio, allora non si assicura in nessun caso (né se l'assicurazione è attuarialmente equa, né, a maggior ragione se è iniqua, cioè, se $\pi > p$). Infatti, l'agente non sceglie mai un'assicurazione parziale (non risultando soddisfatta la condizione del secondo ordine per un massimo interno) e neppure l'assicurazione di frontiera $A = D$, poiché $U(\ell(D)) = u(R-\pi D) < u(R)\,(1-p) + u(R-D)\,p = U(\ell(0))$, essendo $\pi \geq p$ e la funzione u crescente e strettamente convessa.[7]

Se l'agente segue la teoria dell'utilità attesa, è avverso al rischio e l'assicurazione è attuarialmente iniqua, allora non si assicura completamente, ma parzialmente o per nulla, cioè, $A^* \in [0, D)$. Nella Figura 7.21 è descritta una situazione in cui l'agente si assicura parzialmente.

Se l'agente ha preferenze rappresentabili con una funzione di utilità attesa dipendente dalla posizione degli esiti (invece che di utilità attesa, come considerato finora), allora la sua scelta di assicurazione risulta dalla soluzione del problema

$$\max_{A \in [0,D]} u(R-\pi A-D+A) + (u(R-\pi A) - u(R-\pi A-D+A))\,\varphi(1-p)$$

La proposizione precedente, che esclude, se vale la teoria dell'utilità attesa, la scelta di assicurazione completa con assicurazione attuarialmente iniqua, non si mantiene se vale la teoria dell'utilità attesa dipendente dalla posizione degli esiti (si può indurre facilmente

[7] Questa proposizione non vale necessariamente se l'agente non segue la teoria dell'utilità attesa: si possono trovare esempi in cui risulta conveniente un'assicurazione parziale (occorre che le curve di indifferenza, nel diagramma di Hirshleifer-Yaari, non siano concave in ogni loro punto, sebbene la stretta propensione al rischio implichi che lo siano lungo la bisettrice).

dalla Figura 7.17 la possibile scelta di assicurazione completa anche con un'assicurazione attuarialmente iniqua). Può, così, essere rappresentato un comportamento osservabile frequentemente nella realtà.

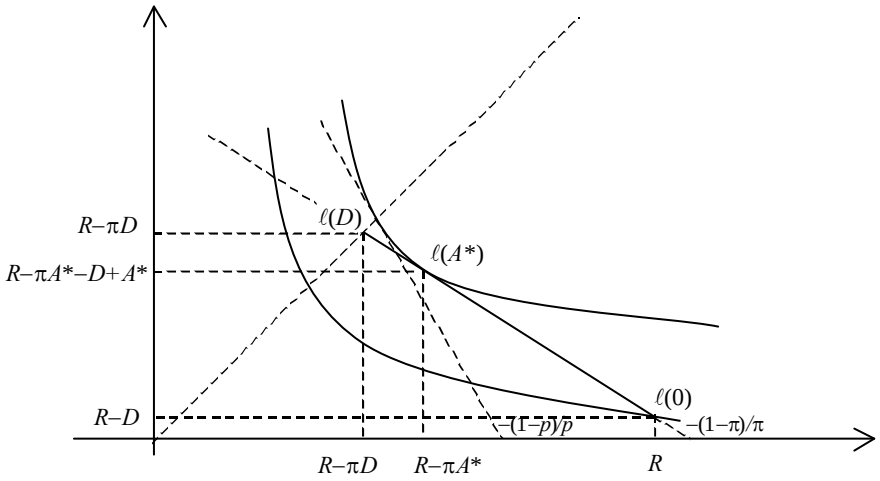

Figura 7.21

La scelta di un'attività finanziaria rischiosa. Abbia l'agente una ricchezza pari a R euro da investire per un periodo di tempo in due attività finanziarie. La prima attività ha rendimento certo, per cui un euro investito in essa vale $r_o \geq 1$ euro alla fine del periodo di tempo (quindi, il suo tasso d'interesse è $r_o - 1$). La seconda attività ha, invece, rendimento incerto e un euro investito in essa vale $\tilde{r}$ euro alla fine del periodo di tempo, con $\tilde{r}$ variabile aleatoria rappresentata dalla lotteria $\tilde{r} = (r_i , p_i)_{i=1}^{n}$. L'agente può scegliere la composizione del suo portafoglio (a, b) , ove a indica la ricchezza investita nell'attività non rischiosa (cioè, con rendimento certo) e b quella investita nell'attività rischiosa. I vincoli cui è soggetto l'agente sono $a + b = R$ (cioè, l'investimento complessivo è pari alla sua ricchezza), $b \leq R$ (ipotizzando che non possa indebitarsi per comprare l'attività rischiosa in quantità eccedente la sua ricchezza) e $b \geq 0$ (ipotizzando che non possa vendere l'attività rischiosa allo scoperto). La ricchezza alla fine del periodo di tempo è rappresentata dalla variabile aleatoria $a\, r_o + b\, \tilde{r}$, cioè, dalla lotteria $\ell(a, b) = (ar_o + br_i , p_i)_{i=1}^{n}$ o dalla lotteria ad essa equivalente $\ell(b) = ((R-b)r_o + br_i, p_i)_{i=1}^{n}$.

Se le preferenze dell'agente sono rappresentabili con l'utilità attesa $U(\ell(b))$, allora la sua scelta è determinabile considerando il problema

$$\max_{b \in [0, R]} \sum_{i=1}^{n} u((R-b)r_o + br_i)\, p_i$$

La condizione del primo ordine per un massimo relativo interno (cioè, con $b^* \in (0, R)$) richiede

$$\sum_{i=1}^{n} u'((R-b)r_o + br_i)\, (r_i - r_o)\, p_i = 0$$

cioè, che l'utilità attesa marginale sia nulla, e quella del secondo ordine

$$\sum_{i=1}^{n} u''((R-b)r_o+br_i)\,(r_i-r_o)^2\,p_i \le 0$$

Possono esservi soluzioni di frontiera, cioè, $b^* = R$ oppure $b^* = 0$. Si può avere $b^* = R$ solo se $\sum_{i=1}^{n} u'(Rr_i)(r_i-r_o)\,p_i \ge 0$ e $b^* = 0$ solo se $u'(Rr_o)\sum_{i=1}^{n}(r_i-r_o)\,p_i \le 0$. Si può avere, allora, $b^* = 0$, essendo $u'(Rr_o) > 0$, solo se $\sum_{i=1}^{n} r_i\,p_i \le r_o$, cioè, solo se il rendimento medio dell'attività rischiosa è non superiore al rendimento dell'attività priva di rischio. Quindi, se è $\sum_{i=1}^{n} r_i\,p_i > r_o$, allora $b^* \in (0, R]$.

Ne consegue, immediatamente, una prima proposizione rilevante.

Proposizione 7.21 Se le preferenze dell'agente sono rappresentabili con la teoria dell'utilità attesa e l'attività rischiosa ha un rendimento medio superiore al rendimento dell'attività priva di rischio (cioè, $\sum_{i=1}^{n} r_i\,p_i > r_o$), allora l'agente investe sempre (cioè, anche se è avverso al rischio) una parte della sua ricchezza nell'attività rischiosa.

Questo risultato non vale se le preferenze dell'agente sono rappresentabili con la teoria dell'utilità attesa dipendente dalla posizione degli esiti. In tale caso, può accadere che un agente avverso al rischio scelga $b^* = 0$ anche se il rendimento medio dell'attività rischiosa è superiore al rendimento dell'attività priva di rischio.

L'analisi precedente consente di pervenire facilmente ad altri risultati, tra cui i seguenti.

Se l'attività rischiosa presenta rendimenti superiori in ogni caso al rendimento dell'attività non rischiosa, cioè, $r_i > r_o$ per ogni $i = 1,\ldots, n$, allora viene scelto sempre (anche se l'agente è avverso al rischio) $b^* = R$. Analogamente, se $r_i < r_o$ per ogni $i = 1,\ldots, n$, allora viene scelto $b^* = 0$.

Un agente neutrale al rischio sceglie $b^* = R$ se il rendimento medio dell'attività rischiosa è superiore al rendimento dell'attività priva di rischio, sceglie $b^* = 0$ se è inferiore e sceglie indifferentemente un qualsiasi valore $b^* \in [0, R]$ se è uguale.

Un agente strettamente propenso al rischio (secondo la Definizione 7.7), per il quale valga la teoria dell'utilità attesa, sceglie $b^* = R$ se il rendimento medio dell'attività rischiosa è non inferiore al rendimento dell'attività priva di rischio. Infatti, l'agente non sceglie mai un $b \in (0, R)$ (non risultando soddisfatta la condizione del secondo ordine per un massimo interno) e neppure il valore di frontiera $b = 0$, dal momento che $U(\ell(0)) = u(R\,r_o) \le u(R\sum_{i=1}^{n} r_i\,p_i) < \sum_{i=1}^{n} u(R\,r_i)\,p_i = U(\ell(R))$, essendo $r_o \le \sum_{i=1}^{n} r_i\,p_i$ e la funzione u crescente e strettamente convessa.[8]

[8] Questa proposizione non vale necessariamente se l'agente non segue la teoria dell'utilità attesa: si possono trovare esempi in cui risulta conveniente un $b^* \in (0, R)$.

Se l'agente è strettamente avverso al rischio e il rendimento medio dell'attività rischiosa è non superiore al rendimento dell'attività priva di rischio, allora l'agente sceglie $b^* = 0$, sia che valga la teoria dell'utilità attesa, sia che questa teoria non valga.

Alcuni dei risultati precedenti possono essere estesi al caso in cui il vincolo di bilancio, anziché richiedere $b \in [0, R]$, richieda $b \in [-\alpha, R+\beta]$, ove α indica l'ammontare massimo di vendita allo scoperto dell'attività rischiosa consentito all'agente e β indica l'ammontare del credito (al tasso di interesse $r_o - 1$) di cui dispone l'agente per comprare l'attività rischiosa.

La scelta di un portafoglio di attività finanziarie. Si consideri il caso in cui sono disponibili k (con $k > 1$) attività finanziarie rischiose. I rendimenti di queste sono rappresentate dalla variabile aleatoria multivariata $\tilde{r} = (\tilde{r}^1, \tilde{r}^2, \ldots, \tilde{r}^k)$, i cui esiti possibili sono r_i^h, con $i = 1, \ldots, n_h$ e $h = 1, \ldots, k$, con probabilità congiunte $p(r_i^1, \ldots, r_i^k)$. L'agente può scegliere la composizione del suo portafoglio (a, b), ove a indica la ricchezza investita nell'attività non rischiosa (cioè, con rendimento certo) e $b = (b^1, \ldots, b^k)$ quella investita nelle diverse attività rischiose, sotto il vincolo $a + \sum_{h=1}^{k} b^h = R$. La ricchezza alla fine del periodo di tempo è rappresentata dalla variabile aleatoria $\tilde{R} = ar_o + \sum_{h=1}^{k} b^h \tilde{r}^h$ o $\tilde{R} = Rr_o + \sum_{h=1}^{k} b^h (\tilde{r}^h - r_o)$, cioè, dalla lotteria $\ell(b) = (Rr_o + \sum_{h=1}^{k} b^h (r_i^h - r_o), p(r_i^1, \ldots, r_i^k))_{i=1 \ldots}^{n_1 \ldots n_k}$.

Se le preferenze dell'agente sono rappresentabili con l'utilità attesa $U(\ell(b))$, indicando con $B = \{b \in \mathbb{R}_+^k : \sum_{h=1}^{k} b^h \leq R\}$ l'insieme delle azioni possibili (perciò, assumendo che non sia possibile né investire a credito in attività rischiose, nè vendere queste allo scoperto), la scelta è determinabile considerando il problema $\max_{b \in B} U(\ell(b))$, cioè,

$$\max_{b \in B} \sum_{i=1}^{n_1} \ldots \sum_{i=1}^{n_k} u(Rr_o + \sum_{h=1}^{k} b^h (r_i^h - r_o))\, p(r_i^1, \ldots, r_i^k)$$

Le condizioni del primo ordine per un massimo interno richiedono

$$E(u'(\tilde{R})\tilde{r}^j) = r_o\, Eu'(\tilde{R}), \qquad j = 1, \ldots, k$$

ove $Eu'(\tilde{R}) = \sum_{i=1}^{n_1} \ldots \sum_{i=1}^{n_k} u'(Rr_o + \sum_{h=1}^{k} b^h (r_i^h - r_o))\; p(r_i^1, \ldots, r_i^k)$ è l'utilità attesa marginale del portafoglio. Poiché il termine

$$E(u'(\tilde{R})\tilde{r}^j) = \sum_{i=1}^{n_1} \ldots \sum_{i=1}^{n_k} u'(Rr_o + \sum_{h=1}^{k} b^h (r_i^h - r_o))\, p(r_i^1, \ldots, r_i^k)\; r_i^j$$

può essere indicato, tenendo conto della definizione di covarianza tra variabili aleatorie, come

$$E(u'(\tilde{R})\tilde{r}^j) = Eu'(\tilde{R})\, E\tilde{r}^j + \mathrm{cov}(u'(\tilde{R}),\, \tilde{r}^j) \qquad j = 1, \ldots, k$$

le condizioni del primo ordine richiedono

$$Eu'(\tilde{R})\, E\tilde{r}^j + \mathrm{cov}(u'(\tilde{R}),\, \tilde{r}^j) = r_o\, Eu'(\tilde{R}) \qquad j = 1, \ldots, k$$

ossia,

$$E\tilde{r}^j = r_o - \frac{1}{Eu'(\tilde{R})}\, \mathrm{cov}(u'(\tilde{R}),\, \tilde{r}^j), \qquad j = 1, \ldots, k$$

Ne consegue, se la soluzione è interna, che ogni attività rischiosa viene acquistata in modo che il suo rendimento medio sia superiore al rendimento dell'attività non rischiosa in misura pari alla covarianza, con segno cambiato, tra le variabili aleatorie che rappresentano il rendimento dell'attività rischiosa in esame e l'utilità marginale del rendimento del portafoglio, dividendo poi questa covarianza per l'utilità attesa marginale del portafoglio. Questo rapporto, cioè, $-\frac{1}{Eu'(\tilde{R})}\ \mathrm{cov}(u'(\tilde{R}),\ \tilde{r}^j)$, viene spesso chiamato *premio al rischio* (con confusione terminologica rispetto al *premio al rischio* introdotto dalla Definizione 7.7, che ha un significato diverso). Se la covarianza è negativa (come accade normalmente per le attività rischiose), cioè, se il rendimento dell'attività rischiosa è correlata positivamente con il rendimento del portafoglio e, quindi, negativamente con la sua utilità marginale (poiché questa è decrescente), allora l'attività rischiosa deve avere un rendimento medio maggiore del rendimento dell'attività non rischiosa, in modo da compensare il suo rischio. Se, invece, la covarianza è positiva (come accade per quelle attività rischiose i cui rendimenti sono correlati negativamente con il rendimento del portafoglio), allora questa attività rischiosa viene acquistata anche se il suo rendimento medio è inferiore al rendimento dell'attività non rischiosa e l'agente è avverso al rischio, perché riduce la rischiosità del portafoglio. Questo risultato mostra come la proposizione (indicata precedentemente) secondo cui ogni agente strettamente avverso al rischio non investe nell'attività rischiosa se il rendimento medio dell'attività rischiosa è non superiore al rendimento dell'attività priva di rischio, che vale quando vi è una sola attività rischiosa, non si mantiene, in generale, in presenza di una pluralità di attività rischiose.

7.8 La scelta intertemporale di consumo con preferenze rappresentabili con l'utilità attesa

Nel Capitolo 6 è stato introdotto il problema della scelta intertemporale in condizioni di certezza. Questo paragrafo estende quella introduzione al caso con incertezza.

Con riferimento alla scelta intertemporale di consumo (esaminata nel Paragrafo 6.1), si introducano le stesse ipotesi allora impiegate, per cui il sistema di preferenza è rappresentabile con una funzione di utilità separabile additivamente e con funzioni di utilità temporanea uguali tra loro a meno di un fattore di sconto, cioè, del tipo $\sum_{t=0}^{T} \delta^t\, u(x_t)$, ove $x_t \in \mathbb{R}_+^k$ indica il consumo del tempo t e $\delta \in (0, 1]$ il fattore di sconto. L'incertezza rende aleatorie le grandezze con cui l'agente si confronta, ossia, l'orizzonte temporale T , il flusso dei redditi futuri $I_1, I_2, \ldots, I_T$, i prezzi futuri $p_1, p_2, \ldots, p_T$ dei beni di consumo e i tassi di interesse $i_2, i_3, \ldots, i_T$ (ove i_t è il tasso d'interesse a cui l'agente può al tempo $t-1$ dare o prendere in prestito somme di danaro con scadenza al tempo t). Si introducano le ulteriori ipotesi che il sistema di preferenza sia rappresentabile con l'utilità attesa e che la funzione $\sum_{t=0}^{T} \delta^t\, u(x_t)$ sia proprio la funzione di utilità von Neumann-Morgenstern. Allora, assegnata la distribuzione di probabilità congiunta delle grandezze aleatorie indicate, la scelta intertemporale risulta dalla massimizzazione vincolata dell'utilità attesa.

Nel seguito, per semplicità, si assume che l'orizzonte temporale T sia certo e finito, che $k = 1$ (cioè, $x_t \in \mathbb{R}_+$ è una somma di denaro che rappresenta il consumo del tempo t) e che la funzione di utilità temporanea $u(x_t)$ sia crescente e concava. Inoltre, invece che un flusso di redditi I_0, I_1, …, I_T, il consumatore ha una ricchezza iniziale R_0, che sceglie come consumare nel tempo, tenendo conto che può anche scegliere come investire quanto non ancora consumato in due attività finanziarie: una, priva di rischio, con rendimento $r_{t,o}$, e l'altra, rischiosa, con rendimento $\tilde{r}_t$ aleatorio, rappresentato dalla lotteria $(r_{t,i}, p_{t,i})_{i=1}^{n}$ con $t = 1,\ldots, T$ (come nella scelta di un'attività finanziaria rischiosa vista nel Paragrafo 7.7).

Se $T = 1$, la scelta può essere determinata considerando il problema

$$\max_{x_0, b_0} u(x_0) + \delta Eu(\tilde{x}_1)$$

ove $Eu(\tilde{x}_1)$ è l'utilità attesa del consumo $\tilde{x}_1$ del tempo $t = 1$, che è una variabile aleatoria, essendo, per il vincolo di bilancio, $\tilde{x}_1 = \tilde{R}_1 = (R_0 - x_0)\,((1-b_0)r_{1,o} + b_0\tilde{r}_1)$, ove $1-b_0$ e b_0 sono le quote del risparmio $S_1 = R_0 - x_0$ investite, rispettivamente, nell'attività priva di rischio e in quella rischiosa, con $b_0 \in [0, 1]$. Le condizioni del primo ordine richiedono

$$u'(x_0) = \delta E(u'(\tilde{x}_1)\,((1-b_0)\,r_{1,o} + b\,\tilde{r}_1))$$

$$E((u'(\tilde{x}_1)\,(\tilde{r}_1 - r_{1,o})) = 0$$

La prima condizione uguaglia l'utilità marginale del consumo del tempo 0 al valore scontato dell'utilità marginale attesa del consumo del tempo 1: è, quindi, una condizione di ottimalità intertemporale. La seconda condizione uguaglia, in termini di utilità marginale attesa, i rendimenti del risparmio investito nell'attività rischiosa e di quello investito nell'attività priva di rischio (ossia, è nulla la variazione di utilità attesa dovuta ad uno spostamento marginale dell'investimento da un'attività all'altra): è una condizione di ottimalità di portafoglio. La funzione indiretta di utilità è, allora,

$$u^*(R_0) = \max_{x_0, b_0} u(x_0) + \delta E(u(R_0 - x_0)\,((1-b_0)\,r_{1,o} + b\,\tilde{r}_1))$$

Se $T > 1$, si ha il problema

$$\max\ u(x_0) + \sum_{t=1}^{T} \delta^t\, Eu(\tilde{x}_t)$$

rispetto alla successione dei consumi x_0, $\tilde{x}_1$, …, $\tilde{x}_T$ e delle quote di investimento nell'attività rischiosa b_0, $\tilde{b}_1$, …, $\tilde{b}_{T-1}$, sotto il vincolo di bilancio, che può essere rappresentato recursivamente con le relazioni $\tilde{R}_1 = (R_0 - x_0)((1-b_0)\,r_{1,o} + b_0\tilde{r}_1)$, $\tilde{R}_{t+1} = (\tilde{R}_t - \tilde{x}_t)((1-\tilde{b}_t)r_{t+1,o} + \tilde{b}_t\,\tilde{r}_{t+1})$, per $t = 1,\ldots,T-1$, e $\tilde{x}_T = \tilde{R}_T$. Questo problema può essere affrontato usando la *programmazione dinamica* (introdotta nel Capitolo 6), partendo, cioè, dal tempo $T-1$ e procedendo, poi, all'indietro.

Nel tempo $T-1$, il consumatore ha la ricchezza R_{T-1} (che è, a quel tempo, una grandezza certa, mentre è aleatoria quando essa è presa in considerazione nei tempi precedenti) e massimizza l'utilità attesa $u(x_{T-1}) + \delta Eu(\tilde{x}_T)$ rispetto a x_{T-1} e b_{T-1} sotto il vincolo di bilancio $\tilde{x}_T = \tilde{R}_T = (R_{T-1} - x_{T-1})((1-b_{T-1})r_{T,o} + b_{T-1}\tilde{r}_T)$. Questo problema coincide con quello già esaminato per il caso $T = 1$ (basta, infatti, porre $T = 1$ per trovare esattamente lo stesso problema). La sua soluzione determina il consumo $x_{T-1}(R_{T-1})$ e la quota $b_{T-1}(R_{T-1})$ relativamente alla ricchezza R_{T-1} e la funzione indiretta di utilità $u_{T-1}^*(R_{T-1}) = u(x_{T-1}(R_{T-1})) + \delta E(u(R_{T-1} - x_{T-1}(R_{T-1}))((1-b_{T-1}(R_{T-1}))r_{T,o} + b_{T-1}(R_{T-1})\,\tilde{r}_T))$.

Nel tempo $T-2$, il consumatore ha la ricchezza R_{T-2} e massimizza l'utilità attesa $u(x_{T-2}) + \delta Eu_{T-1}^*(\tilde{R}_{T-1})$ rispetto a x_{T-2} e b_{T-2} sotto il vincolo $\tilde{R}_{T-1} = (R_{T-2} - x_{T-2})\times((1-b_{T-2})r_{T-1,o} + b_{T-2}\,\tilde{r}_{T-1})$. Le condizioni del primo ordine di questo problema sono

$$u'(x_{T-2}) = \delta\, E(u_{T-1}{*}'(\tilde{R}_{T-1}))\,((1-b_{T-1})\, r_{T-1,o} + b_{T-1}\,\tilde{r}_{T-1})\,)$$
$$E(u_{T-1}{*}'(\tilde{R}_{T-1}))\,(\tilde{r}_{T-1} - r_{T-1,o})\,) = 0$$

cioè, del tutto analoghe alle condizioni trovate per il caso $T = 1$, con l'unica differenza che vi è, per il tempo $T-1$, la funzione indiretta di utilità al posto di quella diretta. La loro soluzione determina il consumo $x_{T-2}(R_{T-2})$, la quota $b_{T-2}(R_{T-2})$ e la funzione indiretta di utilità $u_{T-2}{*}(R_{T-2}) = u(x_{T-2}(R_{T-2})) + \delta\, E(u_{T-1}{*}(R_{T-2} - x_{T-2}(R_{T-2}))\,((1-b_{T-2}(R_{T-2}))r_{T-1,o} + b_{T-2}(R_{T-2})\,\tilde{r}_{T-1}))$.

Procedendo all'indietro fino al tempo 0, in cui il consumatore ha la ricchezza R_0, si perviene alla soluzione $x_0{*} = x_0(R_0)$, $b_0{*} = b_0(R_0)$ e alla utilità $u{*}(R_0)$. Per ogni $t = 1,\ldots,T-1$, le funzioni $x_t(R_t)$ e $b_t(R_t)$, individuate nei diversi stadi, determinano le scelte in funzione delle possibili realizzazioni della variabile aleatoria $\tilde{R}_t$. Le variabili aleatorie $\tilde{R}_t$, $\tilde{x}_t$, $\tilde{b}_t$, per $t = 1,\ldots, T-1$, sono, allora, determinate iterativamente: per $t = 1$, dalla relazione $\tilde{R}_1{*} = (R_0 - x_0{*})\,((1-b_0{*})r_{1,o} + b_0{*}\,\tilde{r}_1)$, che consente, in base alle funzioni $x_1(R_1)$ e $b_1(R_1)$, di determinare le variabili aleatorie $\tilde{x}_1{*} = x_1(\tilde{R}_1{*})$ e $\tilde{b}_1{*} = b_1(\tilde{R}_1{*})$; per $t = 2$, dalla relazione $\tilde{R}_2{*} = (\tilde{R}_1{*} - \tilde{x}_1{*})\,((1-\tilde{b}_1{*})r_{2,o} + \tilde{b}_1{*}\,\tilde{r}_2)$, che consente, in base alle funzioni $x_2(R_2)$ e $b_2(R_2)$, di determinare le variabili aleatorie $\tilde{x}_2{*} = x_2(\tilde{R}_2{*})$ e $\tilde{b}_2{*} = b_2(\tilde{R}_2{*})$; e così via, per ogni $t = 2,\ldots,T-1$, per avere, infine, per $t = T$, $\tilde{x}_T{*} = \tilde{R}_T{*} = (\tilde{R}_{T-1}{*} - \tilde{x}_{T-1}{*})\,((1-\tilde{b}_{T-1}{*})r_{T,o} + \tilde{b}_{T-1}{*}\,\tilde{r}_T)$.

7.9 Scelta intertemporale e scelta sequenziale

La possibilità di risolvere il problema della scelta intertemporale con la programmazione dinamica, cioè, considerando dapprima l'ultimo periodo, poi il penultimo periodo, e così via fino ad arrivare al primo periodo, come è stato fatto nell'analisi precedente (Paragrafo 7.8), implica che le preferenze dell'agente siano tali da determinare la stessa scelta per il problema di scelta intertemporale (ossia, se il programma dei consumi viene deciso al tempo iniziale per l'intero orizzonte temporale, condizionatamente ai diversi possibili eventi futuri) e per il problema di scelta sequenziale (ossia, se vi è una successione di scelte, una per ogni periodo). Vi è uguaglianza tra scelta intertemporale e scelta sequenziale se vale la teoria dell'utilità attesa, che è l'ipotesi cruciale del modello analizzato nel Paragrafo 7.8. L'uguaglianza tra la scelta intertemporale e la scelta sequenziale richiede che siano soddisfatte alcune ipotesi, in particolare, la coerenza dinamica temporale. (Questa e la programmazione dinamica sono state introdotte nel Capitolo 6 con riferimento alla scelta intertemporale senza incertezza). Si tratta, allora, di definire la coerenza dinamica temporale per mostrare come la teoria dell'utilità attesa dipenda, nel contesto della scelta sequenziale, da essa e dall'ipotesi di indifferenza sulla risoluzione temporale dell'incertezza. Occorre, però, prima, introdurre alcune definizioni che riguardano la scelta intertemporale (quella, cioè, in cui vi è un unico tempo di decisione) per introdurre, successivamente, la scelta sequenziale.

La scelta intertemporale. La scelta intertemporale ha per oggetto lotterie composte (introdotte con la Definizione 7.1 del principio delle lotterie composte) che sono lotterie i cui esiti diretti sono altre lotterie, che possono essere ancora lotterie composte, e così via, e che sono, nell'ultimo stadio, lotterie semplici. Ad esempio, una lotteria a due stadi è del tipo $\ell = (\ell_h, p_h)_{h=1}^{n}$, con $\ell_h = (x_{i_h}, p_{i_h})_{i_h=1_h}^{n_h}$ per $h = 1,\ldots, n$, ove $x_{i_h} \in X$ per ogni $i_h = 1_h, \ldots, n_h$ e $h = 1,\ldots, n$. Nella scelta intertemporale, il primo stadio corrisponde alla realizzazione dell'esito del primo periodo di tempo, il secondo a quella del secondo periodo

di tempo, e così via, fino all'ultimo. (Nella Figura 7.1, la lotteria ℓ ha, nel primo stadio, i possibili esiti ℓ_1 e ℓ_2. Una volta che si realizza uno di questi esiti, vi è il secondo stadio, i cui esiti possibili dipendono, in generale, dall'esito che si è realizzato nel primo stadio).

La rappresentabilità del sistema di preferenza $\langle \mathcal{L}, \succsim \rangle$ (ove gli elementi di $\mathcal{L}$ sono sia lotterie semplici, sia lotterie composte) con l'utilità attesa (Proposizione 7.2) è collegata a condizioni che riguardano la coerenza delle preferenze sulle lotterie con le preferenze sulle loro sottolotterie. Ossia, la preferenza tra due lotterie del primo stadio è legata alla preferenza tra le lotterie che esse includono nel secondo stadio. Questi legami sono descritti da tre ipotesi: il principio delle lotterie composte (Definizione 7.1), il *consequenzialismo* (presentato dalla seguente Definizione 7.15) e l'estensione dell'assioma di indipendenza (Definizione 7.3) nota sotto il nome di *coerenza dinamica* (Definizione 7.16).

Definizione 7.15 (*Consequenzialismo*) Per ogni quadrupla di lotterie ℓ, ℓ', ℓ_1, $\ell_1' \in \mathcal{L}$ tali che $\ell = (\ell_1, p_1 ; \ell_2, p_2)$, $\ell' = (\ell_1', p_1 ; \ell_2, p_2)$, $\overline{\ell} = (\ell_1, p_1 ; \ell_2', p_2)$ e $\overline{\ell}' = (\ell_1', p_1 ; \ell_2', p_2)$, la relazione di preferenza tra le lotterie ℓ_1 e ℓ_1' non dipende dalla lotteria di cui esse sono sottolotterie.

Definizione 7.16 (*Coerenza dinamica*) Per ogni quadrupla di lotterie ℓ, ℓ', ℓ_1, $\ell_1' \in \mathcal{L}$ tali che $\ell = (\ell_1, p_1 ; \ell_2, p_2 ; \ldots ; \ell_n, p_n)$ e $\ell' = (\ell_1', p_1 ; \ell_2, p_2 ; \ldots ; \ell_n, p_n)$, si ha $\ell \succsim \ell'$ se e solo se $\ell_1 \succsim \ell_1'$.

Mentre il consequenzialismo (Hammond, 1988) richiede che la preferenza tra due lotterie non dipenda dalle altre lotterie la cui realizzazione è alternativa ad esse e che concorrono con esse a formare lotterie composte (cioè, la relazione di preferenza tra ℓ_1 e ℓ_1' è la stessa qualunque sia la sottolotteria alternativa, ℓ_2 o ℓ_2'), la coerenza dinamica collega la preferenza tra due lotterie alla preferenza tra le sottolotterie che rendono le due lotterie differenti.

Ora, il principio delle lotterie composte (Definizione 7.1) e il consequenzialismo (Definizione 7.15) implicano la coerenza dinamica (Definizione 7.16) se e solo se il sistema di preferenza sulle lotterie semplici soddisfa l'assioma di indipendenza (cioè, si ha la relazione $(x, p ; x'', 1-p) \succsim (x', p ; x'', 1-p)$ se e solo se $x \succsim x'$) (Karni e Schmeidler, 1990). Inoltre, la teoria dell'utilità attesa implica il consequenzialismo (infatti, con riferimento alla Definizione 7.15, se è $\ell_1 = (x_{i_1}, p_{i_1})_{i_1=1_1}^{n_1}$, allora si ha $U(\ell_1) = \sum_{i_1=1_1}^{n_1} p_{i_1} u(x_{i_1})$, che è indipendente da ℓ_2 o ℓ_2') e la coerenza dinamica (infatti, con riferimento alla Definizione 7.16, l'utilità attesa richiede $U(\ell) - U(\ell') = p_1 (U(\ell_1) - U(\ell_1'))$, per cui, con $p_1 > 0$, si ha $U(\ell) \geq U(\ell')$ se e solo se $U(\ell_1) \geq U(\ell_1')$). Allora, poiché, per la Proposizione 7.2, il principio delle lotterie composte e gli assiomi di continuità e di indipendenza implicano la teoria dell'utilità attesa, risulta che il principio delle lotterie composte e gli assiomi di continuità e di indipendenza implicano il consequenzialismo e la coerenza dinamica.

Con riferimento alla scelta intertemporale, risulta, allora, che le teorie diverse dall'utilità attesa non richiedono il principio delle lotterie composte e/o il consequenzialismo e/o la coerenza dinamica (tenendo presente che la coerenza dinamica è implicata dalle prime due ipotesi se è soddisfatto l'assioma di indipendenza sulle lotterie semplici, che è un'ipotesi pressochè indispensabile affinché il sistema di preferenza sia razionale). L'alternativa consiste, allora, nel non accogliere il principio delle lotterie composte o il consequenzialismo.

Il modello di utilità attesa dipendente dalla posizione degli esiti (descritto nel Paragrafo 7.6), che è una teoria diversa dall'utilità attesa, introduce una funzione di utilità

per le lotterie semplici (Definizione 7.13), che soddisfa l'assioma di indipendenza sulle lotterie semplici[9] (ma, in generale, non soddisfa l'assioma di indipendenza sulle lotterie composte, dal momento che può spiegare il paradosso di Allais). Se si considera la scelta intertemporale e si introduce il principio delle lotterie composte, il modello di utilità attesa dipendente dalla posizione degli esiti non soddisfa, in generale, la coerenza dinamica (e questo implica che non soddisfa, in generale, il consequenzialismo). Se, invece, considerando la scelta intertemporale (con esiti finali monetari, cioè, con $X \subset \mathbb{R}$), si assume che ogni sottolotteria sia rappresentata dal suo certo equivalente, allora il modello di utilità attesa dipendente dalla posizione degli esiti soddisfa la coerenza dinamica, ma non soddisfa, in generale, il principio delle lotterie composte.[10]

La scelta sequenziale. Mentre la scelta intertemporale è unica (anche se riguarda una successione di tempi di risoluzione di incertezza), la scelta sequenziale considera una successione di scelte. In ogni tempo di scelta vi è un insieme di lotterie tra cui scegliere che dipende, in generale, dalle scelte e dagli eventi realizzatisi in precedenza. Le ipotesi seguenti riguardano le relazioni tra le scelte successive, quindi introducono condizioni ulteriori rispetto a quelle già viste per la scelta intertemporale. Nel seguito, si considera, per semplicità, una situazione con quattro tempi in successione: di questi due sono tempi di scelta e due sono tempi di risoluzione dell'incertezza. Il primo tempo è un tempo di scelta e l'ultimo tempo è un tempo di risoluzione di incertezza. Se il terzo tempo è un tempo di scelta, oggetto di questa scelta è una lotteria semplice del tipo $\ell = (x_i, p_i)_{i=1}^{n}$. Sia $\mathcal{L}_s$ l'insieme delle lotterie semplici con esiti $x \in X$, ove X è un intervallo in $\mathbb{R}$, e $\langle \mathcal{L}_s , \succsim^2 \rangle$ il corrispondente sistema di preferenza.

Se la risoluzione dell'incertezza relativa alla scelta del primo tempo precede la seconda scelta (per cui questa avviene nel terzo dei quattro tempi indicati), l'agente compie la sua seconda scelta conoscendo già l'esito (un insieme di lotterie semplici) della prima. Allora, al momento della scelta del primo tempo, tiene conto di questo, cioè, che quando compirà la scelta successiva, egli conoscerà l'esito della scelta precedente. L'insieme delle lotterie che considera nel primo tempo è, perciò, costituito da lotterie composte (a due stadi,

---

[9] Come già indicato, l'assioma di indipendenza sulle lotterie semplici richiede $(x, p\ ;\ x'', 1-p) \succsim (x', p\ ;\ x'', 1-p)$ se e solo se $x \succsim x'$. Se $u(x'') \geq \max\{u(x), u(x')\}$ oppure $u(x'') \leq \min\{u(x), u(x')\}$, la teoria dell'utilità attesa dipendente dalla posizione degli esiti soddisfa banalmente la condizione indicata. Se $\max\{u(x), u(x')\} \geq u(x'') \geq \min\{u(x), u(x')\}$, ad esempio, se $u(x) \geq u(x'') \geq u(x')$, allora $U(x, p\ ;\ x'', 1-p) - U(x', p\ ;\ x'', 1-p) = (u(x) - u(x''))\varphi(p) + (u(x'') - u(x'))(1-\varphi(1-p)) \geq 0$, essendo $\varphi(p) \in [0, 1]$ per ogni $p \in [0, 1]$. Analogamente se $u(x') \geq u(x'') \geq u(x)$.

[10] Un esempio numerico può chiarire quanto indicato nel testo. Sia, per il modello di utilità attesa dipendente dalla posizione degli esiti, $X = [0, 5]$, $u(x) = x$ e $\varphi(p) = p^2$. Si considerino le lotterie $\ell = (\ell_1, ½\ ;\ \ell_2, ½)$, $\ell' = (\ell_1', ½\ ;\ \ell_2, ½)$, $\overline{\ell} = (\ell_1, ½\ ;\ \ell_2', ½)$, $\overline{\ell}' = (\ell_1', ½\ ;\ \ell_2', ½)$, $\ell_1 = \ell_2 = (1, 1)$, $\ell_1' = (5, ½\ ;\ 0, ½)$ e $\ell_2' = (0, 1)$. Applicando il principio delle lotterie composte risulta $\ell = (1, 1)$, $\ell' = (5, ¼\ ;\ 1, ½\ ;\ 0, ¼)$, $\overline{\ell} = (1, ½\ ;\ 0, ½)$, $\overline{\ell}' = (5, ¼\ ;\ 0, ¾)$, perciò con $U(\ell) = 1$, $U(\ell') = 13/16$, $U(\overline{\ell}) = 1/4$, $U(\overline{\ell}') = 5/16$. Per la coerenza dinamica, invece, dovrebbero valere le implicazioni seguenti: se $U(\overline{\ell}') > U(\overline{\ell})$, allora $U(\ell_1') > U(\ell_1)$ e, quindi, $U(\ell') > U(\ell)$, contrariamente a quanto indicato. Ne consegue che vale il principio delle lotterie composte ma non la coerenza dinamica. Si assuma, invece, che ogni sottolotteria sia rappresentata dal suo certo equivalente: allora, essendo $CE(\ell_1) = CE(\ell_2) = 1$, $CE(\ell_1') = 5/4$ e $CE(\ell_2') = 0$, si ha $\ell = (1, 1)$, $\ell' = (5/4, ½\ ;\ 1, ½)$, $\overline{\ell} = (1, ½\ ;\ 0, ½)$, $\overline{\ell}' = (5/4, ½\ ;\ 0, ½)$, perciò con $U(\ell) = 1$, $U(\ell') = 17/16$, $U(\overline{\ell}) = 1/4$, $U(\overline{\ell}') = 5/16$, risultando così soddisfatti il consequenzialismo e la coerenza dinamica, ma non il principio delle lotterie composte.

con realizzazioni del primo stadio nel secondo tempo e del secondo stadio nel quarto), del tipo $(\ell_i, p_i)_{i=1}^{n}$, con esiti $\ell_i \in \mathcal{L}_s$. Sia $\mathcal{L}$ l'insieme delle lotterie a due stadi con esiti $\ell_i \in \mathcal{L}_s$ e $\langle \mathcal{L} , \succsim^{1a} \rangle$ il corrispondente sistema di preferenza (ove l'apice a segnala che la risoluzione dell'incertezza relativa alla scelta del primo tempo è anteriore alla scelta successiva).

Se, invece, la risoluzione dell'incertezza relativa alla scelta del primo tempo è posteriore alla scelta successiva (per cui questa avviene nel secondo dei quattro tempi suindicati), l'agente compie la sua seconda scelta senza conoscere l'esito della prima. Allora, al momento della scelta del primo tempo, tiene conto di questo, cioè, che quando compirà la scelta successiva, egli non conoscerà ancora l'esito della scelta precedente. L'insieme delle lotterie da considerare nel primo tempo è, perciò, costituito da lotterie composte a due stadi, però ad unico stadio di realizzazione (nel senso che la realizzazione dei due stadi è simultanea, non potendo intervenire tra i due stadi alcun atto dell'agente). Sia $\mathcal{L}$ l'insieme delle lotterie a due stadi con esiti $\ell_i \in \mathcal{L}_s$ e $\langle \mathcal{L} , \succsim^{1p} \rangle$ il corrispondente sistema di preferenza (ove l'apice p segnala che la risoluzione dell'incertezza relativa alla scelta del primo tempo è posteriore alla scelta successiva).

Queste due situazioni (cioè, con risoluzione dell'incertezza della scelta del primo tempo anteriore o posteriore alla scelta successiva) sono rappresentate nella Figura 7.22 (ove i nodi di scelta sono indicati con un quadratino, mentre sono rappresentati con un cerchietto quelli aleatori, in cui, cioè, la direzione successiva è opera del caso).

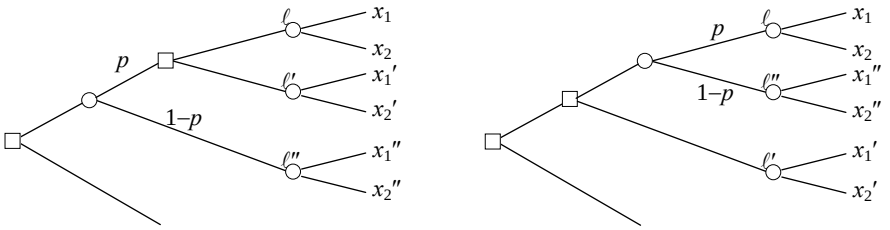

Figura 7.22

Si introducano le due definizioni seguenti.

Definizione 7.17 (*Coerenza dinamica temporale*) Per ogni terna $\ell , \ell', \ell'' \in \mathcal{L}_s$ e ogni $p \in [0, 1]$, è $\ell \succsim^2 \ell'$ se e solo se $(\ell, p ; \ell'', 1–p) \succsim^1 (\ell', p ; \ell'', 1–p)$.

Definizione 7.18 (*Indifferenza per il tempo di risoluzione dell'incertezza*) I due sistemi di preferenza $\langle \mathcal{L} , \succsim^{1a} \rangle$ e $\langle \mathcal{L} , \succsim^{1p} \rangle$ sono equivalenti. Ossia, per ogni coppia di lotterie composte $\ell, \ell' \in \mathcal{L}$, è $\ell \succsim^{1a} \ell'$ se e solo se $\ell \succsim^{1p} \ell'$.

La coerenza dinamica temporale richiede che il sistema di preferenza del secondo tempo non sia in contrasto con il sistema di preferenza del primo tempo,[11] oltre che

[11] Con riferimento all'esempio di incoerenza dinamica temporale indicato all'inizio del Capitolo 6 in ambito deterministico (cioè, la storia di Ulisse e le sirene) e alla Definizione 7.17 (che implica vi sia incoerenza dinamica temporale se si ha $(a_2) \succ^2 (a_2')$ e $(a_1$ e $a_2) \prec^1 (a_1$ e $a_2')$), risulta, se vi è incoerenza temporale, la situazione descritta nella Figura 7.23 (ove le azioni preferite sono rappresentate dai rami in grassetto).

soddisfare l'assioma di indipendenza. L'indifferenza per il tempo di risoluzione dell'incertezza richiede che il tempo della risoluzione dell'incertezza relativa alla scelta del primo tempo sia ininfuente sulle preferenze e le scelte dell'agente.

Si può dimostrare (Chew e Epstein, 1989, per un problema leggermente diverso da quello qui presentato, ma in modo irrilevante) che se i tre sistemi di preferenza $\langle \mathcal{L}_s , \succsim^2 \rangle$, $\langle \mathcal{L} , \succsim^{1a} \rangle$ e $\langle \mathcal{L} , \succsim^{1p} \rangle$ soddisfano la coerenza dinamica temporale (Definizione 7.17) e l'indifferenza per il tempo di risoluzione dell'incertezza (Definizione 7.18), allora $\langle \mathcal{L}_s , \succsim^2 \rangle$ è rappresentabile con una funzione di utilità attesa.

7.10 Lotterie con conseguenze che includono gli stati di natura

Con riferimento alla presentazione del Paragrafo 7.1 l'analisi sviluppata finora ha riguardato il caso in cui l'insieme delle conseguenze rilevanti per l'agente in esame coincide con l'insieme degli esiti (o *outcome*), cioè, $C = X$, così come indicato nel Paragrafo 7.2. Si considera, in questo paragrafo, il caso delle lotterie in cui $C = X \times S$, in cui, cioè, anche lo stato di natura (non solo la sua probabilità) è rilevante nel sistema di preferenza dell'agente (preferenze *state-dependent*). Vi sia, ad esempio, una lotteria i cui esiti possibili sono x_a (il diritto ad usufruire subito di una settimana bianca gratuita a Cortina d'Ampezzo) e x_b (non avere questo diritto), associati agli stati di natura s_1 (essere in buona salute e vincere il diritto ad usufruire della settimana bianca), s_2 (essere malato e vincere il diritto ad usufruire della settimana bianca), s_3 (essere in buona salute e non vincere il diritto ad usufruire della settimana bianca) e s_4 (essere malato e non vincere il diritto ad usufruire della settimana bianca). Siano le probabilità date di questi stati di natura, rispettivamente: p_1 , p_2 , p_3 e p_4 . Le conseguenze di questi stati di natura sono, rispettivamente, $c_1 = (x_a, s_1)$, $c_2 = (x_a, s_2)$, $c_3 = (x_b, s_3)$ e $c_4 = (x_b, s_4)$, per cui si ha la lotteria $\ell = (c_i , p_i)_{i=1}^4$, mentre se non si fosse tenuto conto che le conseguenze includono anche gli stati di natura si sarebbe avuta la lotteria $(x_a , p_1+p_2 ; x_b , p_3+p_4)$ (questa rappresentazione sarebbe corretta se, nel sistema di preferenza $\langle C, \succsim \rangle$ sull'insieme delle conseguenze, fosse $c_1 \sim c_2$ e $c_3 \sim c_4$, mentre non è corretta se $c_1 \succ c_2$ e $c_3 \succ c_4$, come qui implicitamente ipotizzato).

Una lotteria con conseguenze che includono gli stati di natura può, allora, essere rappresentata come $\ell = ((x_j, s_j), p(s_j))_{j=1}^m$. Si tratta, allora, di esaminare la rappresentabilità del sistema di preferenza $\langle \mathcal{L}, \succsim \rangle$ sull'insieme delle lotterie di questo tipo. Si può introdurre la definizione seguente, che estende alle lotterie con conseguenze che includono gli stati di natura la nozione di utilità attesa.

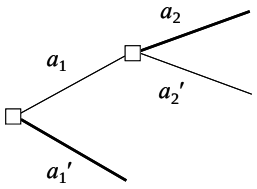

Figura 7.23

Definizione 7.19 (*Utilità attesa estesa*) Il sistema di preferenza $\langle \mathcal{L}, \succsim \rangle$ sull'insieme delle lotterie con conseguenze che includono gli stati di natura è rappresentato da una funzione di utilità attesa $U: \mathcal{L} \to \mathbb{R}$ se è, per ogni lotteria $\ell \in \mathcal{L}$ con $\ell = ((x_j, s_j), p(s_j))_{j=1}^{m}$,

$$U(\ell) = \sum_{j=1}^{m} p(s_j)\, u(x_j, s_j)$$

ove $u(s_j): X \to \mathbb{R}$ è una funzione di utilità che rappresenta il sistema di preferenza $\langle X, \succsim^{s_j} \rangle$ contingente allo stato di natura s_j, con $j = 1,\ldots, m$. Allora, per ogni coppia di lotterie $\ell, \ell' \in \mathcal{L}$, con $\ell = ((x_j, s_j), p(s_j))_{j=1}^{m}$ e $\ell' = ((x_j', s_j), p(s_j))_{j=1}^{m}$, si ha $\ell \succsim \ell'$ se e solo se $\sum_{j=1}^{m} p(s_j)\, u(x_j, s_j) \geq \sum_{j=1}^{m} p(s_j)\, u(x_j', s_j)$.

L'esistenza della rappresentazione del sistema di preferenza $\langle \mathcal{L}, \succsim \rangle$ (sull'insieme delle lotterie con conseguenze che includono gli stati di natura) mediante l'utilità attesa estesa può essere dimostrata in modo del tutto analogo a quella del sistema di preferenza sull'insieme delle lotterie le cui conseguenze coincidono con gli esiti (Proposizione 7.2), estendendo gli assiomi delle lotterie composte, di continuità e di indipendenza alle lotterie in esame.

Il diagramma di Hirshleifer-Yaari mostra una caratteristica rilevante delle preferenze *state-dependent.* Questa rappresentazione riguarda le lotterie con due soli stati di natura e con esiti unidimensionali, cioè, del tipo $\ell = ((x_1, s_1), p(s_1)\ ;\ ((x_2, s_2), p(s_2))$, ove $x_1, x_2 \in X$ con $X \subset \mathbb{R}_+$, e probabilità $p(s_1)$, $p(s_2)$ assegnate (con $p(s_1) + p(s_2) = 1$). Se vale la teoria dell'utilità attesa estesa e le due funzioni $u(s_j): X \to \mathbb{R}$, con $j = 1, 2$, sono derivabili, la pendenza delle curve di indifferenza $\overline{U}(\ell) = p(s_1)\, u(x_1,s_1) + p(s_2)\, u(x_2,s_2)$ è pari a $\dfrac{dx_2(x_1)}{dx_1} = -\dfrac{p(s_1)}{p(s_2)} \dfrac{\partial u(x_1, s_1)/\partial x_1}{\partial u(x_2, s_2)/\partial x_2}$, per cui, lungo la bisettrice, ove $x_2 = x_1$, si ha la pendenza $-\dfrac{p(s_1)}{p(s_2)} \dfrac{\partial u(x_1, s_1)/\partial x_1}{\partial u(x_2, s_2)/\partial x_2}\Bigg|_{x_2 = x_1}$, che, in generale, non solo differisce da $-\dfrac{p(s_1)}{p(s_2)}$, ma è anche diversa lungo la bisettrice (invece, per le lotterie con preferenze non *state-dependent*, si era trovata, nel Paragrafo 7.3, la pendenza uniforme lungo la bisettrice, pari a $-\dfrac{p(s_1)}{p(s_2)}$, cioè, a $-\dfrac{p}{1-p}$).

La situazione è rappresentata nella Figura 7.24.

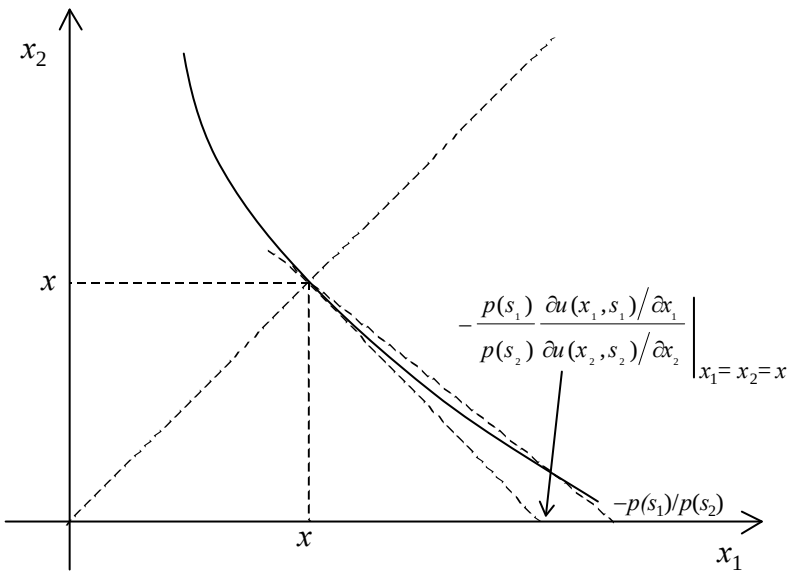

Figura 7.24

Questa caratteristica ha implicazioni rilevanti. Ad esempio, in relazione alla scelta assicurativa (introdotta nel Paragrafo 7.7), non è più vero che un agente avverso al rischio si assicuri completamente se l'assicurazione è attuarialmente equa. Con preferenze quali quelle in Figura 7.24 l'assicurazione sarebbe parziale (l'assicurazione attuarialmente equa implica un vincolo con pendenza pari a $-\frac{p(s_1)}{p(s_2)}$, mentre l'assicurazione completa richiede un vincolo con pendenza pari a $-\frac{p(s_1)}{p(s_2)}\frac{\partial u(x_1, s_1)/\partial x_1}{\partial u(x_2, s_2)/\partial x_2}\Big|_{x_2=x_1}$). (Questo caso può raffigurare il comportamento di un'agente che sceglie di assicurarsi parzialmente contro il rischio di una grave malattia invalidante perchè l'utilità della ricchezza è ridotta dall'invalidità. Ad esempio, la malattia comporta un danno pari a dieci milioni di euro, però un risarcimento così elevato non gli servirebbe una volta verificatosi il danno. Dovrà vivere in clinica e vivere il resto della sua vita nella migliore clinica costa molto meno).

7.11 La teoria dell'utilità attesa per scelte tra atti

L'analisi della scelta in condizioni di incertezza ha riguardato finora sistemi di preferenza $\langle \mathcal{L}, \succsim \rangle$, in cui $\mathcal{L}$ è un insieme di lotterie, cioè, di distribuzioni di probabilità, in particolare, del tipo $\ell = (x_i, p_i)_{i=1}^{n}$, con $x_i \in X$, ove X è l'insieme degli esiti, su cui vi è un sistema di preferenza $\langle X, \succsim \rangle$. In questo paragrafo si considera il caso più generale dei sistemi di preferenza $\langle A, \succsim \rangle$, in cui A è un insieme di atti, cioè, di funzioni $a: S \to X$, ove S è l'insieme degli stati di natura e X è l'insieme degli esiti (così come indicato nel Paragrafo 7.1, con la semplificazione che le uniche conseguenze rilevanti sono gli esiti, cioè, l'insieme delle conseguenze C coincide con quello degli esiti X). Un atto $a \in A$, se S è finito, cioè, del tipo $S = \{s_1, s_2, \ldots, s_m\}$, è, allora, $a = (x_1, s_1; x_2, s_2; \ldots; x_m, s_m)$, oppure $a = (x_j, s_j)_{j=1}^{m}$, ove x_j indica l'esito che l'atto a determina se si realizza lo stato di natura s_j. Una rappresentazione equivalente considera la corrispondenza inversa $a: X \to S$, ovvero la funzione $a: X \to 2^S$, ove 2^S è l'insieme dei sottoinsiemi di S e il codominio della funzione a è una partizione di S: allora, $a = (x_i, E_i)_{i=1}^{n}$, ove l'evento E_i è composto dagli stati di natura che generano l'esito x_i, con $n \leq m$ (poiché il numero n degli esiti possibili non è superiore a quello m degli stati di natura e può essere che uno stesso esito corrisponda a diversi stati di natura).

La combinazione tra gli atti $a: X \to 2^S$ e le probabilità degli eventi $p: 2^S \to [0, 1]$ determinano le lotterie $\ell: X \to [0, 1]$, ove $\ell = (x_i, p(E_i))_{i=1}^{n}$.

Si parla, perciò, di atti se la funzione di probabilità p: $2^S \to [0, 1]$ non è assegnata, di lotterie se lo è.

Definizione 7.20 (*Utilità attesa*) Il sistema di preferenza $\langle A, \succsim \rangle$ è rappresentato da una funzione di utilità attesa U: $A \to \mathbb{R}$ se, per ogni atto $a \in A$ con $a = (x_i , E_i)_{i=1}^{n}$, si ha

$$U(a) = \sum_{i=1}^{n} p(E_i)\, u(x_i)$$

ove u: $X \to \mathbb{R}$ è una funzione di utilità che rappresenta il sistema di preferenza $\langle X, \succsim \rangle$ e p: $2^S \to [0, 1]$ è una funzione di probabilità.[12] Allora, per ogni coppia di atti $a, a' \in A$, con $a = (x_i, E_i)_{i=1}^{n}$ e $a' = (x_i', E_i')_{i=1}^{n'}$, si ha $a \succsim a'$ se e solo se $\sum_{i=1}^{n} p(E_i)\ u(x_i) \geq \sum_{i=1}^{n'} p(E_i')\ u(x_i')$. Le probabilità risultanti dalla funzione p: $2^S \to [0, 1]$ sono denominate *probabilità soggettive* (poiché sono determinate dal sistema di preferenza $\langle A, \succsim \rangle$ dell'agente, mentre sono *oggettive* quelle considerate analizzando il sistema di preferenza $\langle \mathcal{L}, \succsim \rangle$, essendo le lotterie definite con probabilità esogene).

Un approccio relativamente semplice per ottenere, in questo contesto, la funzione di probabilità soggettiva p: $2^S \to [0, 1]$ a partire dal sistema di preferenza $\langle A, \succsim \rangle$ e per dimostrare la rappresentabilità di questo sistema con l'utilità attesa è quello introdotto da Anscombe e Aumann (1963), che include nell'insieme degli atti A anche le lotterie su X . Quindi, il sistema di preferenza $\langle A, \succsim \rangle$ non solo indica, per ogni coppia di atti $a, a' \in A$, se $a \succsim a'$ e/o $a' \succsim a$, ma anche, per ogni atto $a \in A$, se $a \succsim \ell$ e/o $\ell \succsim a$, ove ℓ è una qualsiasi lotteria semplice con esiti appartenenti all'insieme X . Perciò, se vale per le lotterie, sotto le condizioni della Proposizione 7.2, la teoria dell'utilità attesa ed è u: $X \to \mathbb{R}$ la funzione von Neumann-Morgenstern, la lotteria $\ell = (x_1, p\ ; x_2, 1-p)$ ha utilità attesa $U(\ell) = p\ u(x_1) + (1-p)\ u(x_2)$. Allora, per un atto $a = (x_1, E_1\ ; x_2, E_2)$ con $u(x_1) > u(x_2)$, assumendo che sia $(x_1, 1) \succsim a \succsim (x_2, 1)$, vi è una lotteria $\ell^* = (x_1, p^*\ ; x_2, 1-p^*)$ con gli stessi esiti tale che $a \sim \ell^*$. E' naturale porre $p(E_1) = p^*$ e $p(E_2) = 1-p^*$, per cui si ha $U(\ell^*) = U(a) = p(E_1)\ u(x_1) + p(E_2)\ u(x_2)$, le preferenze sugli atti sono ricondotte a quelle sulle lotterie e risulta determinata la probabilità soggettiva di ogni evento $E \subseteq S$.

La rappresentazione dei sistemi di preferenza $\langle A, \succsim \rangle$ sugli atti puri (cioè, senza includere tra essi anche le lotterie) con l'utilità attesa è stata analizzata da Savage (1954). La sua dimostrazione è abbastanza laboriosa, sebbene le ipotesi siano sostanzialmente uguali a quelle della Proposizione

[12] Una funzione di probabilità p: $2^S \to [0, 1]$ soddisfa le tre seguenti condizioni:

a) $p(\varnothing) = 0$ e $p(S) = 1$ (cioè, la probabilità dell'evento vuoto "non si realizza nessuno stato di natura" è nulla e la probabilità dell'evento certo "si realizza almeno uno stato di natura" è pari a uno);

b) $p(E) \geq p(E')$ se $E' \subseteq E$, ove $E, E' \subseteq S$ (cioè, la probabilità dell'evento E è non inferiore a quella dell'evento E' se l'evento E include tutti gli stati di natura dell'evento E' , ossia, se la realizzazione dell'evento E' implica quella dell'evento E);

c) $p(E) + p(E') = p(E \cup E') + p(E \cap E')$ per ogni coppia $E, E' \subseteq S$. Questa condizione rende la probabilità una misura additiva degli eventi: in particolare, per due eventi incompatibili o disgiunti, tali, cioè, che $E \cap E' = \varnothing$, si ha $p(E) + p(E') = p(E \cup E')$.

7.2, a parte le condizioni richieste perché esista una misura di probabilità per gli stati di natura. In particolare, l'assioma di indipendenza è sostituito dall'analogo *principio della cosa certa*, secondo cui la preferenza tra due atti che associano ad uno stesso stato di natura lo stesso esito non dipende da questo esito, ossia è $a \succsim a'$ se e solo se $b \succsim b'$, ove, ad esempio, $a = (x_1, s_1 ; x_2, s_2)$, $a' = (x_1', s_1 ; x_2, s_2)$, $b = (x_1, s_1 ; x_2', s_2)$ e $b' = (x_1', s_1 ; x_2', s_2)$.

La rappresentabilità delle preferenze sugli atti mediante l'utilità attesa consente di estendere a queste i risultati ottenuti nei paragrafi precedenti per le preferenze sulle lotterie rappresentabili con l'utilità attesa. E', infatti, irrilevante che l'utilità attesa abbia probabilità soggettive o oggettive nell'analisi dell'avversione al rischio o della scelta di un'assicurazione o di un'attività finanziaria.

Tuttavia, nel contesto degli atti, così come in quello delle lotterie, le condizioni che consentono la rappresentabilità delle preferenze mediante l'utilità attesa, sebbene ragionevoli (e, quindi, raccomandabili normativamente), non si accordano con il comportamento di molti agenti in particolari situazioni. Particolarmente rilevante è il caso in cui le preferenze risultano incompatibili con una misura additiva di probabilità degli eventi, come nel *paradosso di Ellsberg* (1961). Si considerino i seguenti quattro atti riferiti ad estrazioni da urne. Vi sono due urne: l'urna N ha composizione nota e contiene 50 palline bianche e 50 palline nere, mentre l'urna I ha composizione ignota (contiene palline bianche e/o nere ma non è noto il numero di palline bianche e quello di palline nere contenute nell'urna). L'atto a_1 determina la vincita di 1000 dollari se viene estratta dall'urna N una pallina bianca e 0 dollari se la pallina estratta è nera; l'atto a_2 determina la vincita di 1000 dollari se viene estratta dall'urna I una pallina bianca e 0 dollari se la pallina estratta è nera; l'atto a_3 determina la vincita di 1000 dollari se viene estratta dall'urna N una pallina nera e 0 dollari se la pallina estratta è bianca; infine, l'atto a_4 determina la vincita di 1000 dollari se viene estratta dall'urna I una pallina nera e 0 dollari se la pallina estratta è bianca. Ossia, indicando con E_{NB} l'evento "viene estratta dall'urna N una pallina bianca" e, analogamente, con E_{NN}, E_{IB} e E_{IN} gli altri eventi rilevanti, si hanno gli atti: $a_1 = (1000, E_{NB} ; 0, E_{NN})$, $a_2 = (1000, E_{IB} ; 0, E_{IN})$, $a_3 = (1000, E_{NN} ; 0, E_{NB})$ e $a_4 = (1000, E_{IN} ; 0, E_{IB})$, indicati nella Figura 7.25.

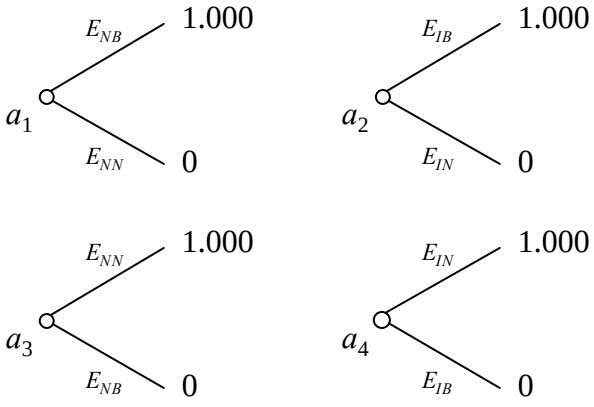

Figura 7.25

Se le preferenze dall'agente sono tali che $a_1 \succ a_2$ e $a_3 \succ a_4$ (ad esempio, perché preferisce conoscere le possibilità di vittoria, cioè, la composizione dell'urna, anziché no), allora le preferenze non sono rappresentabili con la teoria dell'utilità attesa di Savage, fondata sulla probabilità soggettiva. Infatti, da un lato, la nozione di probabilità (additiva) richiede $p(E_{NB})+p(E_{NN}) = p(E_{IB})+p(E_{IN}) = 1$, mentre, dall'altro lato, le relazioni di preferenza $a_1 \succ a_2$ e $a_3 \succ a_4$ implicherebbero, se valesse la teoria dell'utilità attesa, rispettivamente, le disuguaglianze $p(E_{NB}) > p(E_{IB})$ e $p(E_{NN}) > p(E_{IN})$, perciò, con $p(E_{NB})+p(E_{NN}) > p(E_{IB})+p(E_{IN})$.[13]

Questo paradosso mette in luce l'esistenza di un'avversione a situazioni in cui vi è incertezza non solo sull'esito ma anche sulle possibilità (o probabilità) dell'evento che genera l'esito. (Nel paradosso di Ellsberg suindicato, l'agente preferisce scommettere sull'urna di composizione nota anziché su quella di composizione ignota). L'incertezza sulla distribuzione di probabilità viene indicata come *incertezza* o *ambiguità*, mentre l'incertezza sull'esito come *rischio*. (La distinzione tra *rischio* e *incertezza* è dovuta a Knight, 1921). Le lotterie sono caratterizzate soltanto da *rischio*, gli atti anche da *incertezza*. La teoria dell'utilità attesa di Savage, assegnando una distribuzione di probabilità agli stati di natura, descrive preferenze *neutrali all'incertezza*. (Per questa ragione, preferenze che denotano avversione all'incertezza, come quelle evidenziate dal paradosso di Ellsberg, non sono descrivibili con la teoria dell'utilità attesa).

7.12 Il modello di utilità attesa di Choquet e l'avversione all'incertezza

[13] Un altro esempio presentato da Ellsberg considera l'estrazione di una pallina da un'urna contenente 90 palline, di cui 30 rosse e le altre 60 bianche o nere (in proporzione ignota). Vi sono tre stati di natura possibili: s_R , s_B e s_N , ciascuno dei quali si riferisce al colore della pallina estratta. Si considerino i quattro atti $a_1 = (100, s_R ; 0, s_B ; 0, s_N)$, $a_2 = (0, s_R ; 100, s_B ; 0, s_N)$, $a_3 = (0, s_R ; 100, s_B ; 100, s_N)$ e $a_4 = (100, s_R ; 0, s_B ; 100, s_N)$, ossia, a_1 determina la vincita di 100 dollari se la pallina estratta è rossa e 0 dollari se è di altro colore, mentre a_3 determina la vincita di 100 dollari se la pallina estratta non è rossa e 0 dollari se è rossa, e analogamente per a_2 e a_4 . Le preferenze sono incompatibili con la teoria dell'utilità attesa se $a_1 \succ a_2$ e $a_3 \succ a_4$ (preferenze queste giustificabili se l'agente preferisce conoscere le possibilità di vittoria, che hanno probabilità nota nel caso degli atti a_1 e a_3 , in cui essa è rispettivamente pari a 1/3 e a 2/3, mentre hanno probabilità ignota nel caso degli atti a_2 e a_4). Infatti, secondo la teoria dell'utilità attesa, $a_1 \succ a_2$ implica $p(s_R) > p(s_B)$ e $a_3 \succ a_4$ implica $p(s_B)+p(s_N) > p(s_R)+p(s_N)$, che sono relazioni incompatibili tra loro.

Prima di definire e analizzare l'avversione all'incertezza conviene introdurre una rappresentazione del sistema di preferenza $\langle A, \succsim \rangle$ che non implichi neutralità all'incertezza e che consenta la rappresentazione di preferenze quali quelle indicate dal paradosso di Ellsberg. Una rappresentazione siffatta è quella nota con il nome di *utilità attesa di Choquet*,[14] che viene qui introdotta per atti con esiti unidimensionali, cioè, con $X = [\underline{x}\ ,\ \overline{x}\ ]$.

Definizione 7.21 (*Utilità attesa di Choquet*) Il sistema di preferenza $\langle A, \succsim \rangle$ è rappresentato da una funzione $U: A \to \mathbb{R}$ di utilità attesa di Choquet se, per ogni atto $a \in A$ con $a = (x_i\ ,\ E_i)_{i=1}^{n}$ e $x_i > x_{i+1}$ per ogni $i = 1\ ,\ldots,\ n-1$, si ha

$$U(a) = u(x_n) + \sum_{i=1}^{n-1} (u(x_i) - u(x_{i+1}))\ \nu(\cup_{h=1}^{i} E_h)$$

ossia,

$$U(a) = u(x_1)\ \nu(E_1) + \sum_{i=2}^{n} u(x_i)\ (\nu(\cup_{h=1}^{i} E_h) - \nu(\cup_{h=1}^{i-1} E_h))$$

ove $u: X \to \mathbb{R}$ è una funzione di utilità che rappresenta il sistema di preferenza $\langle X, \succsim \rangle$ e $\nu: 2^S \to [0,\ 1]$. Le misure risultanti dalla funzione $\nu: 2^S \to [0,\ 1]$ sono denominate *probabilità non additive* o *capacità* e differiscono dalle probabilità solo perché non si richiede la condizione di additività.[15] Allora, per ogni coppia di atti $a,\ a' \in A$, con $a = (x_i,\ E_i)_{i=1}^{n}$, ove $x_i > x_{i+1}$ per ogni $i = 1,\ldots,\ n-1$, e $a' = (x_i',\ E_i')_{i=1}^{n'}$, ove $x_i' > x_{i+1}'$ per ogni $i = 1,\ldots,\ n'-1$, si ha $a \succsim a'$ se e solo se $u(x_n) + \sum_{i=1}^{n-1} (u(x_i) - u(x_{i+1}))\ \nu(\cup_{h=1}^{i} E_h) \geq u(x_{n'}') + \sum_{i=1}^{n'-1} (u(x_i') - u(x_{i+1}'))\ \nu(\cup_{h=1}^{i} E_h')$.

Si noti come l'utilità attesa di Choquet coincida con l'utilità attesa (Definizione 7.20) se la capacità ν soddisfa anche la condizione di additività. Inoltre, con l'utilità attesa di Choquet è possibile descrivere le preferenze che determinano il paradosso di Ellsberg.[16]

L'utilità attesa di Choquet è stata introdotta da Schmeidler (1989) e Gilboa (1987), indebolendo il *principio della cosa certa* di Savage. Al suo posto vi è l'ipotesi di *indipendenza comonotonica*. Due atti $a = (x(s_j))_{j=1}^{m}$ e $a' = (x'(s_j))_{j=1}^{m}$ sono *comonotoni* se $((x(s_j) - x(s_h))\ ((x'(s_j) - x'(s_h)) \geq 0$ per ogni coppia $s_j,\ s_h \in S$, cioè, non accade, se lo stato di natura s_j determina un esito migliore che lo stato di natura s_h per l'atto a , che accada il contrario per l'atto a'. La condizione di indipendenza comonotonica richiede che $a \succ a'$ implichi $\lambda a \oplus (1-\lambda)a'' \succ \lambda a' \oplus (1-\lambda)a''$ per ogni atto $a'' = (x''(s_j))_{j=1}^{m}$ comonotono sia con

---

[14] Il nome deriva dal tipo di integrale (introdotto dal matematico Choquet, 1954) utilizzato da questa teoria nella rappresentazione del sistema $\langle A, \succsim \rangle$ quando l'insieme degli stati di natura S è un continuo. Poiché nel seguito viene considerato soltanto il caso in cui S è finito, questo tipo di integrale non viene qui specificato.

[15] Una funzione di probabilità non additiva $\nu: 2^S \to [0,\ 1]$ soddisfa le prime due delle tre condizioni indicate nella nota 9 per la probabilità, cioè:

a) $\nu(\varnothing) = 0$ e $\nu(S) = 1$;

b) $\nu(E) \geq \nu(E')$ se $E' \subseteq E$, ove $E,\ E' \subseteq S$.

Invece, non è richiesto che sia soddisfatta la terza condizione, quella di additività, cioè, può accadere che sia $\nu(E) + \nu(E') \neq \nu(E \cup E') + \nu(E \cap E')$. In particolare, per due eventi incompatibili o disgiunti, tali, cioè, che $E \cap E' = \varnothing$, può essere $\nu(E) + \nu(E') \neq \nu(E \cup E')$.

[16] Riprendendo l'esempio del paradosso di Ellsberg presentato nel testo e introducendo la funzione di utilità degli esiti $u = x$, le capacità $\nu(E_{IB}) = \nu(E_{IN}) = 2/5$ e tenendo conto che $p(E_{NB}) = p(E_{NN}) = 1/2$, si ottiene $U(a_1) = 500$, $U(a_2) = 400$, $U(a_3) = 500$ e $U(a_4) = 400$, cosicché risulta $a_1 \succ a_2$ e $a_3 \succ a_4$. Nell'esempio riportato nella nota 13, introducendo la funzione di utilità degli esiti $u = x$ e le capacità $\nu(s_R) = p(s_R) = 1/3$, $\nu(s_B) = \nu(s_N) = 1/4$, $\nu(s_B \cup s_N) = p(s_B \cup s_N) = 2/3$ e $\nu(s_R \cup s_B) = \nu(s_R \cup s_N) = 1/2$, si ottiene $U(a_1) = 33{,}3$, $U(a_2) = 25$, $U(a_3) = 66{,}7$ e $U(a_4) = 50$, cosicché risulta $a_1 \succ a_2$ e $a_3 \succ a_4$.

a sia con a' e per ogni $\lambda \in (0, 1)$. (Le misure di probabilità, introdotte nel Paragrafo 7.6, indicano $\lambda a \oplus (1-\lambda)a'' = (\ell(s_j))_{j=1}^{m}$ con $\ell(s_j) = (x(s_j), \lambda\ ;\ x''(s_j), 1-\lambda)$ per ogni $j = 1, \ldots, m$).

Vengono ora proposte le definizioni di avversione all'incertezza e di avversione alla crescita dell'incertezza e indicate le corrispondenti proprietà dell'utilità attesa di Choquet.

Definizione 7.22 (*Avversione all'incertezza*) Un agente, dotato del sistema di preferenza $\langle A, \succsim \rangle$, è avverso all'incertezza se esiste una distribuzione di probabiltà su S (cioè, una funzione $p: S \to [0, 1]$ con $\sum_{j=1}^{m} p(s_j) = 1$) tale che le lotterie indotte da essa risultano non meno preferite dei corrispondenti atti. Ossia, se $(x(s_j), p(s_j))_{j=1}^{m} \succsim (x(s_j))_{j=1}^{m}$ per ogni $a = (x(s_j))_{j=1}^{m} \in A$, o, anche, indicando con $CE(a)$ il certo equivalente dell'atto e con $CE(a, p)$ il certo equivalente della lotteria indotta da p su a , se $CE(a, p) \geq CE(a)$ per ogni $a \in A$. Correlativamente, è propenso all'incertezza se esiste una distribuzione di probabilità per cui $CE(a, p) \leq CE(a)$ per ogni $a \in A$ ed è neutrale all'incertezza se è, insieme, avverso e propenso all'incertezza.

Questa definizione (Montesano e Giovannoni, 1996) è strettamente legata all'idea che l'incertezza consista nell'ignoranza delle probabilità degli stati di natura.

Tenendo conto che gli atti implicano sia incertezza sia rischio e, quindi, che è opportuno definire l'avversione al rischio anche per gli atti, viene introdotta una definizione di avversione al rischio per il sistema di preferenza sugli atti che estende la Definizione 7.7 relativa ai sistemi di preferenza sulle lotterie.

Definizione 7.23 (*Avversione al rischio*) Un agente, dotato del sistema di preferenza $\langle A, \succsim \rangle$, è avverso al rischio se $EV(a, p) \geq CE(a, p)$ per ogni $a \in A$ e ogni distribuzione di probabiltà p su S , ove $EV(a, p) = \sum_{j=1}^{m} p(s_j)\ x(s_j)$. Correlativamente, è propenso al rischio se $EV(a, p) \leq CE(a, p)$, neutrale al rischio se $EV(a, p) = CE(a, p)$, per ogni $a \in A$ e ogni distribuzione di probabiltà p su S .

Il diagramma di Hirshleifer-Yaari, introdotto nel Paragrafo 7.3 per le lotterie, è adatto a rappresentare anche gli atti con due esiti (corrispondenti a due eventi dati) e a raffigurare (come nel Paragrafo 7.4) le curve di indifferenza di atti e lotterie. L'equivalente certo di un atto $a^* = (x_1^*, E_1\ ;\ x_2^*, E_2)$ è rappresentato, per definizione di equivalente certo, dal punto di intersezione tra la bisettrice e la curva di indifferenza dell'atto in esame $CE(a) = CE(a^*)$, con $a = (x_1, E_1\ ;\ x_2, E_2)$. Perciò, l'equivalente certo dell'atto a^* è pari all'ascissa (e all'ordinata) di questo punto. Per questo stesso punto (che rappresenta l'atto degenere $(CE(a^*), S)$) passa anche la curva di indifferenza della lotteria indotta su a^* da una qualunque distribuzione di probabilità, ossia, la curva di indifferenza $CE(\ell) = CE(a^*)$, che include le lotterie $\ell = (x_1, p(E_1)\ ;\ x_2, p(E_2))$ indifferenti alla lotteria degenere $(CE(a^*), 1)$, ove $p(E_1)$ è un qualsiasi numero dell'intervallo $[0, 1]$ e $p(E_2)) = 1-p(E_1)$.

Vi è avversione all'incertezza se esiste una probabilità $\hat{p}(E_1)$ per cui $CE(\hat{\ell}^*) \geq CE(a^*)$, ove $\hat{\ell}^* = (x_1^*, \hat{p}(E_1)\ ;\ x_2^*, \hat{p}(E_2))$ e $a^* = (x_1^*, E_1\ ;\ x_2^*, E_2)$, per ogni $(x_1^*, x_2^*) \in X^2$. Allora, nel diagramma di Hirshleifer-Yaari, vi è avversione all'incertezza se esiste una probabilità $\hat{p}(E_1)$ per cui ogni curva di indifferenza delle lotterie $CE(\hat{\ell}) = CE(a^*)$, con $\hat{\ell} = (x_1, \hat{p}(E_1)\ ;\ x_2, \hat{p}(E_2))$, non ha punti al di sopra della corrispondente curva di indifferenza degli atti $CE(a) = CE(a^*)$. La Figura 7.26 rappresenta due curve di indifferenza (degli atti, $CE(a) = CE(a^*)$, e delle lotterie, $CE(\hat{\ell}) = CE(a^*)$) che soddisfano la condizione di avversione all'incertezza. Vi è avversione al rischio se, per ogni atto a^* e per ogni probabilità $p(E_1)$, l'equivalente certo della corrispondente lotteria (che è $\ell^* =$

(x_1, $p(E_1)$; x_2, $p(E_2)$) è non maggiore del suo iso-valore medio (cioè, $CE(\ell^*) \le EV(\ell^*) = p(E_1)\, x_1^* + (1-p(E_1))\, x_2^*$). Nella Figura 7.26 si può osservare che $CE(\hat{\ell}^*) \le EV(\hat{\ell}^*)$. Allora, vi è avversione al rischio se la curva di indifferenza delle lotterie e la retta di iso-valore medio passanti per ciascun punto della bisettrice non si intersecano e la curva di indifferenza si situa a nord-est rispetto alla retta di iso-valore medio, così come rappresentato nella stessa Figura 7.26 (per la curva di indifferenza delle lotterie $CE(\hat{\ell}) = CE(a^*)$ e la retta di iso-valore medio $EV(\hat{\ell}) = CE(a^*)$).

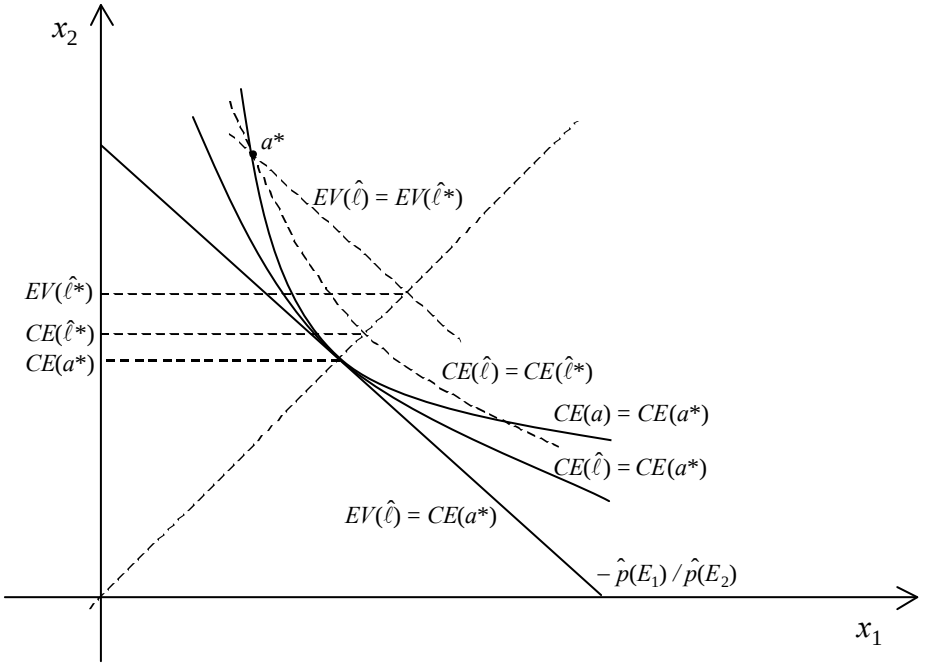

Figura 7.26

E' naturale definire un agente avverso alla crescita dell'incertezza se preferisce gli atti meno incerti a quelli più incerti. Si tratta, allora, di stabilire una relazione di "minore incertezza" per gli atti. Tenendo conto che l'incertezza consiste nella non conoscenza delle probabilità, una mistura di probabilità, introducendo delle probabilità sugli esiti, determina una riduzione dell'incertezza. Ossia, l'atto $\lambda a_a \oplus (1-\lambda) a_b$ ottenuto come mistura probabilistica dei due atti a_a e a_b ha incertezza non superiore al più incerto dei due atti. La Figura 7.26 mostra una situazione in cui una mistura probabilistica riesce addirittura ad eliminare l'incertezza: siano $a_a = (10, E_1 ; 0, E_2)$, $a_b = (0, E_1 ; 10, E_2)$ e $\lambda = ½$, per cui $\lambda a_a \oplus (1-\lambda) a_b = ((10, ½ ; 0, ½), E_1 ; (0, ½ ; 10, ½), E_2) = (10, ½ ; 0, ½)$.

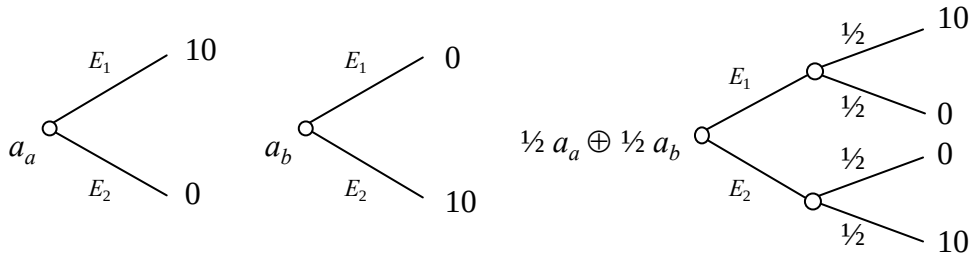

Figura 7.27

Può essere, allora, introdotta la seguente definizione di avversione alla crescita dell'incertezza, basandosi sulla considerazione che la mistura di probabilità riduce l'incertezza e che l'agente avverso alla crescita dell'incertezza preferisce gli atti meno incerti. Tuttavia, una mistura probabilistica, mentre riduce l'incertezza (Definizione 7.23), accresce il rischio (così come introdotto nel Paragrafo 7.6 prima della Definizione 7.14). Ne consegue che la definizione seguente vale solo se l'agente è neutrale alla crescita del rischio introdotta con misture di probabilità (come accade per i sistemi di preferenza rappresentabili con una funzione di utilità attesa di Choquet, poiché questa si riduce all'utilità attesa se si pongono le probabilità al posto delle capacità e l'utilità attesa è neutrale alla crescita del rischio introdotta con misture di probabilità).

Definizione 7.24 (*Avversione alla crescita dell'incertezza*) Un agente (neutrale alla crescita del rischio introdotta con misture di probabilità) è avverso alla crescita dell'incertezza se $CE(\lambda a_a \oplus (1-\lambda)a_b) \geq \min\{CE(a_a), CE(a_b)\}$ per ogni coppia di atti a_a, $a_b \in A$ e ogni scalare $\lambda \in [0, 1]$, è propenso alla crescita dell'incertezza se $CE(\lambda a_a \oplus (1-\lambda)a_b) \leq \max\{CE(a_a), CE(a_b)\}$ ed è neutrale alla crescita dell'incertezza se è sia avverso che propenso alla crescita dell'incertezza

Per determinare le condizioni di avversione all'incertezza e alla sua crescita conviene tener conto del caso in cui vale la teoria dell'utilità attesa. Se il sistema di preferenza $\langle A, \succsim \rangle$ è rappresentabile con l'utilità attesa (Definizione 7.20), allora, per ogni atto $a \in A$ con $a = (x_i, E_i)_{i=1}^{n}$, è definita l'utilità

$$U(a) = \sum_{i=1}^{n} p(E_i)\, u(x_i)$$

ove $u: X \to \mathbb{R}$ rappresenta il sistema di preferenza $\langle X, \succsim \rangle$ e $p: 2^S \to [0, 1]$ rappresenta le probabilità degli eventi. Ne consegue (banalmente, applicando la Definizione 7.22) che vi è neutralità all'incertezza. Vi è, anche, neutralità alla crescita dell'incertezza poiché $U(\lambda a_a \oplus (1-\lambda)a_b) = \lambda\, U(a_a) + (1-\lambda)\, U(a_b) \in [\min\{U(a_a), U(a_b)\}, \max\{U(a_a), U(a_b)\}]$.

Se l'agente ha un sistema di preferenza $\langle A, \succsim \rangle$ rappresentabile con l'utilità attesa di Choquet (Definizione 7.21), allora, per ogni atto $a \in A$ con $a = (x_i, E_i)_{i=1}^{n}$ e $x_i > x_{i+1}$, per ogni $i = 1, \ldots, n-1$, è definita l'utilità

$$U(a) = u(x_n) + \sum_{i=1}^{n-1} (u(x_i) - u(x_{i+1}))\, \nu(\cup_{h=1}^{i} E_h)$$

ove $u: X \to \mathbb{R}$ rappresenta il sistema di preferenza $\langle X, \succsim \rangle$ e $\nu: 2^S \to [0, 1]$ rappresenta le capacità degli eventi. Ne derivano condizioni interessanti sulla capacità $\nu: 2^S \to [0, 1]$ in relazione all'avversione all'incertezza e all'avversione alla crescita dell'incertezza. Occorre, però, prima introdurre le definizioni seguenti.

Definizione 7.25 (*Core*, o nocciolo, *di una capacità*) Il *core* di una capacità è l'insieme

$$core(\nu) = \{p \in P(S) : p(E) \geq \nu(E) \text{ per ogni } E \in 2^S\}$$

ove $P(S)$ è l'insieme delle distribuzioni di probabilità sull'insieme degli stati di natura S, ossia,

$$P(S) = \{p(s_j) \in [0, 1] \text{ per ogni } j = 1, \ldots, m : \sum_{j=1}^{m} p(s_j) = 1\}$$

cosicchè, per ogni $E \subseteq S$, è $p(E) = \sum_{s_j \in E} p(s_j)$. Allora, il $core(\nu)$ è l'insieme delle probabilità che dominano la capacità. (Può benissimo accadere che non esista alcuna probabilità che domini la capacità. In questo caso, si ha $core(\nu) = \varnothing$). Analogamente, indicando come *capacità duale* di un evento il complemento ad uno della capacità dell'evento complementare, cioè, $\overline{\nu}(E) = 1 - \nu(S \setminus E)$, il *core* della capacità *duale* è

$core(\overline{\nu}) = \{p \in P(S): p(E) \geq \overline{\nu}(E) \text{ per ogni } E \in 2^S\} = \{p \in P(S): p(E) \leq \nu(E) \text{ per ogni } E \in 2^S\}$

Definizione 7.26 (*Capacità convessa*) Una capacità è convessa se

$$\nu(E_a) + \nu(E_b) \leq \nu(E_a \cup E_b) + \nu(E_a \cap E_b) \text{ per ogni coppia } E_a, E_b \in 2^S$$

mentre è concava se $\nu(E_a) + \nu(E_b) \geq \nu(E_a \cup E_b) + \nu(E_a \cap E_b)$. Una capacità che è, insieme, concava e convessa, soddisfa la condizione di additività ed è, perciò, una probabilità. Inoltre (Shapley, 1971), se la capacità è convessa, allora il suo *core* è non vuoto; se la capacità è concava, allora il *core* della sua capacità duale è non vuoto.

Valgono, allora, le due proposizioni seguenti per i sistemi di preferenza $\langle A, \succsim \rangle$ rappresentabili con l'utilità attesa di Choquet.

Proposizione 7.22 Se il sistema di preferenza $\langle A, \succsim \rangle$ è rappresentabile con l'utilità attesa di Choquet (Definizione 7.21), cioè, con la funzione

$$U(a) = u(x_n) + \sum_{i=1}^{n-1} (u(x_i) - u(x_{i+1}))\ \nu(\cup_{h=1}^{i} E_h)$$

per ogni atto $a \in A$ con $a = (x_i , E_i)_{i=1}^{n}$ e $x_i > x_{i+1}$, per ogni $i = 1 ,\ldots, n-1$, allora, l'agente è avverso all'incertezza se e solo se $core(\nu) \neq \varnothing$, è propenso all'incertezza se e solo se $core(\overline{\nu}) \neq \varnothing$ ed è neutrale all'incertezza se e solo se la capacità è una probabilità.

Dimostrazione. Se $core(\nu) \neq \varnothing$, allora, per ogni $p \in core(\nu)$ e per ogni atto $a \in A$, si ha $U(a) = u(x_n) + \sum_{i=1}^{n-1} (u(x_i) - u(x_{i+1}))\ \nu(\cup_{h=1}^{i} E_h) \leq u(x_n) + \sum_{i=1}^{n-1} (u(x_i) - u(x_{i+1}))\ p(\cup_{h=1}^{i} E_h) = U(a, p)$, ossia, $CE(a) \leq CE(a, p)$. Se $core(\nu) = \varnothing$, allora, per ogni $p \in P(S)$, vi è almeno un evento E per cui risulta $\nu(E) > p(E)$. Prendendo in considerazione un atto $a = (x_1, E\ ;\ x_2, S \backslash E)$, con $x_1 > x_2$, risulta, allora, $U(a) = u(x_2) + (u(x_1) - u(x_2))\ \nu(E) > u(x_2) + (u(x_1) - u(x_2))\ p(E) = U(a, p)$, ossia, $CE(a) > CE(a, p)$, per cui si ha che la condizione $core(\nu) \neq \varnothing$, non solo è sufficiente, ma è anche necessaria per l'avversione all'incertezza. Analogamente, per la propensione all'incertezza. La condizione per la neutralità all'incertezza deriva dal fatto che le due condizioni $core(\nu) \neq \varnothing$ e $core(\overline{\nu}) \neq \varnothing$ implicano che la capacità è una probabilità. □

Proposizione 7.23 Se il sistema di preferenza $\langle A, \succsim \rangle$ è rappresentabile con l'utilità attesa di Choquet, allora l'agente è avverso alla crescita dell'incertezza se e solo se la capacità è convessa, è propenso alla crescita dell'incertezza se e solo se la capacità è concava ed è neutrale alla crescita dell'incertezza se e solo se la capacità è una probabilità.

Dimostrazione. Si considerino una qualsiasi coppia di atti $a_a , a_b \in A$, con $a_a = (x_a(s_i))_{i=1}^{m}$ e $a_b = (x_b(s_i))_{i=1}^{m}$, e una qualsiasi loro mistura probabilistica $\lambda a_a \oplus (1-\lambda) a_b = (\ell(s_i))_{i=1}^{m}$, con $\ell(s_i) = (x_a(s_i), \lambda\ ;\ x_b(s_i), (1-\lambda))$ per ogni $i = 1,\ldots, m$, ove $\lambda \in [0, 1]$. Sia $M = \{1, 2,\ldots, m\}$ l'insieme degli indici degli stati di natura, e π_a , π_b e π le tre permutazioni (definite, perciò, da funzioni $\pi: M \to M$, con $\pi(i) \neq \pi(i')$ se $i \neq i'$) che rendono rispettivamente soddisfatte le disuguaglianze $x_a(s_{\pi_a(i)}) \geq x_a(s_{\pi_a(i+1)})$, $x_b(s_{\pi_b(i)}) \geq x_b(s_{\pi_b(i+1)})$ e $\ell(s_{\pi(i)}) \succsim \ell(s_{\pi(i+1)})$ per ogni $i = 1,\ldots, m-1$. Queste funzioni di permutazione determinano anche le funzioni $\varphi_a , \varphi_b: M \to M$ con $\varphi_a(i) = \pi^{-1}(\pi_a(i))$ e $\varphi_b(i) = \pi^{-1}(\pi_b(i))$ per ogni $i = 1,\ldots, m$. Essendo il sistema di preferenza rappresentabile con l'utilità attesa di Choquet, vi sono, per gli atti a_a , a_b e $\lambda a_a \oplus (1-\lambda) a_b$ le utilità attese

$$U(a_a) = u(\, x_a(s_{\pi_a(m)})\,) + \sum_{i=1}^{m-1} (\, u(\, x_a(s_{\pi_a(i)})\,) - u(\, x_a(s_{\pi_a(i+1)})\,))\ \nu(\cup_{h=1}^{i} s_{\pi_a(h)})$$

$$U(a_b) = u(\, x_b(s_{\pi_b(m)})\,) + \sum_{i=1}^{m-1} (\, u(\, x_b(s_{\pi_b(i)})\,) - u(\, x_b(s_{\pi_b(i+1)})\,))\ \nu(\cup_{h=1}^{i} s_{\pi_b(h)})$$

e

$$U(\lambda a_a \oplus (1-\lambda) a_b) = \lambda\ V(a_a) + (1-\lambda)\ V(a_b)$$

ove

$$V(a_a) = u(\, x_a(s_{\pi(m)})\,) + \sum_{i=1}^{m-1} (\, u(\, x_a(s_{\pi(i)})\,) - u(\, x_a(s_{\pi(i+1)})\,))\ \nu(\cup_{h=1}^{i} s_{\pi(h)})$$

$$V(a_b) = u(\, x_b(s_{\pi(m)})\,) + \sum_{i=1}^{m-1} (\, u(\, x_b(s_{\pi(i)})\,) - u(\, x_b(s_{\pi(i+1)})\,))\ \nu(\cup_{h=1}^{i} s_{\pi(h)})$$

ovvero $V(a_a) = \sum_{j=1}^{m} u(x_a(s_{\pi(j)}))\ (\nu(\cup_{h=1}^{j} s_{\pi(h)}) - \nu(\cup_{h=1}^{j-1} s_{\pi(h)}))$, ponendo $\nu(\cup_{h=1}^{0} s_{\pi(h)}) = 0$, e, analogamente per $V(a_b)$. Tenendo conto della permutazione π_a e di quella composta φ_a (per cui $\pi(j) = \pi_a(i)$ richiede $j = \varphi_a(i)$), si ha , allora,

$$V(a_a) = \sum_{i=1}^{m} u(x_a(s_{\pi_a(i)}))\,(\nu(\cup_{h=1}^{\varphi_a(i)} s_{\pi(h)}) - \nu(\cup_{h=1}^{\varphi_a(i)-1} s_{\pi(h)}))$$

e, quindi,

$$V(a_a) = \sum_{i=1}^{m-1} (u(x_a(s_{\pi_a(i)})) - u(x_a(s_{\pi_a(i+1)})))\sum_{j=1}^{i}(\nu(\cup_{h=1}^{\varphi_a(j)} s_{\pi(h)}) - \nu(\cup_{h=1}^{\varphi_a(j)-1} s_{\pi(h)})) +$$
$$+ u(x_a(s_{\pi_a(m)}))\sum_{j=1}^{m}(\nu(\cup_{h=1}^{\varphi_a(j)} s_{\pi(h)}) - \nu(\cup_{h=1}^{\varphi_a(j)-1} s_{\pi(h)}))$$

Allora, tenendo conto che $\sum_{j=1}^{m}(\nu(\cup_{h=1}^{\varphi_a(j)} s_{\pi(h)}) - \nu(\cup_{h=1}^{\varphi_a(j)-1} s_{\pi(h)})) = 1$ (essendovi necessariamente sia un j per cui $\varphi_a(j) = m$, cosicché $\cup_{h=1}^{m} s_{\pi(h)} = S$, sia, per ogni j , un j' per cui $\varphi_a(j) = \varphi_a(j') - 1$), si ha

$$V(a_a) - U(a_a) = \sum_{i=1}^{m-1} (u(x_a(s_{\pi_a(i)})) - u(x_a(s_{\pi_a(i+1)}))) \times$$
$$(\sum_{j=1}^{i} \nu(\cup_{h=1}^{\varphi_a(j)} s_{\pi(h)}) - \sum_{j=1}^{i} \nu(\cup_{h=1}^{\varphi_a(j)-1} s_{\pi(h)}) - \nu(\cup_{j=1}^{i} s_{\pi_a(j)}))$$

Sia, per ogni $i = 1,\ldots, m-1$, j_i^* l'indice per cui $\varphi_a(j_i^*) = \max\{\varphi_a(1),\ldots, \varphi_a(i)\}$. Allora, essendo $s_{\pi_a(j)} = s_{\pi(\varphi_a(j))} \in \cup_{h=1}^{\varphi_a(j)} s_{\pi(h)}$ per ogni $j = 1,\ldots, i$ e $\cup_{h=1}^{\varphi_a(j)} s_{\pi(h)} \subseteq \cup_{h=1}^{\varphi_a(j_i^*)} s_{\pi(h)}$, si ha $\cup_{j=1}^{i} s_{\pi_a(j)} \subseteq \cup_{h=1}^{\varphi_a(j_i^*)} s_{\pi(h)}$. Conseguentemente, essendo $\cup_{h=1}^{\varphi_a(j_i^*)-1} s_{\pi(h)} = (\cup_{h=1}^{\varphi_a(j_i^*)} s_{\pi(h)}) \setminus s_{\pi(\varphi_a(j_i^*)}$ e $s_{\pi(\varphi_a(j_i^*)} = s_{\pi_a(j_i^*)} \in \cup_{j=1}^{i} s_{\pi_a(j)}$, risulta, se la capacità è convessa, per ogni $i = 1,\ldots, m-1$,

$$\nu(\cup_{h=1}^{\varphi_a(j_i^*)-1} s_{\pi(h)}) + \nu(\cup_{j=1}^{i} s_{\pi_a(j)}) \le \nu(\cup_{h=1}^{\varphi_a(j_i^*)} s_{\pi(h)})$$

e, inoltre, $\nu(\cup_{h=1}^{\varphi_a(j)-1} s_{\pi(h)}) \le \nu(\cup_{h=1}^{\varphi_a(j)} s_{\pi(h)})$ per ogni $j = 1,\ldots, i$. Si ha, perciò, se la capacità è convessa, $V(a_a) - U(a_a) \ge 0$ e, con una dimostrazione del tutto analoga, $V(a_b) - U(a_b) \ge 0$, per cui

$$U(\lambda a_a \oplus (1-\lambda) a_b) = \lambda\, V(a_a) + (1-\lambda)\, V(a_b) \ge \lambda\, U(a_a) + (1-\lambda)\, U(a_b) \ge \min\{U(a_a), U(a_b)\}$$

risultando così dimostrata la condizione sufficiente.

Se la capacità non è convessa, allora esiste una coppia di eventi $E, E' \in 2^S$, per cui $\nu(E) + \nu(E') > \nu(E \cup E') + \nu(E \cap E')$. Gli eventi $E, E' \in 2^S$ definiscono la partizione di S costituita dai quattro eventi $E_1 = E \cap E'$, $E_2 = E \setminus (E \cap E')$, $E_3 = E' \setminus (E \cap E')$ e $E_4 = S \setminus (E \cup E')$. La condizione $\nu(E) + \nu(E') > \nu(E \cup E') + \nu(E \cap E')$ è equivalente alla condizione $\nu(E_1 \cup E_2) + \nu(E_1 \cup E_3) > \nu(E_1 \cup E_2 \cup E_3) + \nu(E_1)$. Sia $\nu(E_1 \cup E_2) \ge \nu(E_1 \cup E_3)$ (se è $\nu(E_1 \cup E_2) < \nu(E_1 \cup E_3)$ basta porre E_2 al posto di E_3 , e viceversa, per ottenere $\nu(E_1 \cup E_2) > \nu(E_1 \cup E_3)$) . Si introducano gli atti $a_a = (x_1', E_1 \cup E_2 ; x_2, E_3 \cup E_4)$ e $a_b = (x_1, E_1 \cup E_3 ; x_2, E_2 \cup E_4)$, ove gli esiti $x_1, x_1', x_2 \in X$, con $x_1 \ge x_1' > x_2$, soddisfano la condizione $u(x_1') = \beta\, u(x_1) + (1-\beta)\, u(x_2)$, con $\beta = \nu(E_1 \cup E_3) / \nu(E_1 \cup E_2)$, cosicché $U(a_a) = U(a_b)$. Si consideri la mistura probabilistica $\lambda a_a \oplus (1-\lambda) a_b$ con $\lambda = 1/(1+\beta)$ cosicché le lotterie $(x_1', \lambda ; x_2, 1-\lambda)$ e $(x_2, \lambda ; x_1, 1-\lambda)$ risultano avere la stessa utilità attesa. Quindi, la mistura $\lambda a_a \oplus (1-\lambda) a_b = ((x_1', \lambda ; x_1, 1-\lambda), E_1 ; (x_1', \lambda ; x_2, 1-\lambda), E_2 ; (x_2, \lambda ; x_1, 1-\lambda), E_3 ; x_2, E_4)$ ha utilità attesa

$$U(\lambda a_a \oplus (1-\lambda) a_b) = u(x_2) + (1-\lambda)\,(u(x_1) - u(x_2))\,(\nu(E_1) + \nu(E_1 \cup E_2 \cup E_3))$$

Perciò,

$$U(\lambda a_a \oplus (1-\lambda) a_b) - U(a_b) = (u(x_1) - u(x_2))\,((1-\lambda)\,(\nu(E_1) + \nu(E_1 \cup E_2 \cup E_3)) - \nu(E_1 \cup E_3))$$

Allora, essendo $\lambda = 1/(1+\beta)$ e $\beta = \nu(E_1 \cup E_3) / \nu(E_1 \cup E_2)$, è anche

$$(1-\lambda)(\nu(E_1) + \nu(E_1 \cup E_2 \cup E_3)) - \nu(E_1 \cup E_3) = (1-\lambda)(\nu(E_1) + \nu(E_1 \cup E_2 \cup E_3) - \nu(E_1 \cup E_2) - \nu(E_1 \cup E_3))$$

per cui, la disuguaglianza $\nu(E_1 \cup E_2) + \nu(E_1 \cup E_3) > \nu(E_1 \cup E_2 \cup E_3) + \nu(E_1)$ implica $U(\lambda a_a \oplus (1-\lambda) a_b) < U(a_b) = U(a_a)$. Quindi, se la capacità non è convessa, l'agente non risulta avverso alla crescita dell'incertezza.

La dimostrazione che la concavità della capacità è condizione necessaria e sufficiente perché l'agente sia propenso all'incertezza è del tutto analoga. La condizione necessaria e sufficiente per la neutralità all'incertezza discende, poi, immediatamente, dalle condizioni precedenti per l'avversione e la propensione all'incertezza. □

La proprietà (Shapley, 1971) già indicata secondo cui, se la capacità è convessa (concava), allora il suo *core* (il *core* della sua capacità duale) è non vuoto implica, atttraverso le Proposizioni 7.22 e 7.23, che se il sistema di preferenza $\langle A, \succsim \rangle$ è rappresentabile con l'utilità attesa di Choquet e l'agente è avverso (propenso) alla crescita dell'incertezza, allora è anche avverso (propenso) all'incertezza. Si noti come questa proprietà sia analoga a quella individuata nel Paragrafo 7.6 per un sistema di preferenza sulle lotterie rappresentabile con l'utilità attesa dipendente dalla posizione degli esiti. Ivi, l'avversione al rischio del primo ordine è equivalente alla condizione $\varphi(p) \leq p$ per la funzione di distorsione della probabilità (Proposizione 7.14) e l'avversione alla crescita del rischio (introdotta con misture di probabilità) è equivalente alla condizione che $\varphi(p)$ sia convessa (Proposizione 7.14), per cui l'avversione alla crescita del rischio implica l'avversione al rischio del primo ordine.

7.13 L'evoluzione dell'analisi della scelta in condizioni di incertezza

La storia dell'analisi della scelta in condizioni di incertezza si può far iniziare con il contributo di David Bernoulli (1738), già ricordato (nella nota 1 di questo capitolo), che suggerì di considerare l'utilità attesa delle lotterie, invece che il loro valore atteso, per determinarne la scelta. Dopo questo contributo, non vi è stato un avanzamento analitico sostanziale fino a von Neumann e Morgenstern (1944), che introdussero la teoria dell'utilità attesa su base assiomatica (grosso modo, come nella Proposizione 7.2). Peraltro, questa introduzione era orientata all'applicazione dell'utilità attesa nella teoria dei giochi, piuttosto che come fondamento della teoria delle decisioni. Precedentemente al loro contributo, vi era stato un notevole progresso nell'analisi della probabilità, con discussioni rilevanti sulla nozione di questa: oggettiva o classica (la probabilità di un evento è pari al rapporto tra il numero dei casi favorevoli e quello dei casi possibili equiprobabili), frequentista (la probabilità di un evento è il limite della frequenza osservata della sua realizzazione al crescere del numero dei casi osservati), soggettiva (la probabilità di un evento è desunta dalla disponibilità a scommettere sulla realizzazione dell'evento) e assiomatica (la probabilità è quell'entità matematica che caratterizza le variabili aleatorie). Tuttavia, la nozione soggettivista della probabilità, in particolare nelle presentazioni di Ramsey (1931) e de Finetti (1937), implica la scelta: presuppone, cioè, il criterio di scelta in condizioni di incertezza (che è, nella visione di de Finetti, quello dell'utilità attesa). Tratta proprio il problema della scelta con probabilità soggettive il successivo contributo di Savage (1954). Mentre il contributo di von Neumann e Morgenstern riguarda le lotterie (cioè, la scelta associata al sistema di preferenza $\langle \mathcal{L}, \succsim \rangle$, indicato nel Paragrafo 7.2), quello di Savage

concerne gli atti (cioè, la scelta associata al sistema di preferenza $\langle A, \succsim \rangle$, indicato nel Paragrafo 7.11).

Contributi notevoli, nel paradigma della teoria dell'utilità attesa, sono stati apportati da Marschak (1950), Samuelson (1952), Luce e Raiffa (1957), Pratt (1964), Rothschild e Stiglitz (1970), Arrow (1971), Fishburn (1982) e Drèze (1987).

Le teorie dell'utilità attesa di von Neumann e Morgenstern e di Savage costituiscono ancora oggi il paradigma dominante, sia analitico, sia applicativo, della scelta in condizioni di incertezza. Anche se le indagini sperimentali[12] e le teorie successive ne hanno scosso la valenza positiva (ossia, la capacità di descrizione della realtà), non ne è, tuttavia, rimasta infirmata la valenza normativa (ossia, si continua a ritenere razionale il comportamento determinato dalla massimizzazione dell'utilità attesa).

Il primo critico della teoria dell'utilità attesa è stato probabilmente Allais (1953), nel contesto delle preferenze su lotterie, cioè, della teoria di von Neumann e Morgenstern. La critica alla teoria di Savage, cioè, alla teoria dell'utilità attesa nel contesto delle preferenze su atti, in particolare alla descrizione di queste con l'impiego di probabilità soggettive additive, ha trovato nel paradosso di Ellsberg (1961) l'argomento più valido (sebbene non fossero mancate, precedentemente, argomentazioni contrarie all'impiego di semplici distribuzioni di probabilità per descrivere l'incertezza, ad esempio, ad opera di Keynes, 1921, e Schackle, 1949).

Tuttavia, è stato soltanto verso il 1980 che teorie alternative alla teoria dell'utilità attesa hanno cominciato ad essere proposte (anche con l'attiva partecipazione di studiosi di discipline diverse dal tradizionale ambito economico-statistico-matematico, come filosofi e psicologi). La teoria della scelta in condizioni di incertezza ha assunto da allora caratteristiche molto diverse che in precedenza. Tra i contributi principali in questo periodo: Kahneman e Tversky (1979), Machina (1982, 1987), Quiggin (1982), Karni (1985), Hammond (1988), Yaari (1987), Gilboa (1987), Schmeidler (1989). E' tuttora un settore di ricerca in grande sviluppo (tra gli autori più attivi, non ancora citati, Chateauneuf, 1988, Segal, 1990, Wakker, 1994, Epstein, 2001), con interessanti prospettive di applicazioni (tra cui Dow e Werlang, 1992, Epstein e Wang, 1994, e Chambers e Quiggin, 2000), però ancora poco sviluppate.

[17] La scelta in condizioni di incertezza è uno degli oggetti principali dell'*economia sperimentale*. In questi studi vengono osservate le scelte compiute da soggetti in situazioni controllate dal ricercatore, allo scopo di sottoporre a verifica ipotesi sul loro sistema di preferenza. Al riguardo, ad esempio, Hey (1991).