

Cap. 5 LA SCELTA DI PRODUZIONE

Produzione è trasformazione di beni in altri beni. Avendo definito (all'inizio del Cap. 3) i beni relativamente alle loro caratteristiche qualitative che includono il luogo e il tempo in cui sono disponibili, è produzione anche il trasporto e la stessa conservazione dei beni. La trasformazione produttiva richiede, in generale, che alcuni beni vengano consumati (*input*) ed altri vengano ottenuti (*output*). La scelta di produzione (o del piano di produzione) ha per oggetto le quantità degli input e degli output.

La scelta di produzione viene compiuta da agenti che vengono, spesso, denominati imprese. (In tal caso, tuttavia, gli aspetti organizzativi e istituzionali relativi alle imprese vengono omessi del tutto nell'analisi della scelta di produzione). Si richiede soltanto che l'atto di produzione (come già quello di consumo) sia una scelta, sia, cioè, interpretabile in base ad un sistema di preferenza, che viene normalmente precisato (per le ragioni indicate nel paragrafo 5.2) come massimizzazione del profitto d'impresa.

Non tutte le trasformazioni produttive sono possibili, nel senso che l'agente, mentre sa e può trasformare certi input in certi output, non sa o può compiere altre trasformazioni. Alcune di queste altre trasformazioni potrebbero diventare possibili (cioè, eseguibili) con l'accrescimento delle conoscenze tecniche, cioè, con il progredire della tecnologia. L'insieme di tutte le trasformazioni eseguibili dall'agente in esame è denominato *insieme di produzione*. L'agente di produzione sceglie fra esse quella che preferisce: l'agente, se massimizza il profitto, sceglie un piano di produzione che massimizza il profitto.

L'analisi della scelta di produzione non include la descrizione del processo di produzione, cioè, della sequenza di operazioni che vengono compiute per ottenere da certi input certi output. (L'analisi del processo di produzione è ritenuta compito di un'altra scienza: l'ingegneria). Sotto questo aspetto, la tecnologia rappresentata dall'insieme di produzione è una specie di scatola nera, nel senso che viene indicato ciò che può entrare e uscire dalla scatola, ma non ciò che avviene all'interno. L'analisi della scelta di produzione descrive, invece, la determinazione delle quantità degli input e degli output e della loro dipendenza dalle condizioni in cui opera l'agente (ad esempio, dai prezzi, se l'agente è *price-taker*).

Adottando la convenzione di descrivere con numeri positivi gli output e con numeri negativi gli input, se k è il numero di beni presenti nell'economia, un *piano di produzione* (o *vettore di produzione*, o

produzione) è rappresentato da un vettore $y = (y_1, \dots, y_k) \in \mathbb{R}^k$. Ad esempio, con $k = 6$, il vettore di produzione $y = (0, 2, -1, -2, 0, 4)$ indica che vengono prodotte 2 unità del secondo bene e 4 unità del sesto impiegando 1 unità del terzo bene e 2 unità del quarto, mentre il primo e il quinto bene non sono né input, né output.

Con questa convenzione, il profitto d'impresa $\pi \in \mathbb{R}$, che è la differenza tra il valore degli output e quello degli input, è

$$\pi = p \cdot y$$

ove $p \in \mathbb{R}_+^k$ è il vettore dei prezzi dei beni. Si noti come il profitto appena definito includa, in genere, ricavi e costi riferiti a beni disponibili in tempi e in stati di natura diversi (poiché i beni sono definiti anche in relazione al tempo e allo stato di natura in cui sono disponibili), rappresenti, cioè, il valore dell'impresa e non il reddito d'impresa di un periodo di tempo (a meno che le due grandezze, per particolari ipotesi, non coincidano tra loro).

5.1 L'insieme di produzione

L'insieme di produzione $Y \subset \mathbb{R}^k$ riunisce tutti i vettori di produzione eseguibili, ossia, ogni $y \in Y$ è una produzione eseguibile, mentre ogni $y \notin Y$ è impossibile (perché la tecnologia non lo consente, o per ragioni legali, o per impegni dell'agente di produzione).

Vengono indicate di seguito le proprietà che vengono di volta in volta richieste all'insieme di produzione nelle analisi successive. Alcune di queste vengono poi descritte in diagrammi per il caso $k = 2$. (Le prime 3 proprietà, quelle indicate nei punti da *a* a *c*, verranno, nel seguito, sempre accettate).

a) $Y \neq \emptyset$, ossia l'insieme di produzione è *non vuoto*. (Senza questa proprietà non vi è ragione di studiare la scelta di produzione).

b) Y è un insieme *chiuso*, ossia, se la successione $\{y^s\}_{s=1}^\infty$ è contenuta in Y e $y = \lim_{s \rightarrow \infty} y^s$, allora $y \in Y$.

c) $Y \cap (\mathbb{R}_+^k \setminus \{0\}) = \emptyset$, ossia, l'insieme di produzione *non contiene vettori semipositivi*. Altrimenti sarebbe possibile avere output senza input.

d) $Y - \mathbb{R}_+^k \subset Y$, ossia, se $y' \leq y$ e $y \in Y$, allora $y' \in Y$. Questa ipotesi significa che è possibile sprecare beni e viene denominata *free disposal*.

e) $0 \in Y$, ossia, *l'inazione è possibile*. Le ipotesi *d)* e *e)* implicano $-\mathbb{R}_+^k \subset Y$, cioè che è possibile avere qualsiasi produzione senza output. La proprietà *e)* non si verifica se l'agente si è già impegnato ad impiegare qualche input, per cui non è più possibile che la loro quantità sia pari a zero: il costo di questi input viene indicato come *sunk cost*.

f) $Y \cap (-Y) \in \{\{0\}, \emptyset\}$, ossia, se $y \in Y$, allora $y = 0$ oppure $-y \notin Y$. Questa proprietà (*irreversibilità*) significa che non è possibile invertire la produzione, nel senso che se è possibile produrre gli output y_o (y_o è il vettore composto dagli elementi positivi di y) con gli input y_i (y_i è il vettore composto dagli elementi negativi di y), allora non è possibile la produzione inversa, cioè, produrre gli output $-y_i$ con gli input $-y_o$.

g) Y è un insieme *convesso*, ossia, se $y, y' \in Y$ e $y'' = \lambda y + (1-\lambda)y'$ con $\lambda \in [0, 1]$, allora $y'' \in Y$. Talvolta si richiede che l'insieme Y sia *strettamente convesso*, ossia che sia punto interno di Y ogni $y'' = \lambda y + (1-\lambda)y'$ con $\lambda \in (0, 1)$, $y, y' \in Y$ e $y \neq y'$ (un punto è interno se possiede un intorno i cui punti appartengono tutti all'insieme).

h) Y presenta *rendimenti di scala non crescenti*, ossia, se $y \in Y$ e $\lambda \in [0, 1]$, allora $\lambda y \in Y$. In altri termini, è possibile ridurre la scala di produzione. Si noti come questa proprietà implichi la possibilità di inazione e, per contro, come la possibilità di inazione e la convessità implichino i rendimenti di scala non crescenti. Y presenta *rendimenti di scala decrescenti* se $\lambda y \in Y$ per ogni $y \in Y$ e $\lambda \in (0, 1)$. La possibilità di inazione e la stretta convessità implicano i rendimenti di scala decrescenti.

i) Y presenta *rendimenti di scala non decrescenti*, ossia, se $y \in Y$ e $\lambda \geq 1$, allora $\lambda y \in Y$. Cioè, è possibile accrescere la scala di produzione.

l) Y presenta *rendimenti di scala costanti*, ossia, valgono entrambe le proprietà precedenti, per cui se $y \in Y$ e $\lambda \geq 0$, allora $\lambda y \in Y$ (questa proprietà significa che l'insieme Y è un cono).

Nella Figura 5.1 è descritto un insieme di produzione che soddisfa tutte le proprietà indicate (nell'esempio descritto nella figura, il primo bene è un input ed il secondo un output). L'insieme di produzione rappresentato nella Figura 5.2 non soddisfa, invece, la proprietà c, che richiede non potersi avere un output positivo senza impiego di input, e la proprietà i (cioè, non presenta rendimenti di scala non decrescenti, mentre presenta rendimenti di scala non crescenti).

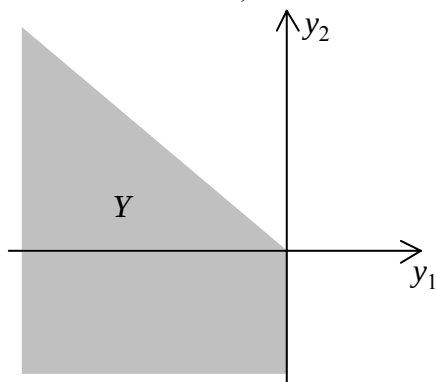


Figura 5.1

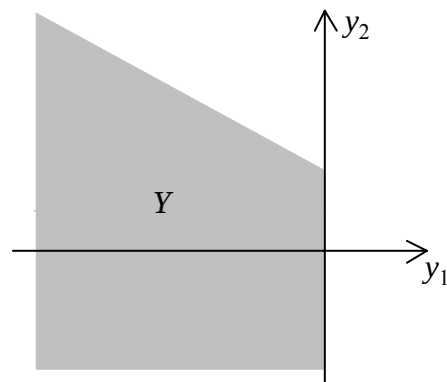


Figura 5.2

L'insieme di produzione rappresentato nella Figura 5.3 non soddisfa la proprietà *d*, non consente, cioè, il *free disposal*. Nella Figura 5.4 è rappresentato un insieme di produzione che non consente l'inazione, non soddisfa, cioè, la proprietà *e*, e, conseguentemente, neppure la proprietà *h* (non presenta, cioè, rendimenti di scala non crescenti).

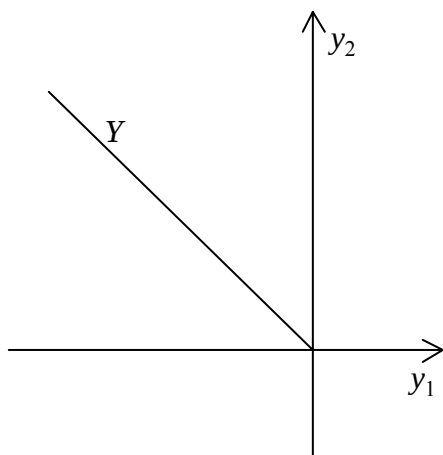


Figura 5.3

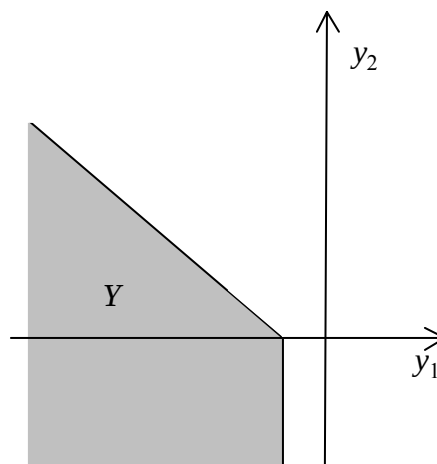


Figura 5.4

Nella Figura 5.5 è rappresentato un insieme di produzione che non presenta la proprietà *f* di irreversibilità della produzione. L'insieme di produzione nella Figura 5.6 presenta rendimenti di scala non crescenti, ma non rendimenti di scala non decrescenti (e, quindi, neppure rendimenti di scala costanti).

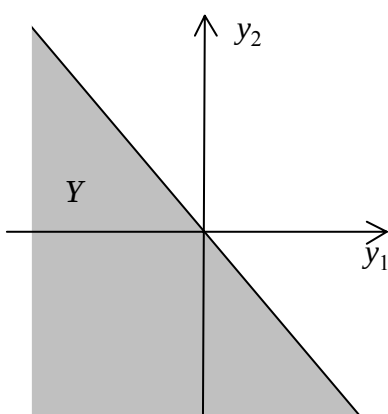


Figura 5.5

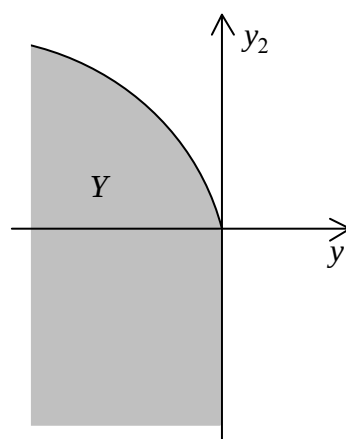


Figura 5.6

La Figura 5.7 rappresenta un insieme di produzione con rendimenti di scala non decrescenti (e senza rendimenti di scala non crescenti: quindi, non

soddisfa le proprietà h e l). L'insieme di produzione rappresentato nella Figura 5.8 non soddisfa nessuna delle tre proprietà h , i e l (tuttavia, presenta rendimenti di scala non decrescenti quando la scala di produzione è piccola e rendimenti di scala non crescenti quando la scala di produzione è grande¹).

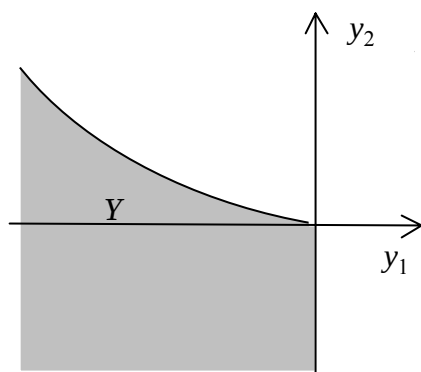


Figura 5.7

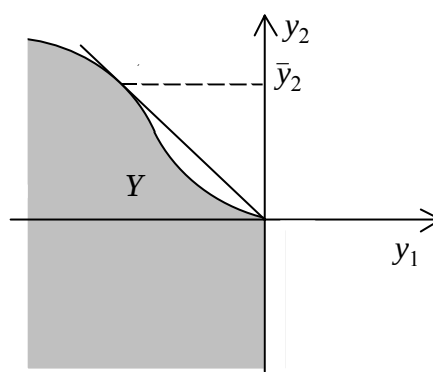


Figura 5.8

Un insieme di produzione (non vuoto e chiuso) può essere rappresentato da una disuguaglianza del tipo $F(y) \leq 0$: ossia, $y \in Y$ se e solo se $F(y) \leq 0$. (Ad esempio, l'insieme di produzione nella Figura 5.1 è rappresentato da una disuguaglianza del tipo $y_1 + \max\{0, y_2\} \leq 0$.)² Ne consegue che l'equazione $F(y) = 0$ descrive la frontiera dell'insieme Y . La funzione $F(y)$ è denominata *funzione di trasformazione*.

Se la funzione $F(y)$ è differenziabile, allora i rapporti $\frac{\partial F(y)}{\partial y_j} / \frac{\partial F(y)}{\partial y_h}$, quando non sono indeterminati, indicano, per ogni y per cui $F(y) = 0$ e per ogni coppia di beni, il saggio marginale di trasformazione, cioè, con segno cambiato, il rapporto tra la variazione del bene h -esimo e quella del bene j -esimo nel punto y della frontiera di Y . Più propriamente, se i due beni sono entrambi input, si ha un *saggio marginale di sostituzione tecnica*; se sono entrambi output, un *saggio marginale di trasformazione*; e, se il bene h -esimo è un output e quello j -esimo un input, una *produttività marginale*.

¹ La scala di produzione è piccola per $y_2 \leq \bar{y}_2$: si può osservare come, da un lato, $y \in Y$ e $\lambda \geq 1$ implicano $\lambda y \in Y$ se $\lambda y_2 \leq \bar{y}_2$ e come, dall'altro lato, $y \in Y$ e $\lambda \in [0, 1]$ implicano $\lambda y \in Y$ se $\lambda y_2 \geq \bar{y}_2$.

² L'insieme della Figura 5.2 da $y_1 + \max\{0, y_2 - 1\} \leq 0$; quello della Figura 5.3 da $((y_2)^{1/2} - ((-y_1)^{1/2}))^2 \leq 0$; della Figura 5.4 da $y_1 + 1 + \max\{0, y_2\} \leq 0$; della Figura 5.5 da $y_1 + y_2 \leq 0$; della Figura 5.6 da $y_2 - (-y_1)^{1/2} \leq 0$; della Figura 5.7 da $y_1 + (\max\{0, y_2\})^{1/2} \leq 0$; e quello della Figura 5.8 da $y_1 + (\max\{0, y_2\})^{1/2} + (\max\{0, y_2\})^2 \leq 0$.

Si noti come, per l'ipotesi di *free disposal*, tutte le derivate $\frac{\partial F(y)}{\partial y_j}$ siano non negative, per cui i saggi marginali di sostituzione, quelli di trasformazione e le produttività marginali risultano essere non negativi.

Conviene, spesso, specialmente quando vi è un solo output o un solo input, rappresentare con numeri positivi sia gli output che gli input (anziché, come fatto finora, con numeri positivi gli output e con numeri negativi gli input). A questo scopo, è sufficiente sostituire, nel vettore y , gli elementi negativi (che rappresentano gli input) con i loro opposti: cioè, se $y_j < 0$, porre, al posto di y_j , $x_j = -y_j$. In questo modo, al posto del vettore y , si ha un vettore (q, x) (ove, q include i beni che sono output), la funzione di trasformazione diviene del tipo $F(q, x)$ (con $q \in \mathbb{R}_+^n$, ove n è il numero degli output, e $x \in \mathbb{R}_+^m$, ove m è il numero degli input) e l'insieme di produzione è definito dalla disequaglianza $F(q, x) \leq 0$.

Possono, allora, essere introdotti i due insiemi seguenti:

$X(q) = \{x \in \mathbb{R}_+^m : F(q, x) \leq 0\}$, che è l'insieme dei requisiti di input per la produzione degli output q ;

$Q(x) = \{q \in \mathbb{R}_+^n : F(q, x) \leq 0\}$, che è l'insieme delle possibilità di output consentite dagli input x .

L'insieme $X(q)$ è non vuoto se esiste in Y almeno un vettore y i cui elementi positivi coincidono con il vettore q . Le ipotesi che l'insieme di produzione Y sia chiuso e non contenga vettori semipositivi implicano che l'insieme $X(q)$ sia chiuso e non contenga, se $q > 0$, il vettore nullo. L'ipotesi di *free disposal* implica che l'insieme $X(q)$ sia, inoltre, inclusivo verso l'alto, cioè, se $x \in X(q)$ e $x' \geq x$, allora $x' \in X(q)$, e non crescente rispetto a q , cioè, se $q' \geq q$, allora $X(q') \subseteq X(q)$.

Le ipotesi che l'insieme di produzione Y sia chiuso e ammetta *free disposal* e la possibilità di inazione implicano che l'insieme $Q(x)$ sia non vuoto (con $0 \in Q(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}_+^m$), chiuso, inclusivo verso il basso (cioè, se $q \in Q(x)$ e $q' \leq q$, allora $q' \in Q(x)$) e non decrescente rispetto a x (cioè, se $x' \leq x$, allora $Q(x') \subseteq Q(x)$).

Quando valgono queste proprietà, le frontiere di questi insiemi, definite dalla condizione $F(q, x) = 0$, sono indicate, rispettivamente, come *isoquanto* degli output q (descrive le quantità minime di input necessarie per produrre q) e come *frontiera della produzione* consentita dagli input x (descrive le quantità massime di output producibili con gli input x). L'ipotesi di *convessità* (indicata al punto g) rende convessi gli insiemi $X(q)$ e $Q(x)$. Nelle Figure 5.9 e 5.10 sono rappresentati, rispettivamente, gli insiemi $X(q)$ e $Q(x)$, nel primo caso, con due input, e, nel secondo caso, con due output.

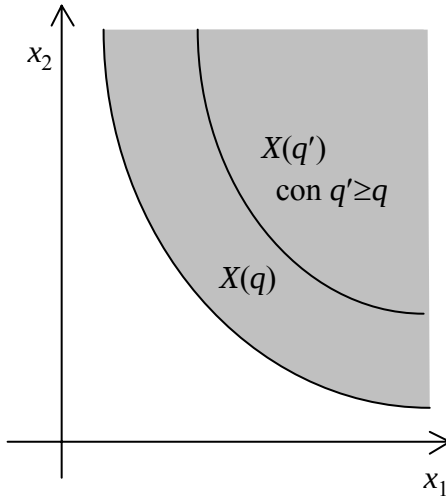


Figura 5.9

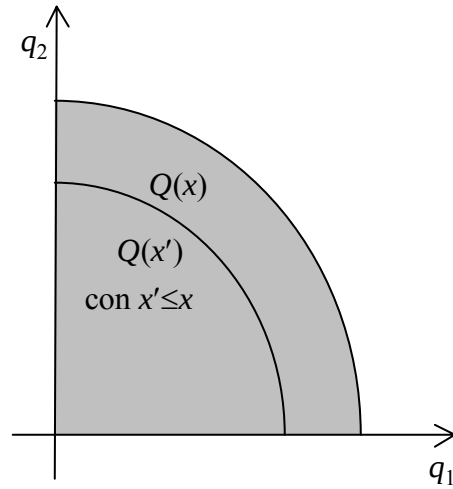


Figura 5.10

Se vi è un solo output, l'equazione $F(q, x) = 0$ può essere scritta nella forma $q = f(x)$, o, in esteso, $q = f(x_1, \dots, x_m)$, ove q indica la quantità dell'output e x_j la quantità dell'input j -esimo. Assumendo che valga l'ipotesi di *free disposal*, la funzione $f(x)$, denominata *funzione di produzione*, è non decrescente. Si ha l'insieme dei requisiti di input $X(q) = \{x \in \mathbb{R}_+^m : f(x) \geq q\}$ e la frontiera di questo insieme, cioè l'*isoquanto di produzione* q , è definita in $\mathbb{R}_+^m$ dalla equazione $f(x) = q$.

Proposizione 5.1 La funzione di produzione è (strettamente) quasi-concava se e solo se l'insieme dei requisiti di input è (strettamente) convesso ed è (strettamente) concava se e solo se l'insieme di produzione è (strettamente) convesso.

Dimostrazione. La dimostrazione della prima di queste due proprietà è abbastanza semplice se si tiene conto delle definizioni di insieme convesso (cioè, per l'insieme dei requisiti di input, se $f(x) \geq q$ e $f(x') \geq q$, allora si ha $f(x'') \geq q$ per ogni $x'' = \lambda x + (1-\lambda)x'$ con $\lambda \in [0, 1]$) e di funzione quasi-concava (cioè, $f(x'') \geq \min\{f(x), f(x')\}$ per ogni $x'' = \lambda x + (1-\lambda)x'$ con $\lambda \in [0, 1]$). (L'insieme è strettamente convesso se è, inoltre, $f(x'') > q$ per $\lambda \in (0, 1)$ e $x \neq x'$ e la funzione è strettamente quasi-concava se $f(x'') > \min\{f(x), f(x')\}$ sempre per $\lambda \in (0, 1)$ e $x \neq x'$). Infatti, da un lato, per ogni coppia $x, x' \in X(q)$ per cui $f(x) \geq q$ e $f(x') \geq q$, e, quindi, $\min\{f(x), f(x')\} \geq q$, la condizione $f(x'') \geq \min\{f(x), f(x')\}$ implica $f(x'') \geq q$, ossia, la quasi-concavità di $f(x)$ implica la convessità di $X(q)$. Dall'altro lato, la convessità di $X(q)$ e, quindi, di $X(\min\{f(x), f(x')\})$, richiede che, se $f(x) \geq \min\{f(x), f(x')\}$ e $f(x') \geq \min\{f(x), f(x')\}$, allora $f(x'') \geq \min\{f(x), f(x')\}$, ossia, la convessità di $X(q)$ implica la quasi-concavità di $f(x)$. (Analogamente, per la convessità stretta di $X(q)$ e la quasi-concavità stretta di $f(x)$).

La dimostrazione della seconda proprietà è analoga, tenendo conto delle definizioni di insieme convesso (cioè, per l'insieme di produzione, $(q'', -x'') \in Y$, cioè, $f(x'') \geq q''$, per ogni $x'' = \lambda x + (1-\lambda)x'$ e $q'' = \lambda q + (1-\lambda)q'$ con $\lambda \in [0, 1]$, se $f(x) \geq q$ e $f(x') \geq q'$) e di funzione concava (cioè, $f(x'') \geq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(x')$ per ogni $x'' = \lambda x + (1-\lambda)x'$ con $\lambda \in [0, 1]$). (L'insieme è strettamente convesso se, inoltre, $(q'', -x'')$ è punto interno di Y , cioè, è $f(x'') > q''$, per $\lambda \in (0, 1)$ e $(q, -x) \neq (q', -x')$ e la funzione è strettamente concava se è $f(x'') > \lambda f(x) + (1-\lambda)f(x')$ per $\lambda \in (0, 1)$ e $x \neq x'$). Infatti, da un lato, per $f(x) \geq q$, $f(x') \geq$

q' e, quindi, $\lambda f(x) + (1-\lambda) f(x') \geq q''$, la condizione $f(x'') \geq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(x')$ implica $f(x'') \geq q''$, ossia, la concavità di $f(x)$ implica la convessità di Y . Dall'altro lato, la convessità di Y richiede, indicando con q il valore di $f(x)$ e con q' il valore di $f(x')$, quindi, con $q'' = \lambda f(x) + (1-\lambda) f(x')$, che $f(x'') \geq q''$, cioè, $f(x'') \geq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(x')$, ossia, la convessità di Y implica la concavità di $f(x)$. (Analogamente, per la convessità stretta di Y e la concavità stretta di $f(x)$). $\square$

Se vi è un solo input, l'equazione $F(q, x) = 0$ può essere scritta nella forma $x = f(q)$. In questo caso, la funzione $f(q)$ è (strettamente) quasi-convessa se e solo se l'insieme delle possibilità di output è (strettamente) convesso ed è (strettamente) convessa se e solo se l'insieme di produzione è (strettamente) convesso.³

Nel seguito vengono indicati alcuni tipi di funzione di produzione, quelli più comunemente usati nelle applicazioni.

Funzione di produzione con input perfettamente sostituibili:

$$q = f\left(\sum_{j=1}^m a_j x_j\right)$$

ove a_j , con $j = 1, \dots, m$, sono parametri positivi e $f(\cdot)$ è una funzione monotona crescente. Gli isoquanti di produzione sono rappresentati da relazioni lineari, perciò con saggi marginali di sostituzione tecnica costanti per ogni $x \in \mathbb{R}_+^m$. Se vi è possibilità di inazione, cioè, $f(0) = 0$, i rendimenti di scala sono non crescenti (decrescenti) se la funzione $f(\cdot)$ è (strettamente) concava, non decrescenti (crescenti) se è (strettamente) convessa e costanti se è la funzione identità.

Funzione di produzione con input perfettamente complementari:

$$q = f(\min\{a_1 x_1, \dots, a_m x_m\})$$

ove a_j , con $j = 1, \dots, m$, sono parametri positivi e $f(\cdot)$ è una funzione monotona crescente. Gli isoquanti di produzione sono spigolosi (come per le analoghe curve di indifferenza indicate nel Paragrafo 3.5) e determinano insiemi dei requisiti di input convessi (in accordo con la quasi-concavità della funzione di produzione). Se vi è possibilità di inazione, i rendimenti di scala dipendono dalla funzione $f(\cdot)$ allo stesso modo che per la funzione di produzione precedente. Se $f(\cdot)$ è la funzione identità, cioè, se è

$$q = \min\{a_1 x_1, \dots, a_m x_m\}$$

allora questa funzione di produzione viene indicata come *leonteviana* (perché usata estensivamente dall'economista Leontief).

Funzione di produzione Cobb-Douglas:

$$q = \prod_{j=1}^m x_j^{a_j}$$

³ Una funzione $f(q)$ è quasi-convessa se $f(q'') \leq \max\{f(q), f(q')\}$ per ogni $q'' = \lambda q + (1-\lambda) q'$ con $\lambda \in [0, 1]$. E' convessa se $f(q'') \leq \lambda f(q) + (1-\lambda) f(q')$. La dimostrazione delle due proprietà è del tutto analoga a quella della Proposizione 5.1.

ove a_j , con $j = 1, \dots, m$, sono parametri positivi. I rendimenti di scala sono crescenti, costanti o decrescenti a seconda che $\sum_{j=1}^m a_j$ sia maggiore, uguale o inferiore ad uno. Ad esempio, la funzione di produzione Cobb-Douglas con due soli input e rendimenti di scala costanti è

$$q = x_1^a x_2^{1-a}$$

L'insieme di produzione determinato da questa funzione presenta rendimenti di scala costanti perché se un vettore (q, x_1, x_2) soddisfa la condizione $q \leq x_1^a x_2^{1-a}$, allora per ogni vettore $(\lambda q, \lambda x_1, \lambda x_2)$, con $\lambda \geq 0$, risulta $\lambda q \leq (\lambda x_1)^a (\lambda x_2)^{1-a}$. Le produttività marginali dei due input sono, rispettivamente, $MP_{x_1}(x_1, x_2) = \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} = a (x_2/x_1)^{1-a}$ e $MP_{x_2}(x_1, x_2) = \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2} = (1-a) (x_1/x_2)^a$. Il saggio marginale di sostituzione tecnica è

$$MRTS_{x_2, x_1}(x_1, x_2) = - \left(\frac{\partial x_2}{\partial x_1} \right)_{y \text{ cost}} = \frac{MP_{x_1}(x_1, x_2)}{MP_{x_2}(x_1, x_2)} = \frac{a}{1-a} \frac{x_2}{x_1}.$$

Si noti come questa funzione di produzione sia strettamente quasi-concava, determinando, perciò, insiemi dei requisiti di input strettamente convessi.

Funzione di produzione con elasticità di sostituzione costante (CES):

$$q = f\left(\sum_{j=1}^m a_j x_j^\rho\right)$$

con parametri a_j positivi, per $j = 1, \dots, m$. L'elasticità di sostituzione, definita da

$$\sigma_{x_j, x_h} = \frac{MRST_{x_j, x_h}}{x_j / x_h} \frac{1}{\frac{\partial MRST_{x_j, x_h}}{\partial (x_j / x_h)}}$$

è costante, con $\sigma_{x_j, x_h} = 1/(1-\rho)$. La funzione di produzione CES è una generalizzazione delle funzioni di produzione precedenti: per $\rho = 1$ si ha la funzione di produzione con input perfettamente sostituibili; per $\rho \rightarrow -\infty$ quella con input perfettamente complementari; e per $\rho \rightarrow 0$ la funzione Cobb-Douglas. Si hanno rendimenti di scala costanti se è $q = \left(\sum_{j=1}^m a_j x_j^\rho\right)^{1/\rho}$.

Funzione di produzione omogenea: una funzione di produzione è omogenea di grado θ se è

$$f(tx) = t^\theta f(x) \text{ per ogni } t > 0 \text{ e } x \in \mathbb{R}_+^k$$

Se è omogenea di grado uno, allora, modificando tutti gli input nella stessa proporzione (ad esempio, se vengono raddoppiati), l'output risulta modificato nella stessa proporzione (risulta anch'esso raddoppiato). Perciò, i rendimenti di scala sono costanti se la funzione è omogenea di grado uno, crescenti se è omogenea di grado maggiore di uno, e decrescenti se di grado minore di uno. Ad esempio, la funzione di produzione Cobb-Douglas $q = x_1^a x_2^{1-a}$ è omogenea di grado uno e quella $q = \prod_{j=1}^m x_j^{a_j}$ ha grado di omogeneità pari a $\sum_{j=1}^m a_j$.

Funzione di produzione omotetica: una funzione è omotetica se è una trasformazione monotona (crescente, nel contesto della teoria della produzione) di una funzione omogenea di grado uno. Ossia, se è

$$f(x) = g(h(x))$$

ove $h(\cdot)$ è una funzione omogenea di grado uno e $g(\cdot)$ è una funzione monotona. Questa proprietà implica che se si ha $f(x) = f(x')$ per una coppia $x, x' \in \mathbb{R}_+^k$, allora si ha $f(tx) = f(tx')$ per ogni $t > 0$. (Ad esempio, se i due panieri di input x e x' consentono di produrre una stessa quantità di output y , allora i due panieri $2x$ e $2x'$ consentono anch'essi di produrre una stessa quantità di output, però non necessariamente la quantità $2y$). Si noti come tutte le funzioni di produzione indicate precedentemente siano omotetiche.

5.2 Le preferenze dell'agente di produzione

Dopo aver definito l'insieme di produzione, che è l'insieme delle azioni possibili per l'agente di produzione, si tratta di introdurre il criterio di scelta dell'agente. Questo è normalmente ipotizzato consistere nella *massimizzazione del profitto*. La situazione rilevante in cui è del tutto giustificato specificare le preferenze dell'agente di produzione come massimizzazione del profitto è la seguente:

- a) l'impresa (ossia, l'agente di produzione) non ha potere di mercato, è, cioè, concorrenziale o *price-taker*;
- b) l'impresa è posseduta da uno o più agenti di consumo, a ciascuno dei quali compete una quota del profitto (la quota di ciascuno è compresa tra 0 e 1 e la somma delle quote è pari a 1), che concorre a determinare la sua capacità di spesa m (il profitto percepito da ciascun proprietario si aggiunge alla sua capacità di spesa);
- c) il criterio di scelta dell'impresa è determinato dai proprietari;
- d) ciascuno degli agenti di consumo proprietari dell'impresa ha un insieme di bilancio $B(p, m)$ non decrescente rispetto alla capacità di spesa m (cioè, $B(p, m') \supseteq B(p, m)$ se $m' \geq m$, e, quindi, $x' \succeq x$ per ogni coppia di panieri di beni x', x con $x' \in d(p, m')$ e $x \in d(p, m)$);
- e) nessuno di essi ha preferenze per azioni particolari di produzione (non preferisce, ad esempio, che si produca un bene invece che un altro).

Queste condizioni implicano che tutti i proprietari dell'impresa concordano nella massimizzazione del profitto come criterio di scelta dell'impresa, poiché qualsiasi altro criterio condurrebbe per loro a scelte di consumo che non sono preferite a quelle cui si perviene con la massimizzazione del profitto. Questa, perciò, è una specificazione corretta delle preferenze dell'agente di produzione.

E' sufficiente che una delle condizioni precedenti non sia soddisfatta perché la massimizzazione del profitto possa non risultare una specificazione ragionevole del criterio di scelta dell'agente di produzione. In alcuni casi, tuttavia, essa è una specificazione corretta, o, almeno, valida approssimativamente anche se non sono soddisfatte compiutamente quelle condizioni. E', comunque, alquanto difficile specificare il criterio di scelta dell'agente di produzione nei casi in cui esso non consiste nella massimizzazione del profitto: alternative (come la massimizzazione dei ricavi, del reddito dei *manager*, ecc.) sono proponibili, e conducono a risultati significativi solo in casi molto particolari. Né ha senso introdurre un sistema generico di preferenza per l'agente di produzione (così come è stato fatto per l'agente di scambio) a meno che l'impresa non sia individuale (cioè, l'impresa appartenga a un singolo individuo e la scelta di produzione sia effettuata da questi), perché chi decide la produzione ha, sulle azioni di produzione, preferenze che non sono logicamente indipendenti dalle sue preferenze di consumo, ma, al contrario, strettamente connesse. (In accordo con questa considerazione, in precedenza, sotto le condizioni *a-e*, la massimizzazione del profitto è stata desunta dalla convenienza dei consumatori proprietari dell'impresa).

Dalle considerazioni precedenti risulta che si può accogliere in generale la massimizzazione del profitto come specificazione del criterio di scelta dell'agente di produzione, con la disponibilità ad accettare una specificazione diversa in quei casi particolari in cui questa diversa specificazione sia logicamente più adeguata. Nel seguito di questo capitolo, il criterio di scelta dell'agente di produzione è, per ipotesi, la massimizzazione del profitto.

Conseguentemente, la scelta di produzione è determinata dalla soluzione del problema $\max_{y \in Y} p y$, ossia, l'agente di produzione sceglie, fra le produzioni possibili (rappresentate dall'insieme Y), una produzione che massimizza il profitto d'impresa π (rappresentato dal valore netto $p y$ della

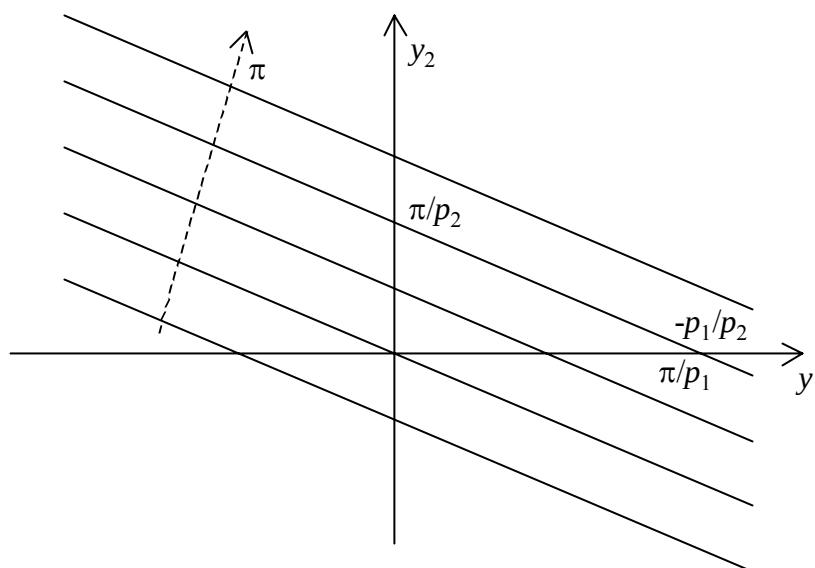


Figura 5.11

produzione). La funzione del profitto $\pi = p y$ può essere rappresentata nello spazio $\mathbb{R}^k$ dei beni, per ogni dato vettore $p \in \mathbb{R}_+^k$ di prezzi, da una mappa di rette (se $k = 2$, piani se $k = 3$, ecc.) di *isoprofitto*. Alcune di queste rette sono rappresentate nella Figura 5.11, per il caso con due beni.

Il problema $\max_{y \in Y} p y$ può essere diviso in due stadi, prendendo in considerazione separatamente gli input e gli output. Si indichi con x il vettore degli input e con q quello degli output, con p_x il vettore dei prezzi degli input e con p_q quello dei prezzi degli output, per cui $p y = p_q q - p_x x$. Si ha, allora, che

$$\max_{y \in Y} p y = \max_{q \in \mathbb{R}_+^n: X(q) \neq \emptyset} (p_q q - \min_{x \in X(q)} p_x x) = \max_{x \in \mathbb{R}_+^m} (-p_x x + \max_{q \in Q(x)} p_q q)$$

Queste equivalenze consentono di suddividere l'analisi della scelta in due stadi. Si prenda in esame la prima equivalenza (l'unica che verrà esaminata, l'altra conducendo ad una analisi del tutto simmetrica). Nel primo stadio, si considerano variabili soltanto gli input, per cui la massimizzazione del profitto implica la minimizzazione dei costi. Allora, la scelta degli input x per dati output q , con $X(q) \neq \emptyset$, risulta determinata risolvendo il problema $\min_{x \in X(q)} p_x x$, ossia, viene scelto, nell'insieme dei requisiti di input per la produzione degli output q , un paniere di costo minimo. Il costo minimo di produzione degli output q risulta essere pari a $c^*(p_x, q) = \min_{x \in X(q)} p_x x$. Nel secondo stadio, viene determinata la scelta degli output q tenendo conto del loro costo di produzione (determinato nel primo stadio), risolvendo il problema $\max_{q \in \mathbb{R}_+^n: X(q) \neq \emptyset} p_q q - c^*(p_x, q)$.

Nel seguito, verrà prima analizzata la scelta di produzione esaminando il problema generale $\max_{y \in Y} p y$ e, successivamente, il problema in due stadi

$$\min_{x \in X(q)} p_x x \text{ e } \max_{q \in \mathbb{R}_+^n: X(q) \neq \emptyset} p_q q - c^*(p_x, q).$$

5.3 La scelta di produzione determinata dalla massimizzazione del profitto

Si tratta di determinare la scelta dell'agente di produzione (o produttore, o impresa) in base al problema $\max_{y \in Y} p y$. Questo problema non ammette sempre soluzione: il teorema di Weierstrass assicura l'esistenza della soluzione se la funzione obiettivo è continua e il suo dominio è non vuoto e compatto (cioè, chiuso e limitato). Ora, la funzione obiettivo $\pi = p y$ è continua e il suo dominio, cioè, l'insieme Y , è non vuoto (per la proprietà *a* indicata nel Paragrafo 5.1), chiuso (per la proprietà *b*), ma non è necessariamente limitato. (Ad esempio, per l'insieme di produzione del tipo

rappresentato nella Figura 5.1, con $Y = \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 : y_1 + \max\{0, y_2\} \leq 0\}$,
cioè, con $y_1 \leq 0$ e $y_2 \leq -y_1$, il problema $\max_{y \in Y} p y$ non ammette soluzione
se $p_2 > p_1 > 0$. Infatti, in tal caso, il profitto è illimitato, poiché si ha, per
 $y_2 = -y_1$, $\pi = -(p_2 - p_1)y_1$. Per l'insieme di produzione rappresentato nella
Figura 5.7, con $Y = \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 : y_1 + (\max\{0, y_2\})^{1/2} \leq 0\}$, il problema
 $\max_{y \in Y} p y$ non ammette soluzione per nessun $p \in \mathbb{R}_{++}^2$. L'analisi successiva
è, allora, condizionata all'esistenza della soluzione per il problema $\max_{y \in Y} p y$
(oppure, occorre introdurre ipotesi che garantiscano l'esistenza della
soluzione per ogni $p \in \mathbb{R}_+^k$: ad esempio, l'ipotesi che l'insieme Y sia
superiormente limitato e che sia limitata la quantità massima impiegabile di
input). Si indichi con $P(Y) \subseteq \mathbb{R}_+^k$ l'insieme dei prezzi per i quali il
problema $\max_{y \in Y} p y$ ammette soluzione.

Definizione 5.1 La scelta s di produzione, per ogni dato vettore
semipositivo di prezzi $p \in P(Y)$, è il sottoinsieme di Y massimale rispetto
al profitto $\pi = p y$, cioè,

$$s(p) = \{y \in Y : p y' \leq p y \text{ per ogni } y' \in Y\}$$

ossia,

$$s(p) = \arg \max_{y \in Y} p y$$

Definizione 5.2 La corrispondenza $s: P(Y) \rightarrow Y$, definita da $s(p)$,
che associa ad ogni vettore di prezzi $p \in P(Y)$ la scelta di produzione, è
l'offerta (netta) di produzione dell'agente in esame, che indica come la sua
scelta di produzione dipenda dai prezzi. Essa è denominata *corrispondenza*
(o *funzione*, se è ad un solo valore) *di offerta*. (Si noti come essa rappresenti
propriamente l'offerta degli output e la domanda degli input. Questi ultimi,
essendo rappresentati con segno negativo, determinano una funzione
negativa di offerta, il cui opposto è la funzione di domanda degli input). Il
valore massimo di profitto definisce, per $p \in P(Y)$, la *funzione di profitto*
massimo $\pi^*: P(Y) \rightarrow \mathbb{R}$, con $\pi^*(p) = \max_{y \in Y} p y = p y^*$, ove $y^* \in s(p)$.

Proposizione 5.2 L'insieme di scelta $s(p)$, con $p \in P(Y) \subseteq \mathbb{R}_+^k$,
contiene solo punti appartenenti alla frontiera dell'insieme di produzione Y
(che è chiuso per ipotesi). Perciò, si ha $F(y) = 0$ per ogni $y \in s(p)$ (ove $F(y)$
è la funzione di trasformazione introdotta nel Paragrafo 5.1). Se, poi,
l'insieme di produzione Y è strettamente convesso, allora l'insieme $s(p)$ è
composto, per ogni $p \in P(Y)$, da un punto soltanto e le funzioni di offerta
 $s: P(Y) \rightarrow Y$ e di profitto massimo $\pi^*: P(Y) \rightarrow \mathbb{R}$ sono entrambe continue.

Se l'insieme di produzione Y è convesso, allora l'insieme $s(p)$ è convesso per ogni
 $p \in P(Y)$, la corrispondenza di offerta $s: P(Y) \rightarrow Y$ è emicontinua superiormente e la
funzione di profitto massimo $\pi^*: P(Y) \rightarrow \mathbb{R}$ è continua.

Dimostrazione. Per ogni punto y interno di Y , esiste un $\varepsilon > 0$ per cui ogni y' con $\|y' - y\| < \varepsilon$ appartiene a Y . Vi è allora un $y' \gg y$. Ne consegue, essendo p semipositivo, che per questo y' risulta $p \cdot y' > p \cdot y$. Non potendo, allora, esservi in $s(p)$ punti interni di Y , $s(p)$ deve giacere sulla frontiera di Y . La condizione $y, y' \in s(p)$ implica che $p \cdot y = p \cdot y'$. Se l'insieme Y è convesso, si ha $y'' \in Y$ per ogni $y'' = \lambda y + (1-\lambda)y'$ con $\lambda \in [0, 1]$ ed è, inoltre, $p \cdot y'' = p \cdot y = p \cdot y'$. Risulta, perciò, $y'' \in s(p)$ e, quindi, che $s(p)$ è convesso. La condizione che l'insieme $s(p)$ si riduca ad un punto se Y è strettamente convesso, è equivalente alla condizione che sia $y' \notin s(p)$ se $y' \neq y$, $y \in s(p)$ e $y' \in Y$. Se $y \in s(p)$ e $y' \in Y$, allora $p \cdot y \geq p \cdot y'$. Se fosse $p \cdot y = p \cdot y'$ e, quindi, $y' \in s(p)$, allora, essendo l'insieme Y strettamente convesso, si avrebbe per ogni $y'' = \lambda y + (1-\lambda)y'$ con $\lambda \in (0, 1)$ non solo $p \cdot y'' = p \cdot y = p \cdot y'$ e, quindi, $y'' \in s(p)$, ma anche che y'' è punto interno di Y , contrariamente all'enunciato della Proposizione 5.1. Deve, allora, essere $p \cdot y > p \cdot y'$, per cui $y \in s(p)$ e $y' \in Y$ implicano che $y' \notin s(p)$, cioè, che l'insieme $s(p)$ sia composto da un solo punto se Y è strettamente convesso. Le proprietà di continuità della corrispondenza (o funzione) di offerta e della funzione di profitto massimo derivano dal "teorema del massimo" indicato nella nota 11 del Capitolo 3. $\square$

Proposizione 5.3 La corrispondenza (e, quindi, quando lo è, la funzione) di offerta $s(p)$ è omogenea di grado zero, cioè, $s(\alpha p) = s(p)$ per ogni $\alpha > 0$. La funzione di profitto massimo è omogenea di grado uno, cioè, $\pi^*(\alpha p) = \alpha \pi^*(p)$ per ogni $\alpha > 0$. (La dimostrazione è banale: basta tenere conto che, per ogni $\alpha > 0$, $s(\alpha p) = \arg \max_{y \in Y} \alpha p \cdot y = \arg \max_{y \in Y} p \cdot y = s(p)$ e $\pi^*(\alpha p) = \alpha p \cdot y_\alpha^* = \alpha p \cdot y^* = \alpha \pi^*(p)$, ove $y_\alpha^* \in s(\alpha p)$ e $y^* \in s(p)$).

Nella produzione, con l'ipotesi che venga massimizzato il profitto, l'assioma debole delle preferenze rivelate si qualifica come *assioma debole della massimizzazione del profitto*, secondo la definizione seguente.

Definizione 5.3 L'assioma debole della massimizzazione del profitto (WAPM) richiede che la corrispondenza di offerta soddisfi la relazione:

se $y' \in s(p')$ e $p' \cdot y > p' \cdot y'$, allora $y \notin s(p)$ per ogni $p \in P(Y)$

In altre parole, se nella situazione rappresentata dai prezzi p' viene scelta la produzione y' (perché massimizza il profitto), allora, ogni produzione y che determinerebbe un profitto più elevato si rivela impossibile e non può quindi essere scelta in nessuna situazione.

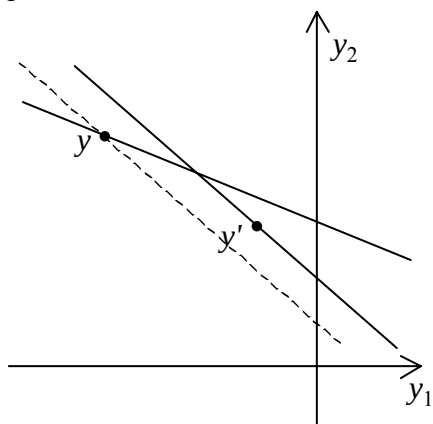


Figura 5.12

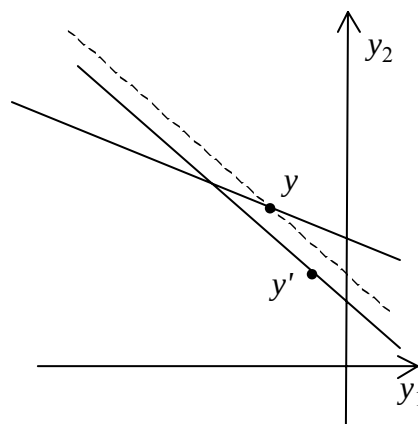


Figura 5.13

Nella Figura 5.12 sono rappresentate, nel caso con due beni, scelte che soddisfano l'assioma debole della massimizzazione del profitto, nella Figura 5.13 scelte che non lo soddisfano.

5.4 La determinazione della scelta di produzione

Si assuma $p \in P(Y)$ e che la funzione di trasformazione $F(y)$ sia differenziabile due volte con continuità (inoltre, con $DF(y) \in \mathbb{R}_+^k$ per l'ipotesi *free disposal*). Allora, la scelta di produzione è soluzione del problema di massimo vincolato

$$\max_{y \in \mathbb{R}^k} p y \quad \text{sotto il vincolo } F(y) = 0$$

ove il vincolo $F(y) = 0$ rappresenta la frontiera dell'insieme di produzione (su cui si trova necessariamente la scelta di produzione, come indicato dalla Proposizione 5.1). Introducendo la funzione lagrangiana

$$L(y, \lambda) = p y - \lambda F(y)$$

risultano le condizioni del primo ordine

$$p - \lambda^* DF(y^*) = 0 \quad - F(y^*) = 0$$

ove $DF(y^*) = \left(\frac{\partial F(y^*)}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial F(y^*)}{\partial y_k} \right)$. Queste condizioni, necessariamente

soddisfatte dai massimi locali (o relativi) sempre che il problema in esame ammetta soluzione, impongono che la scelta y^* appartenga alla frontiera dell'insieme di produzione (cioè, $F(y^*) = 0$) e che i saggi marginali di trasformazione in y^* siano uguali alle pendenze degli isoprofitto (cioè,

$$\frac{\partial F(y^*)}{\partial y_j} \bigg/ \frac{\partial F(y^*)}{\partial y_h} = \frac{p_j}{p_h} \quad \text{per ogni coppia } j, h = 1, \dots, k).$$

Le condizioni del secondo ordine concernono la forma quadratica vincolata

$$\alpha^T D^2(F(y^*)) \alpha \quad \text{sotto il vincolo } p \alpha = 0$$

ove $D^2F(y^*)$ è la matrice hessiana della funzione di trasformazione valutata in y^* (determinato dalle condizioni del primo ordine). Se la forma quadratica è definita positiva, allora y^* è un massimo locale e, se y^* è un massimo locale, allora la forma quadratica è semidefinita positiva.⁴

Le condizioni del primo e del secondo ordine sono condizione sufficiente (se $\alpha^T D^2F(y^*) \alpha > 0$) per un massimo locale, inoltre localmente unico, ma non lo sono per la determinazione della scelta di produzione, che

⁴ Il metodo di Lagrange è esposto nella nota 13 del Capitolo 3. In riferimento al problema in esame e a quella esposizione, la condizione del secondo ordine, che riguarda la forma quadratica $\alpha^T D_y^2 L(y^*, \lambda^*) \alpha$ sotto il vincolo $DF(y^*) \alpha = 0$, diviene la condizione riportata nel testo poiché $D_y^2 L(y^*, \lambda^*) = -\lambda^* D_y^2 F(y^*)$, $\lambda^* > 0$ e $DF(y^*) = \frac{1}{\lambda^*} p$.

richiede un massimo globale. Il massimo è unico, ed è, quindi un massimo globale, se l'insieme di produzione è strettamente convesso, nel qual caso la forma quadratica è definita positiva per ogni y per cui $F(y) = 0$.

La determinazione della scelta di produzione può essere seguita, se vi sono soltanto due beni, su un diagramma, come nella Figura 5.14.

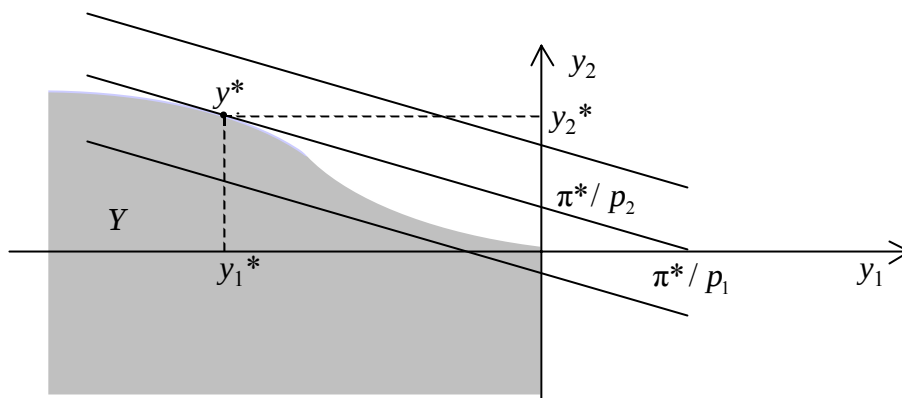


Figura 5.14

5.5 Statica comparata della scelta di produzione: l'analisi dell'offerta.

L'analisi di statica comparata della scelta di produzione studia la dipendenza della scelta dai prezzi. Se la corrispondenza di offerta $s(p)$ è una funzione differenziabile ed è, quindi, differenziabile anche la funzione di profitto massimo, è possibile determinare le derivate $D_p s(p)$ e $D_p \pi^*(p)$ delle funzioni di offerta $y^* = s(p)$ e di profitto massimo $\pi^* = p s(p)$.

Proposizione 5.6 Sia $P'(Y) \subseteq P(Y)$ l'insieme dei prezzi ove la corrispondenza di offerta $s(p)$ è una funzione differenziabile. Le derivate $D_p s(p)$ e $D_p \pi^*(p)$ delle funzioni di offerta $y^* = s(p)$ e di profitto massimo $\pi^* = p s(p)$ sono, per ogni $p \in P'(Y)$,

$$D_p s(p) = \frac{1}{\lambda^*} \left((D^2 F)^{-1} + \frac{(D^2 F)^{-1} p p^T (D^2 F)^{-1}}{p^T (D^2 F)^{-1} p} \right)$$

$$D_p \pi^*(p) = y^*$$

ove $D_p s(p)$ è una matrice jacobiana, $D_p \pi^*(p)$ è un vettore gradiente, $\lambda^* = \lambda(p)$ è il valore del moltiplicatore di Lagrange che risulta dalla soluzione del problema $\max_{y \in \mathbb{R}^k : F(y)=0} p y$,

$D^2 F$ è la matrice hessiana in y^* della funzione $F(y)$ e p^T e p sono, rispettivamente, i vettori riga e colonna dei prezzi.

Dimostrazione. Differenziando le condizioni del primo ordine

$$-F(y^*) = 0 \quad p - \lambda^* DF(y^*) = 0$$

rispetto alle variabili dipendenti λ^* , y^* e alle variabili indipendenti p , risulta il sistema

$$\begin{bmatrix} 0 & -DF^T \\ -DF & -\lambda^* D^2 F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\lambda^* \\ dy^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -dp \end{bmatrix}$$

la cui soluzione è

$$d\lambda^* = \frac{DF^T (D^2 F)^{-1}}{DF^T (D^2 F)^{-1} DF} dp$$

$$dy^* = \frac{1}{\lambda^*} \left((D^2 F)^{-1} - \frac{(D^2 F)^{-1} DF DF^T (D^2 F)^{-1}}{DF^T (D^2 F)^{-1} DF} \right) dp$$

ossia, tenendo conto che le condizioni del primo ordine richiedono $DF = p/\lambda^*$, si ha

$$d\lambda^* = \lambda^* \frac{p^T (D^2 F)^{-1}}{p^T (D^2 F)^{-1} p} dp$$

$$dy^* = \frac{1}{\lambda^*} \left((D^2 F)^{-1} - \frac{(D^2 F)^{-1} p p^T (D^2 F)^{-1}}{p^T (D^2 F)^{-1} p} \right) dp$$

Dall'ultima di queste due relazioni scaturisce immediatamente la derivata $D_p s(p)$ indicata nell'enunciato. Tenendo poi conto che $d\pi^* = (y^* + (D_p s(p)) p) dp$ e che $(D_p s(p)) p = 0$, risulta la derivata $D_p \pi^*(p)$. $\square$

Dalle relazioni che esprimono le derivate $D_p s(p)$ e $D_p \pi^*(p)$ e dall'assioma debole della massimizzazione del profitto si ricavano proprietà rilevanti della corrispondenza di offerta e il legame tra essa e la funzione di profitto massimo noto come relazione di Hotelling (1932).

Proposizione 5.7 Prendendo in considerazione i prezzi $p \in P'(Y)$ per i quali la corrispondenza di offerta $s(p)$ è una funzione differenziabile, valgono le seguenti proprietà

$$\frac{\partial s_j(p)}{\partial p_h} = \frac{\partial s_h(p)}{\partial p_j} \quad \text{per ogni coppia } j, h = 1, \dots, k$$

$$\sum_{h=1}^k p_h \frac{\partial s_h(p)}{\partial p_j} = 0 \quad \text{per ogni } j = 1, \dots, k$$

Dimostrazione. Le relazioni che riguardano le derivate della funzione di offerta risultano dalla relazione indicata dalla Proposizione 5.6 e dalle proprietà della *matrice di sostituzione dell'offerta* $D_p s(p) = \frac{1}{\lambda^*} \left((D^2 F)^{-1} + \frac{(D^2 F)^{-1} p p^T (D^2 F)^{-1}}{p^T (D^2 F)^{-1} p} \right)$, che è del tutto analoga alla matrice di sostituzione (della domanda), o matrice di Slutsky, studiata dalla Proposizione 3.13. Come la matrice di Slutsky, essa è simmetrica e il suo prodotto per il vettore p è pari a zero, risultando, quindi, singolare. $\square$

La prima relazione indica che la variazione della quantità offerta del bene j -esimo al variare del prezzo del bene h -esimo è uguale alla variazione della quantità offerta del bene h -esimo al variare del prezzo del bene j -esimo (e non vi è una spiegazione intuitiva di questa proprietà della funzione di offerta).

La seconda relazione indica che è nullo il valore complessivo delle variazioni delle quantità offerte determinate dalla variazione di un prezzo. (Questa proprietà è conseguenza della omogeneità della funzione di offerta: essendo $s(\alpha p) = s(p)$ per ogni $\alpha > 0$, si ha $D_\alpha s(\alpha p) = 0$ e, quindi, $(D_p s(p)) p = 0$).

Proposizione 5.8 (Legge dell'offerta) La corrispondenza di offerta $s(p)$ è una relazione monotonicamente non decrescente dei prezzi, ossia, per

ogni coppia di prezzi p, p' che differiscono tra loro soltanto nell'elemento j -esimo (per cui $p_h = p'_h$ per ogni $h = 1, \dots, k$ con $h \neq j$) e per ogni $y \in s(p)$ e $y' \in s(p')$ si ha $\frac{y_j' - y_j}{p_j' - p_j} \geq 0$. Se la corrispondenza di offerta è una funzione

differenziabile, si ha, perciò, $\frac{\partial s_j(p)}{\partial p_j} \geq 0$ per ogni $j = 1, \dots, k$ e la matrice

$D_p s(p)$ è semidefinita positiva.

Dimostrazione. Seguendo l'approccio dell'assioma debole della massimizzazione del profitto, si ha, per ogni coppia $y \in s(p)$ e $y' \in s(p')$, che

$$\pi' = p' y' \geq p' y$$

$$\pi = p y \geq p y'$$

per cui risulta la disuguaglianza

$$(p' - p)(y' - y) \geq 0$$

che implica, essendo $p_h' = p_h$ per ogni $h \neq j$, $\frac{y_j' - y_j}{p_j' - p_j} \geq 0$.

Il segno della derivata $\frac{\partial s_j(p)}{\partial p_j}$ si può ricavare anche dall'analisi differenziale tenendo

conto che la matrice di sostituzione dell'offerta $D_p s(p)$ è semidefinita positiva (anziché negativa come la matrice di Slutsky) perché le condizioni del secondo ordine del problema

$$\max_{y \in \mathbb{R}^k: F(y)=0} p y \text{ richiedono } \alpha^T D^2 F(y^*) \alpha \geq 0. \quad \square$$

La legge dell'offerta (Proposizione 5.8) indica, per ogni output, che l'offerta è funzione non decrescente del suo prezzo e, per ogni input, che la domanda è funzione non crescente del suo prezzo. Questa proprietà può essere osservata, nel caso con due soli beni, sul diagramma della Figura 5.15: un incremento di p_2 (che riduce, in valore assoluto, la pendenza delle rette di isoprofitto da p_1/p_2 a p_1/p_2') determina un incremento dell'output (da y_2 a y_2') a causa della convessità dell'insieme di produzione (ossia,

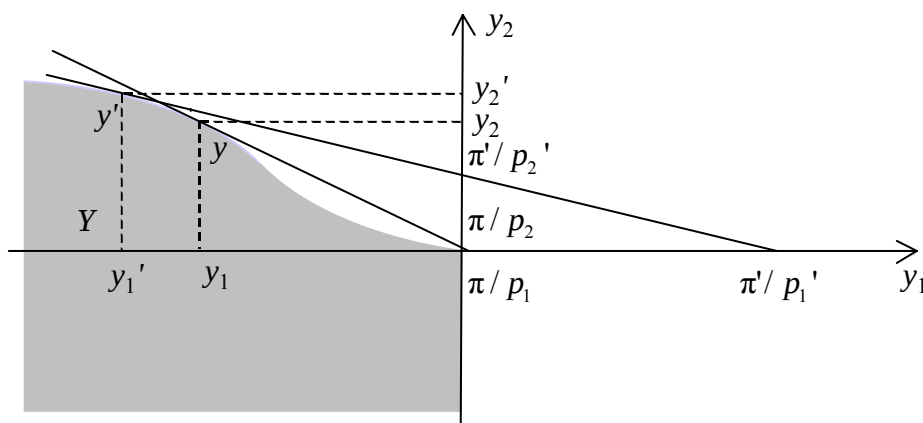


Figura 5.15

della concavità della funzione di produzione, richiesta, localmente, dalla condizione del secondo ordine). La stessa modificazione (da y a y') è provocata da una diminuzione di p_1 che provochi la stessa riduzione della

pendenza dell'isoprofitto (cioè, da quella diminuzione di p_1 a parità di p_2 che determina una pendenza p_1'/p_2 pari a quella p_1/p_2' determinata dalla variazione di p_2 a parità di p_1), per cui si osserva come la diminuzione di p_1 determini un incremento della quantità di input (da $-y_1$ a $-y_1'$).

La Proposizione 5.8, quindi, mostra come vi sia nella produzione soltanto un effetto di sostituzione (sia, cioè, assente l'effetto di reddito che determina nel consumo la possibilità che la quantità domandata di un bene sia funzione crescente del suo prezzo).

Proposizione 5.9 Prendendo in considerazione i prezzi per i quali la corrispondenza di offerta $s(p)$ è una funzione, vale la *relazione di Hotelling* $s(p) = D_p \pi^*(p)$, ossia, per ogni $j = 1, \dots, k$, $y_j^* = s_j(p) = \frac{\partial \pi^*(p)}{\partial p_j}$.

Dimostrazione. La relazione di Hotelling risulta direttamente dalla derivata della funzione di profitto massimo, indicata dalla Proposizione 5.6. La relazione di Hotelling ha anche una versione che non richiede che la corrispondenza di offerta sia una funzione differenziabile. Riprendendo la dimostrazione della Proposizione 5.8 che usa l'assioma debole della massimizzazione del profitto, sotto le medesime condizioni, si ricava che

$$\begin{aligned}\pi' - \pi &= p'(y' - y) + (p' - p)y \geq (p' - p)y \\ \pi' - \pi &= p(y' - y) + (p' - p)y' \leq (p' - p)y'\end{aligned}$$

da cui consegue

$$(p' - p)y \leq \pi' - \pi \leq (p' - p)y'$$

e, quindi, per $p_j' - p_j > 0$ (ricordando che è $p_h' = p_h$ per ogni $h \neq j$), per ogni $y \in s(p)$ e $y' \in s(p')$, risulta la disuguaglianza

$$y_j \leq \frac{\pi' - \pi}{p_j' - p_j} \leq y_j'$$

che può essere considerata la versione nel discreto della relazione di Hotelling. $\square$

La relazione di Hotelling, mostra come il profitto d'impresa vari al variare di un prezzo proprio in misura pari alla quantità offerta del bene il cui prezzo è variato. Cioè, è nullo l'effetto indiretto delle variazioni delle quantità dei beni (ossia, essendo $\pi^* = \sum_{h=1}^k p_h y_h^*$ e, quindi, $\frac{\partial \pi^*}{\partial p_j} = y_j^* +$

$\sum_{h=1}^k p_h \frac{\partial y_h}{\partial p_j}$, si ha semplicemente $\frac{\partial \pi^*}{\partial p_j} = y_j^*$). Quindi, se varia il prezzo di

un output, il profitto cresce in relazione alla quantità prodotta di quell'output, se varia il prezzo di un input, il profitto diminuisce in relazione alla quantità impiegata nella produzione di quell'input (che è $-y_j$).

Proposizione 5.10 La funzione di profitto massimo $\pi^*(p)$ è convessa (perciò, anche, continua) su ogni insieme convesso in $P(Y)$.

Dimostrazione. Per ogni terna p, p', p'' con $p'' = \lambda p + (1-\lambda)p'$ e $\lambda \in [0, 1]$ e per ogni $y'' \in s(p'')$, si ha $\pi^*(p'') = p'' y'' = \lambda p y'' + (1-\lambda)p' y'' \leq \lambda \pi^*(p) + (1-\lambda)\pi^*(p')$, cioè, che la funzione $\pi^*(p)$ è convessa. Essendo convessa, è necessariamente anche continua.

La convessità della funzione di profitto massimo si può ricavare anche con l'analisi differenziale. Dalla Proposizione 5.6 si ha $D_p \pi^*(p) = s(p)$ e, quindi, $D^2 \pi^*(p) = D_p s(p)$. Essendo la matrice di sostituzione dell'offerta $D_p s(p)$ semidefinita positiva (come

mostrato nel corso della dimostrazione della Proposizione 5.7), la matrice hessiana della funzione di profitto massimo risulta, allora, essere semidefinita positiva, ossia, la funzione di profitto massimo risulta essere convessa. $\square$

La convessità della funzione di profitto massimo può essere dimostrata anche in modo intuitivo, come illustrato nella Figura 5.16. Essendo $\pi^*(p) = p y^*$, ove $y^* \in s(p)$, se, al variare di p , da p a p' , si mantenesse y^* immutato (si ponesse, cioè, $\bar{y} = y^*$), il profitto muterebbe divenendo pari a $p' \bar{y}$ (varierebbe, cioè, linearmente con i prezzi) e sarebbe, per definizione, non superiore al profitto massimo $\pi^*(p')$. Conseguentemente, si ottiene che $\pi^*(p') - \pi^*(p) \geq (p' - p) y^*$, per ogni $y^* \in s(p)$, che è la condizione di convessità per la funzione $\pi^*(p)$.

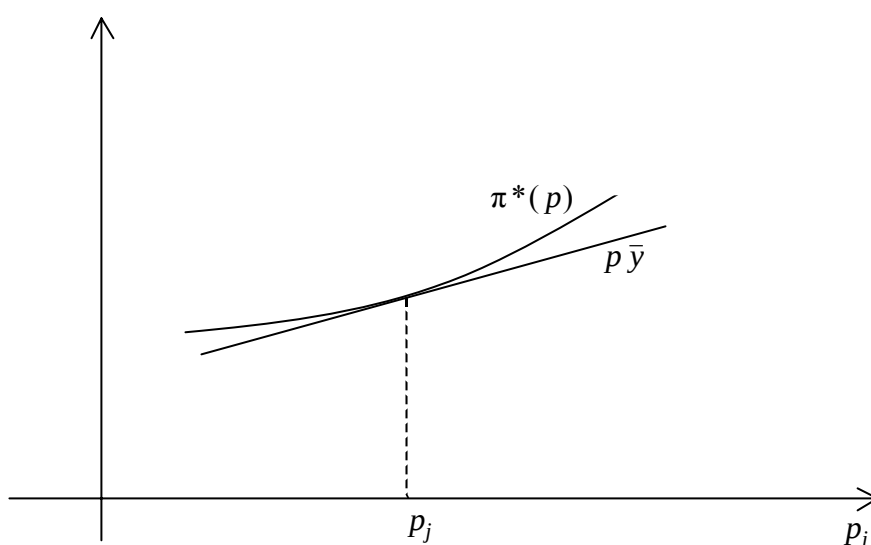


Figura 5.16

Le proprietà più rilevanti individuate per la corrispondenza di offerta $s(p)$ determinata con la massimizzazione del profitto e la funzione di profitto massimo $\pi^*(p)$ sono riassunte dalla Proposizione 5.11.

Proposizione 5.11 Assumendo che l'insieme di produzione Y sia non vuoto, chiuso e ammetta *free disposal*, risulta, per ogni $p \in P(Y)$:

- a) la corrispondenza $s(p)$ è omogenea di grado zero (Proposizione 5.3).
- b) se l'insieme Y è strettamente convesso, allora la corrispondenza di offerta $s(p)$ è una funzione continua per ogni $p \in P(Y)$ (Proposizione 5.2).
- c) per ogni $p \in P'(Y)$ (per cui la corrispondenza $s(p)$ è una funzione differenziabile), la matrice $D_p s(p)$ è simmetrica, semidefinita positiva e tale che $(D_p s(p)) p = 0$ (Proposizioni 5.7 e 5.8).
- d) la funzione $\pi^*(p)$ è omogenea di grado uno (Proposizione 5.3).

e) la funzione $\pi^*(p)$ è convessa (Proposizione 5.10).

f) per ogni $p \in P(Y)$ ove $s(p)$ è composto da un solo punto, si ha che $D_p \pi^*(p) = s(p)$ (Proposizione 5.9).

5.6 Dalla scelta di produzione all'insieme di produzione

Finora la scelta di produzione è stata analizzata in base al sistema di preferenza (consistente nella massimizzazione del profitto) dell'agente di produzione e al vincolo delle possibilità di produzione (rappresentato dall'insieme di produzione). La massimizzazione del profitto e l'insieme di produzione sono i dati primitivi di questa analisi: la corrispondenza di offerta viene determinata a partire da essi. Si è, così, seguito il primo dei due approcci indicati alla fine del Paragrafo 2.1.

Si tratta ora di analizzare la scelta di produzione seguendo il secondo approccio, che assume come dato primitivo il criterio di scelta (ossia, la corrispondenza di offerta) e ne esamina la possibile razionalizzabilità. Una corrispondenza di offerta $s: \mathbb{R}_+^k \rightarrow \mathbb{R}^k$, è razionalizzabile (sotto l'ipotesi che sia razionale massimizzare il profitto) se esiste un insieme $\bar{Y} \subset \mathbb{R}^k$ su cui $s(p)$ massimizza il profitto, cioè, con $s(p) \subseteq \arg \max_{y \in \bar{Y}} p y$. Mentre, nel primo approccio, si determina $s(p)$ dato Y , nel secondo approccio, si studia se esiste (in caso affermativo, individuandolo) un insieme $\bar{Y}$ per cui una data $s(p)$ risulti soddisfare la relazione $s(p) \subseteq \arg \max_{y \in \bar{Y}} p y$.

Ovviamente, questa relazione richiede per ogni p in cui $s(p)$ è un insieme (vi è, cioè, almeno una coppia $y, y' \in s(p)$) che $p y = p y'$ per ogni coppia $y, y' \in s(p)$. Questo è il primo requisito richiesto alla corrispondenza di offerta $s(p)$ perché sia razionalizzabile. Si può immediatamente rilevare come questo requisito sia soddisfatto se la corrispondenza $s(p)$ soddisfa l'assioma debole della massimizzazione del profitto (introdotto dalla Definizione 5.3).

Ciò premesso, si può procedere nel modo seguente. La corrispondenza di offerta $s(p)$ determina la funzione di profitto massimo $\pi^*(p) = p y^*$ con $y^* \in s(p)$, che definisce l'insieme $Y(p)$ delle produzioni il cui profitto, ai prezzi p , non è maggiore di $\pi^*(p)$, ossia, definisce il semispazio

$$Y(p) = \{y \in \mathbb{R}^k : p y \leq \pi^*(p)\}$$

come rappresentato, per il caso con due beni, nella Figura 5.17. (Per ogni p su cui $s(p)$ non è definito, $Y(p) = \mathbb{R}^k$). L'assioma debole della massimizzazione del profitto (WAPM) rivela l'impossibilità delle produzioni che non appartengono all'insieme $Y(p)$.

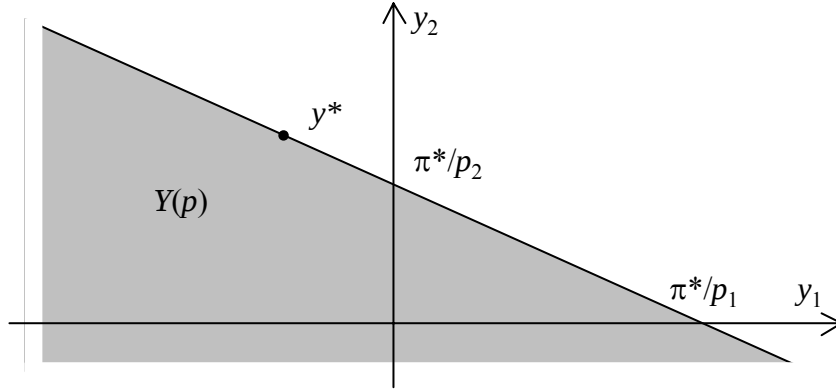


Figura 5.17

Definizione 5.4 Si prenda l'intersezione di tutti gli insiemi $Y(p)$ per $p \in \mathbb{R}_+^k$, cioè, l'insieme

$$\bar{Y} = \bigcap_{p \in \mathbb{R}_+^k} Y(p) = \{y \in \mathbb{R}^k : p \cdot y \leq \pi^*(p) ; p \in \mathbb{R}_+^k\}$$

che è convesso perché intersezione di insiemi convessi. Questo insieme include tutte le produzioni di cui la corrispondenza di offerta $s(p)$ non rivela (in base al WAPM) l'impossibilità.

Vale, allora, la proposizione seguente.

Proposizione 5.12 Una corrispondenza di offerta $s: \mathbb{R}_+^k \rightarrow \mathbb{R}^k$ è razionalizzabile (è, cioè, interpretabile come il risultato della massimizzazione del profitto) se e solo se soddisfa l'assioma debole della massimizzazione del profitto. In tal caso, si ha $s(p) \subseteq \arg \max_{y \in \bar{Y}} p \cdot y$ (ove $\bar{Y}$ è l'insieme appena introdotto con la Definizione 5.4). La corrispondenza $\bar{s}(p) = \arg \max_{y \in \bar{Y}} p \cdot y$ è, inoltre, omogenea di grado zero.

Dimostrazione. Si dimostra, dapprima, che si ha $y \in \bar{Y}$ per ogni $y \in s(p)$ se e solo se la corrispondenza di offerta soddisfa il WAPM. Vi sia un $y \in s(p)$ tale che $y \notin \bar{Y}$. Essendo $y \notin \bar{Y}$, esiste un $p' \in \mathbb{R}_+^k$ per cui $y \notin Y(p')$, cioè, con $p' \cdot y > \pi^*(p')$. Vi è, allora, un $y' \in s(p')$ per cui $p' \cdot y > p' \cdot y' = \pi^*(p')$ pur essendo $y \in s(p)$. Ne consegue che la corrispondenza di offerta non soddisfa il WAPM. La condizione secondo cui $y \in s(p)$ e $y \in \bar{Y}$ implicano che la corrispondenza di offerta soddisfa il WAPM è equivalente alla condizione secondo cui $y \in \bar{Y}$ se $y \in s(p)$ e la corrispondenza di offerta soddisfa il WAPM. Si assuma ora che la corrispondenza di offerta non soddisfi il WAPM. Vi è, allora, una coppia $y \in s(p)$ e $y' \in s(p')$ per cui $p' \cdot y > p' \cdot y'$. Si ha, perciò, che $y \notin Y(p')$ e, quindi, che $y \notin \bar{Y}$. La condizione secondo cui, se non vale il WAPM, allora vi è un $y \in s(p)$ tale che $y \notin \bar{Y}$ è equivalente alla condizione secondo cui si ha $y \in \bar{Y}$ per ogni $y \in s(p)$ solo se la corrispondenza di offerta soddisfa il WAPM. Dopo aver dimostrato che si ha $y \in \bar{Y}$ per ogni $y \in s(p)$ se e solo se la corrispondenza di offerta soddisfa il WAPM, è abbastanza semplice dimostrare la Proposizione. Se la corrispondenza di offerta non soddisfa il WAPM, allora esiste un $p \in \mathbb{R}_+^k$ e un $y \in s(p)$ per cui $y \notin \bar{Y}$: per questo p , si ha $s(p) \not\subseteq \arg \max_{y \in \bar{Y}} p \cdot y$. Se la corrispondenza di offerta soddisfa il WAPM, allora si ha che $y \in \bar{Y}$ per

ogni $y \in s(p)$. Ora, la definizione dell'insieme $Y(p)$ implica che $s(p) \subseteq \arg \max_{y' \in Y(p)} p y'$.

Perciò, essendo $Y(p) \subseteq \bar{Y}$ e $y \in \bar{Y}$ per ogni $y \in s(p)$, è necessariamente anche $s(p) \subseteq \arg \max_{y \in \bar{Y}} p y$. Infine, la corrispondenza $\bar{s}(p) = \arg \max_{y \in \bar{Y}} p y$ è omogenea di grado zero per la

Proposizione 5.3. (Si noti come il WAPM non implichi che la corrispondenza di offerta $s(p)$ sia omogenea di grado zero, ma implichi che lo sia la corrispondenza $\bar{s}(p)$. Se quest'ultima è una funzione, allora anche la corrispondenza $s(p)$ è una funzione, per cui risulta omogenea di grado zero se soddisfa il WAPM. Si noti, però, che non basta che $s(p)$ sia una funzione perché sia una funzione anche la corrispondenza $\bar{s}(p)$). □

Si può notare come la razionalizzabilità della corrispondenza di offerta richieda soltanto che sia soddisfatto l'assioma debole della massimizzazione del profitto, mentre per la razionalizzabilità della funzione di domanda è richiesto (Proposizione 4.3) l'assioma forte delle preferenze rivelate (quello debole è insufficiente). Sostanzialmente, il WARP non garantisce la simmetria della matrice di Slutsky. La simmetria della matrice di sostituzione dell'offerta è richiesta anche dalla razionalizzabilità della funzione di offerta (altrimenti, non sono soddisfatte le condizioni di integrabilità necessarie per l'esistenza della funzione di profitto massimo, che è implicata dalla razionalizzabilità della funzione di offerta). Il punto è che l'assioma debole della massimizzazione del profitto implica la sua versione forte o, meglio, non esistono due versioni, una debole e l'altra forte, di questo assioma.⁵ Si può, peraltro, dimostrare direttamente la proposizione (implicata dalla Proposizione 5.12) secondo cui l'assioma debole della massimizzazione del profitto implica che la funzione di offerta $s(p)$ abbia matrice jacobiana $D_p s(p)$ semidefinita positiva, simmetrica e tale che $(D_p s(p)) p = 0$. (Per dimostrare questa proposizione basta ricordare le dimostrazioni delle Proposizioni 5.8 e 5.9 e sviluppare alcune loro implicazioni. La condizione, indicata nella dimostrazione della Proposizione 5.8 e implicata dal WAPM, $(p' - p)(s(p') - s(p)) \geq 0$ implica per $p' - p \rightarrow 0$ che la matrice $D_p s(p)$ sia semidefinita positiva. La relazione di Hotelling $s(p) = D_p \pi^*(p)$, che si può ricavare, ponendo $p'_j - p_j \rightarrow 0$, partendo dalla relazione $y_j \leq \frac{\pi'_j - \pi}{p'_j - p_j} \leq y'_j$ trovata nel corso della dimostrazione della

Proposizione 5.9 in base al WAPM, implica, essendo $D^2 \pi^*(p)$ simmetrica e $D_p s(p) = D^2 \pi^*(p)$, che anche $D_p s(p)$ sia simmetrica. Infine, essendo, da un lato, $\pi^*(p) = p s(p)$ e, quindi, $D_p \pi^*(p) = s(p) + (D_p s(p)) p$, e, dall'altro lato, $s(p) = D_p \pi^*(p)$, risulta che è $(D_p s(p)) p = 0$).

Si tratta, in ultimo, di esaminare quale relazione intercorra tra l'insieme di produzione Y e l'insieme $\bar{Y}$ introdotto dalla Definizione 5.4. In altri termini, da un lato, le scelte di produzione di un agente razionale sono rappresentate dalla corrispondenza $s(p) = \arg \max_{y \in Y} p y$, ove Y è l'insieme delle produzioni per lui possibili. Dall'altro lato, le sue

⁵ La Definizione 4.2 dell'assioma forte delle preferenze rivelate considera una successione di scelte di consumo, ciascuna delle quali è possibile nella situazione precedente (ne soddisfa, cioè, il vincolo di bilancio), rivelandosi così meno gradita della scelta precedente, per richiedere che la scelta nell'ultima situazione non si riveli preferita a quella nella prima, ossia, che la scelta eseguita nella prima situazione non sia possibile nell'ultima situazione. Per analogia, un eventuale assioma forte della massimizzazione del profitto dovrebbe richiedere, per ogni successione $p^1, p^2, \dots, p^n$, che determini una successione di scelte di produzione $s(p^1), s(p^2), \dots, s(p^n)$ tra le quali intercorra la relazione $p^i s(p^{i+1}) \leq p^i s(p^i)$ per ogni $i = 1, \dots, n-1$, che la scelta eseguita nell'ultima situazione non si riveli più profittevole di quella nella prima, ossia, $p^1 s(p^n) \leq p^1 s(p^1)$. Ora, questa condizione è già implicata dall'assioma debole, che, inoltre, rende sempre soddisfatta la relazione $p^i s(p^{i+1}) \leq p^i s(p^i)$.

scelte si configurano nella corrispondenza $s(p)$ dalla quale si desume l'insieme $\bar{Y}$. Il legame tra questi due insiemi è individuato dalla proposizione seguente.

Proposizione 5.13 L'insieme $\bar{Y}$ determinato dalla corrispondenza di offerta $s(p)$ $= \arg \max_{y \in Y} p y$ è l'involucro convesso dell'insieme di produzione Y (che, per ipotesi, è non vuoto e chiuso e ammette *free disposal*). (L'involucro convesso di un insieme è il più piccolo insieme convesso che lo contiene).

Dimostrazione. Questa proposizione deriva da una proprietà delle funzioni di sostegno. (Una presentazione di questa proprietà, in relazione ad un problema analogo a quello qui discusso, si trova in Mas-Colell, Whinston e Green, 1995, pp.64-65).⁶ $\square$

La proposizione seguente è un corollario della Proposizione 5.13.

Proposizione 5.14 Se l'insieme di produzione Y è convesso, allora l'insieme $\bar{Y}$, introdotto dalla Definizione 5.4, è uguale a Y . Ne consegue, essendo $\bar{Y}$ determinato dalla funzione di profitto massimo $\pi^*(p)$, che la funzione di profitto massimo $\pi^*(p)$ fornisce la descrizione dell'insieme di produzione Y (se questo è convesso), ne è, cioè, una *rappresentazione duale*.

5.7 L'offerta e l'insieme di produzione aggregati e l'agente rappresentativo

Al contrario che nel consumo, non vi è nella produzione alcuna condizione particolare che debba essere introdotta per l'aggregazione e per ottenere l'insieme di produzione aggregato e l'agente di produzione rappresentativo.

Vi siano ℓ agenti di produzione, ciascuno dei quali abbia un insieme di produzione Y_i e una corrispondenza di offerta $s_i(p)$, con $i = 1, \dots, \ell$ (per il significato dei simboli si tenga presente la nota 18 del Capitolo 4). La definizione seguente introduce l'insieme aggregato di produzione e la corrispondenza aggregata di offerta.

Definizione 5.5 Sia y_i la produzione dell'agente i -esimo: la *produzione aggregata* è il vettore $y = \sum_{i=1}^{\ell} y_i$. L'insieme delle produzioni aggregate eseguibili è l'*insieme aggregato di produzione*, cioè,⁷

⁶ Una dimostrazione diretta per il caso in questione può essere data nei seguenti termini. Si indichi con $\text{Co}Y$ l'involucro convesso di Y . Per ogni $\bar{y} \notin \text{Co}Y$ esiste almeno un $y' \ll \bar{y}$ tale che $y' \in Y$ (poiché Y ammette *free disposal*) e un $\lambda \in (0, 1]$ tale che $y'' = \lambda y' + (1-\lambda)\bar{y}$ appartenga alla frontiera di $\text{Co}Y$ ($\text{Co}Y$ è chiuso, $y' \in \text{Co}Y$ e $\bar{y} \notin \text{Co}Y$). Allora, esiste un $p'' \in \mathbb{R}_+^k$ per cui $p'' y'' = \max_{y \in \text{Co}Y} p'' y$, con $\max_{y \in \text{Co}Y} p'' y = \max_{y \in Y} p'' y$, poiché ogni iperpiano di sostegno di $\text{Co}Y$ è iperpiano di sostegno di Y e, inoltre, Y è chiuso. Ne consegue, essendo $p'' \bar{y} > p'' y'' = \max_{y \in Y} p'' y$, che $\bar{y} \notin \bar{Y}$, per cui $\bar{y} \in \text{Co}Y$ se $\bar{y} \in \bar{Y}$.

$$Y = \sum_{i=1}^{\ell} Y_i = \{y \in \mathbb{R}^k : y = \sum_{i=1}^{\ell} y_i \text{ per qualche } y_i \in Y_i, \text{ con } i=1, \dots, \ell\}$$

e la corrispondenza che esprime i beni offerti complessivamente dagli agenti di produzione è la *corrispondenza aggregata di offerta*, cioè,

$$S(p) = \sum_{i=1}^{\ell} s_i(p) = \{y \in \mathbb{R}^k : y = \sum_{i=1}^{\ell} y_i \text{ per qualche } y_i \in s_i(p), \text{ con } i=1, \dots, \ell\}$$

La proposizione seguente stabilisce l'equivalenza tra la scelta accentrata, secondo la quale l'offerta risulta dalla massimizzazione del profitto aggregato sull'insieme aggregato di produzione, cioè, dalla soluzione del problema $\max_{y \in Y} py$, e la scelta decentrata, secondo la quale l'offerta risulta dalla somma delle offerte dei singoli agenti, ciascuno dei quali massimizza il suo profitto, determina, cioè, la sua offerta come soluzione del problema $\max_{y_i \in Y_i} py_i$.

Proposizione 5.15 Si definiscano, da un lato, $\pi^*(p) = \max_{y \in Y} py$ e $s(p) = \arg \max_{y \in Y} py$ e, dall'altro lato, $\pi_i^*(p) = \max_{y_i \in Y_i} py_i$ e $s_i(p) = \arg \max_{y_i \in Y_i} py_i$ per $i = 1, \dots, \ell$. Si ha

$$\pi^*(p) = \sum_{i=1}^{\ell} \pi_i^*(p), \quad s(p) = S(p) = \sum_{i=1}^{\ell} s_i(p)$$

Dimostrazione. Essendo, da un lato, $\sum_{i=1}^{\ell} \pi_i^*(p) = \sum_{i=1}^{\ell} p y_i^*$, con $y_i^* \in s_i(p)$, e $\sum_{i=1}^{\ell} y_i^* \in Y$, si ha che $\pi^*(p) = \max_{y \in Y} py \geq p \sum_{i=1}^{\ell} y_i^* = \sum_{i=1}^{\ell} \pi_i^*(p)$. Dall'altro lato, essendo $\pi^*(p) = p y^*$, con $y^* \in s(p)$ e, quindi $y^* \in Y$ (per cui esiste una m -pla $y_1 \in Y_1, \dots, y_{\ell} \in Y_{\ell}$ tale che $y^* = \sum_{i=1}^{\ell} y_i$), poiché $\pi_i^*(p) \geq p y_i$ per ogni $y_i \in Y_i$ e $i = 1, \dots, \ell$, si ha che $\sum_{i=1}^{\ell} \pi_i^*(p) \geq \sum_{i=1}^{\ell} p y_i = p y^* = \pi^*(p)$. Le due disuguaglianze $\pi^*(p) \geq \sum_{i=1}^{\ell} \pi_i^*(p)$ e $\sum_{i=1}^{\ell} \pi_i^*(p) \geq \pi^*(p)$ implicano l'uguaglianza $\pi^*(p) = \sum_{i=1}^{\ell} \pi_i^*(p)$. La seconda parte della dimostrazione riguarda l'uguaglianza $s(p) = \sum_{i=1}^{\ell} s_i(p)$, che verrà dimostrata provando che $\sum_{i=1}^{\ell} s_i(p) \subseteq s(p)$ e $s(p) \subseteq \sum_{i=1}^{\ell} s_i(p)$. Essendo, da un lato, $\sum_{i=1}^{\ell} p y_i^* = \sum_{i=1}^{\ell} \pi_i^*(p) = \pi^*(p)$,

⁷ Y è una somma di insiemi. La somma di due insiemi (entrambi in $\mathbb{R}^k$) A e B è così definita: se $a \in A$ e $b \in B$, allora $(a+b) \in (A+B)$, e, se $c \in (A+B)$, allora vi è una coppia $a \in A$ e $b \in B$, tale che $a+b = c$. Nella Figura 5.18 è rappresentato un esempio per $k = 2$.

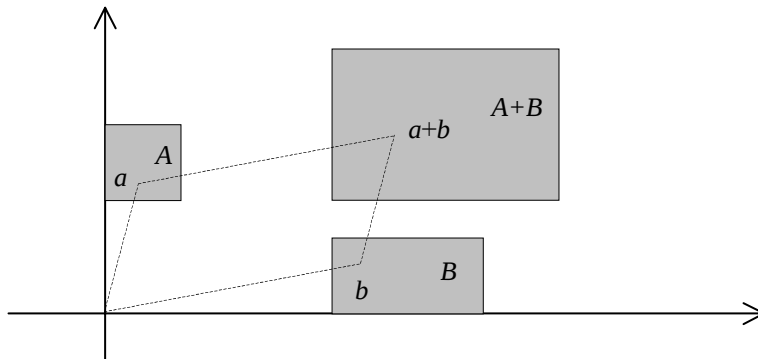


Figura 5.18

per cui $\sum_{i=1}^{\ell} y_i^* \in s(p)$, e valendo questa relazione per ogni $y_i^* \in s_i(p)$ e $i = 1, \dots, \ell$, si ha che $\sum_{i=1}^{\ell} s_i(p) \subseteq s(p)$. Dall'altro lato, essendo $p y^* = \pi^*(p)$ per ogni $y^* \in s(p)$ ed esistendo, per ogni $y^* \in s(p)$, una m -pla $y_1 \in Y_1, \dots, y_{\ell} \in Y_{\ell}$ tale che $y^* = \sum_{i=1}^{\ell} y_i$, le condizioni $\pi_i^*(p) \geq p y_i$ per ogni $y_i \in Y_i$ e $i = 1, \dots, \ell$ e $\pi^*(p) = \sum_{i=1}^{\ell} \pi_i^*(p)$ (per cui $p \sum_{i=1}^{\ell} y_i = \pi^*(p) = \sum_{i=1}^{\ell} \pi_i^*(p) \geq \sum_{i=1}^{\ell} p y_i$) implicano $\pi_i^*(p) = p y_i$, cioè, $y_i \in s_i(p)$ per ogni $i = 1, \dots, \ell$. Ne consegue che $y^* \in \sum_{i=1}^{\ell} s_i(p)$ e, quindi, $s(p) \subseteq \sum_{i=1}^{\ell} s_i(p)$. $\square$

La proposizione precedente ha, tra l'altro, la rilevante implicazione che la centralizzazione non conduce, anche a parità di conoscenze, a scelte di produzione diverse e a un profitto maggiore che con la decentralizzazione. Questo risultato dipende dall'ipotesi che i singoli agenti di produzione operino in un contesto concorrenziale, siano, cioè, *price-taker*, e che anche l'agente unico sia *price-taker*.

Il comportamento dell'insieme degli agenti di produzione, ciascuno dei quali sceglie in un contesto concorrenziale (è, cioè, *price-taker*), può, allora, essere rappresentato tramite un unico agente, perciò indicato come *agente rappresentativo*, anch'egli *price-taker*, il cui insieme di produzione è l'insieme aggregato di produzione, che è la somma degli insiemi di produzione dei singoli agenti, cioè, $Y = \sum_{i=1}^{\ell} Y_i$. La sua corrispondenza di offerta $s(p) = \arg \max_{y \in Y} p y$ è uguale alla corrispondenza aggregata di offerta $S(p) = \sum_{i=1}^{\ell} s_i(p) = \sum_{i=1}^{\ell} \arg \max_{y_i \in Y_i} p y_i$. (Si noti come l'agente rappresentativo appena introdotto sia tale subordinatamente alla condizione che tutti gli agenti di produzione, che egli rappresenta, siano *price-taker*. In caso contrario, se, cioè, qualcuno di essi ha qualche potere di mercato, allora non è detto che vi sia un agente rappresentativo).

5.8 L'insieme di produzione e la corrispondenza di offerta con libertà di entrata

Il numero degli agenti di produzione (indicato con ℓ) è un dato, così come gli insiemi di produzione (Y_i , con $i = 1, \dots, \ell$) e il sistema di preferenza (massimizzazione del profitto). Nel contesto concorrenziale, però, non sempre è possibile considerare dato il numero degli agenti di produzione, poiché vi può essere *libertà di entrata*. Vi è libertà di entrata se non vi sono ostacoli di nessun tipo (tecnologici, legali, ecc.) per eseguire le trasformazioni produttive consentite da un dato insieme di produzione.

La possibilità di entrare implica quella di non entrare, per cui per l'agente in esame (che può scegliere se entrare o non entrare) è possibile la produzione nulla. In altri termini, la libertà di entrata implica che l'insieme di produzione consenta l'inazione (proprietà e nel Paragrafo 5.1). Allora, per

un insieme di produzione Y_i , se vi è libertà di entrata, si ha, da un lato, $0 \in Y_i$, e, dall'altro lato, un numero infinito di agenti. E' infinito per la libertà di entrata, ma ciò non significa che tutti gli agenti siano attivi, scelgano, cioè, un $y_i \neq 0$: il numero intero ℓ_i indica quanti sono gli agenti attivi dotati dell'insieme di produzione Y_i . Il numero di agenti attivi dipende dalla influenza che questo numero ha sui prezzi, per cui riguarda l'analisi dell'equilibrio concorrenziale (che verrà esaminata nella Parte II).⁸

Si introduca ora l'insieme di produzione di *industria*. Il termine *industria* è usato in economia con due significati diversi. In questo paragrafo, un'industria è l'insieme delle imprese dotate dello stesso insieme di produzione Y_i . Con l'altro significato (usato nel Paragrafo 8.6), un'industria è l'insieme delle imprese che producono uno stesso bene.

Definizione 5.6 *L'insieme di produzione di industria con libertà di entrata*

$$\{y \in \mathbb{R}^k : y = \ell_i y_i \text{ per qualche } y_i \in Y_i \text{ e } \ell_i \text{ intero non negativo}\}$$

è l'insieme delle produzioni possibili per il complesso delle imprese dell'industria. Il numero di agenti attivi ℓ_i è, per definizione, un numero intero non negativo. E' comodo, nell'analisi, assumere che questo numero sia un numero reale non negativo (sia, cioè, possibile che vi siano, ad esempio, 324,61 agenti): si introduce, così, una approssimazione, che è trascurabile se questo numero è elevato. Allora, l'insieme precedente diviene

$$\hat{Y}_i = \{y \in \mathbb{R}^k : y = \ell_i y_i \text{ per qualche } y_i \in Y_i \text{ e } \ell_i \geq 0\}$$

Consegue la proposizione seguente.

Proposizione 5.16 *L'insieme di produzione di industria con libertà di entrata $\hat{Y}_i$ presenta rendimenti di scala costanti.*

Dimostrazione. Per ogni $y \in \hat{Y}_i$ si ha $y = \ell_i y_i$ per qualche $y_i \in Y_i$ e $\ell_i \geq 0$ ed è, quindi, $\lambda y \in \hat{Y}_i$ per ogni $\lambda \geq 0$, per cui l'insieme $\hat{Y}_i$ presenta rendimenti di scala costanti. $\square$

I rendimenti di scala costanti implicano che il profitto massimo consentito dall'insieme di produzione $\hat{Y}_i$ è illimitato o nullo. Infatti, se vi è un $y \in \hat{Y}_i$ per cui $\pi = p \cdot y > 0$, allora anche $\lambda y \in \hat{Y}_i$ per ogni $\lambda \geq 0$, con profitto pari a $\lambda \pi$. Non essendo λ limitato, non risulta limitato neanche il profitto. Inoltre, il profitto massimo non può essere negativo, qualunque sia $p \in \mathbb{R}_+^k$, poiché vi è possibilità di inazione, cioè $0 \in Y_i$ e, quindi, $0 \in \hat{Y}_i$. Ne consegue che $\hat{\pi}_i^*(p) = \max_{y \in \hat{Y}_i} p \cdot y = 0$ per ogni $p \in P(\hat{Y}_i)$, cioè, per ogni vettore

di prezzi per il quale il problema $\max_{y \in \hat{Y}_i} p \cdot y$ ammette soluzione. $\square$

Le Proposizioni 5.15 e 5.16, assumendo che il numero di agenti attivi sia un qualsiasi numero reale non negativo (ed estendendo un po' la Proposizione 5.15 per includere il caso in cui il numero degli agenti non è intero), implicano che la *corrispondenza aggregata di offerta d'industria*, che rappresenta l'offerta complessiva degli agenti dotati dell'insieme di produzione Y_i , sia, per ogni $p \in P(\hat{Y}_i)$,

⁸ In breve: assumendo che il profitto d'impresa decresca al crescere del numero di agenti attivi, il numero di agenti attivi ℓ_i è determinato dalla condizione di profitto nullo. Infatti, da un lato, la possibilità di inazione implica $\pi_i^*(p) \geq 0$ e, dall'altro lato, se $\pi_i^*(p(\ell_i + 1)) > 0$ allora converrebbe ad un $(\ell_i + 1)$ -esimo agente diventare attivo. Quindi, le condizioni $\pi_i^*(p(\ell_i)) \geq 0$ e $\pi_i^*(p(\ell_i + 1)) \leq 0$ determinano il numero di agenti attivi.

$$\hat{s}_i(p) = \arg \max_{y \in \hat{Y}_i} py$$

e, quindi, che se $y \in \hat{s}_i(p)$, allora anche $\lambda y \in \hat{s}_i(p)$ per ogni $\lambda \geq 0$.

Quanto indicato per una industria, cioè, per un insieme di produzione Y_i , può essere esteso a tutta la produzione. Se vi è libertà di entrata in tutte le industrie, si può, in modo del tutto analogo, introdurre l'*insieme aggregato di produzione con libertà di entrata*

$$\hat{Y} = \{y \in \mathbb{R}^k : y = \lambda y' \text{ per qualche } y' \in Y \text{ e } \lambda \geq 0\}$$

ove, seguendo la Definizione 5.5,

$$Y = \sum_{i=1}^{\ell} Y_i = \{y \in \mathbb{R}^k : y = \sum_{i=1}^{\ell} y_i \text{ per qualche } y_i \in Y_i, \text{ con } i=1, \dots, \ell\}$$

e la corrispondenza aggregata di offerta con libertà di entrata

$$\hat{s}(p) = \arg \max_{y \in \hat{Y}} py$$

con $\hat{\pi}(p) = \max_{y \in \hat{Y}} py = 0$ per ogni $p \in P(\hat{Y})$ e con $\lambda y \in \hat{s}(p)$ per ogni $y \in \hat{s}(p)$ e $\lambda \geq 0$.

5.9 La scelta degli input: le funzioni di domanda condizionale di input e le funzioni di costo minimo di produzione

La scelta di produzione è stata fin qui analizzata seguendo la prima delle due vie indicate alla fine del Paragrafo 5.2, secondo cui la scelta di produzione viene determinata come soluzione del problema $\max_{y \in Y} py$, cioè, massimizzando il profitto sotto il vincolo di eseguibilità della produzione. Viene ora esaminata la seconda via, che suddivide la scelta in due stadi.

Nel primo stadio, in cui sono variabili soltanto input (tutti gli input, o anche soltanto alcuni di essi), si esamina la scelta degli input x per dati output q (tali che $X(q) \neq \emptyset$) affrontando il problema $\min_{x \in X(q)} p_x x$. Ossia,

viene scelto, nell'insieme dei requisiti di input per la produzione degli output q , un paniere di input di costo minimo. Il costo minimo di produzione degli output q , con $X(q) \neq \emptyset$, risulta essere pari a $c^*(p_x, q) = \min_{x \in X(q)} p_x x$. Nel

secondo stadio, si ha il problema $\max_{q \in \mathbb{R}_+^n : X(q) \neq \emptyset} p_q q - c^*(p_x, q)$, per cui viene scelto il paniere di output che massimizza il profitto, tenendo conto del suo costo minimo di produzione.

L'opportunità di esaminare la scelta di produzione anche distinguendo i due stadi sopraindicati è giustificata sostanzialmente da due ragioni. La prima ragione consiste nei risultati significativi cui questa analisi perviene (particolarmente rilevanti per l'approccio di equilibrio parziale e per l'economia applicata), la seconda nella possibilità di separare la scelta dei beni per i quali l'agente in esame è *price-taker* (cui si applica l'analisi seguente) da quella dei beni per i quali l'agente ha un potere di mercato.

Per semplicità, ma anche perché questo è il caso più spesso esaminato nelle applicazioni, verrà considerata la presenza di un solo output, per cui la funzione di trasformazione (che rappresenta la frontiera dell'insieme di

produzione) è espressa dalla funzione di produzione $q = f(x)$. Allora, con le ipotesi consuete, l'insieme dei requisiti di input per la produzione dell'output q è $X(q) = \{x \in \mathbb{R}_+^m : f(x) \geq q\}$.

Peraltro, l'analisi successiva può essere facilmente estesa al caso generale in cui vi sono diversi output (cioè, $q \in \mathbb{R}_+^n$, con $n > 1$) ed anche, con le opportune modificazioni, al caso in cui nel primo stadio si massimizza il ricavo sull'insieme delle possibilità di output consentite da date quantità di input, per poi determinare queste, nel secondo stadio, massimizzando il profitto rispetto agli input tenendo conto della funzione di ricavo massimo ottenuta nel primo stadio (cioè, come accennato verso la fine del Paragrafo 5.2, nel primo stadio si affronta il problema $\max_{q \in Q(x)} p_q q$, da cui risulta la funzione di ricavo massimo $r^*(p_q, x) = \max_{q \in Q(x)} p_q q$, e, nel secondo stadio, il problema $\max_{x \in \mathbb{R}_+^m} r^*(p_q, x) - p_x x$).

Si assuma, come indicato nel Paragrafo 5.1 (e rappresentato nella Figura 5.9), che l'insieme dei requisiti di input $X(q)$ sia, oltre che non vuoto, anche chiuso, inclusivo verso l'alto e non crescente. Nel seguito, si assume anche che il vettore p_x dei prezzi degli input sia positivo: si trascurano, cioè, gli input con prezzo nullo, che sono irrilevanti per il costo di produzione. (Non viene conseguentemente esaminata la quantità impiegata di questi input, che è positiva se la produzione dell'output q ne richiede l'impiego. La quantità di questi input, tuttavia, non dipende dalle preferenze dell'agente di produzione, che massimizza il profitto. Essendo ininfluenza su questo, dipende soltanto dall'insieme di produzione).

Inoltre, non si assume sempre che tutti gli input siano oggetto di scelta. Possono esservi input la cui quantità è prefissata. Allora, il vettore x degli input viene scomposto in due sottovettori: x^v , che indica le quantità degli *input variabili* (oggetto di scelta), e x^f , che indica quelle degli *input fissi* (che sono prefissate, non sono, cioè, nel problema in esame, oggetto di scelta). Possono, allora, essere distinte le situazioni di *brevissimo periodo* (in cui nessun input è variabile), *breve periodo* (in cui è variabile soltanto un input), *medio periodo* (sono variabili alcuni input) e di *lungo periodo* (tutti gli input sono variabili). La terminologia al riguardo non è, nella letteratura economica, uniforme. Nel seguito, vengono considerate solo situazioni di breve e lungo periodo, indicando con il termine di *breve periodo* ogni situazione in cui vi sono almeno un input fisso ed uno variabile (quindi, accomunando le situazioni prima indicate come breve e medio periodo).

Indicando con v il numero degli input variabili, con $1 \leq v \leq m$, la minimizzazione del costo di produzione è rappresentata dal problema $\min_{x^v \in X(q, x^f)} p_x^v x^v$, ove p_x^v è il sottovettore di p_x che contiene i prezzi degli input variabili e $X(q, x^f) = \{x^v \in \mathbb{R}_+^v : f(x^v, x^f) \geq q\}$ è l'insieme dei requisiti di input variabili per la produzione dell'output q con input fissi x^f . Con le ipotesi introdotte (in particolare, $p_x^v \gg 0$ e l'insieme $X(q, x^f)$ non vuoto,

chiuso e inferiormente limitato, perché così è $X(q)$, questo problema ammette sempre soluzione.

Definizione 5.7 La scelta $d^v \subset \mathbb{R}_+^v$ delle quantità degli input variabili, per ogni data terna (p_x^v, q, x^f) , con $p_x^v \in \mathbb{R}_{++}^v$, $q \in \mathbb{R}_+$ e $x^f \in \mathbb{R}_+^{m-v}$, è l'insieme di punti $x^v \in X(q, x^f)$ minimale rispetto al *costo variabile di produzione* $c = p_x^v x^v$, cioè,

$$d^v(p_x^v, q, x^f) = \{x^v \in X(q, x^f) : p_x^v x^v \geq p_x^v x^{v'} \text{ per ogni } x^{v'} \in X(q, x^f)\}$$
ossia,

$$d^v(p_x^v, q, x^f) = \arg \min_{x^v \in X(q, x^f)} p_x^v x^v$$

Perciò, se $v = m$, cioè, nel lungo periodo, si ha

$$d(p_x, q) = \arg \min_{x \in X(q)} p_x x$$

Definizione 5.8 La corrispondenza $d^v: \mathbb{R}_{++}^v \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^{m-v} \rightarrow \mathbb{R}_+^v$, ossia, $d^v(p_x^v, q, x^f)$, è denominata *corrispondenza* (o *funzione*, se è ad un solo valore) di *domanda condizionale* (perché dipendente da q e, se $v < m$, anche da x^f) degli input. La funzione $c_v^*: \mathbb{R}_{++}^v \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^{m-v} \rightarrow \mathbb{R}_+$, ossia,

$$c_v^*(p_x^v, q, x^f) = \min_{x^v \in X(q, x^f)} p_x^v x^v$$

è denominata, se $v < m$, *funzione di costo minimo variabile*. La funzione, ottenuta sommando a questa il costo degli input fissi, pari a $c_f = p_x^f x^f$, cioè,

$$c^*(p_x, q, x^f) = c_v^*(p_x^v, q, x^f) + p_x^f x^f$$

è denominata *funzione di costo minimo totale di breve periodo*. Se non vi sono input fissi, cioè, $v = m$, allora non c'è differenza tra costo variabile e costo totale e si ha la *funzione di costo minimo di lungo periodo*

$$c^*(p_x, q) = \min_{x \in X(q)} p_x x.$$

5.10 L'analisi della domanda condizionale di input e del costo minimo di produzione

Le proposizioni seguenti, così come le definizioni, sono analoghe a quelle già indicate per la scelta di produzione nei Paragrafi 5.3, 5.4 e 5.5: sono casi particolari di esse (l'insieme di produzione è ora composto da punti che rappresentano panieri di input variabili). Non ne viene, perciò, riportata la dimostrazione, che può essere ottenuta, con le opportune modificazioni, dalle analoghe dimostrazioni ivi indicate.

Come già indicato, l'insieme dei requisiti di input

$$X(q, x^f) = \{x^v \in \mathbb{R}_+^v : f(x^v, x^f) \geq q\}$$

è, per ipotesi, non vuoto, chiuso, inclusivo verso l'alto, non crescente rispetto all'output q . Per l'ipotesi di *free disposal*, è anche non decrescente rispetto agli input fissi x^f . Equivalentemente, la funzione di produzione

$$q = f(x^v, x^f)$$

è, per ipotesi, continua e non decrescente rispetto a x^v e x^f . Inoltre, per ipotesi, i prezzi degli input variabili sono positivi, cioè $p_x^v >> 0$.

Proposizione 5.17 L'insieme $d^v(p_x^v, q, x^f)$ contiene soltanto punti appartenenti alla frontiera di $X(q, x^f)$, cioè, $q = f(x^v, x^f)$ per ogni $x^v \in d^v(p_x^v, q, x^f)$. Perciò, l'insieme $d(p_x, q)$ contiene soltanto punti appartenenti alla frontiera di $X(q)$, cioè, $q = f(x)$ per ogni $x \in d(p_x, q)$.

Proposizione 5.18 Se l'insieme dei requisiti di input è strettamente convesso, se, cioè, la funzione di produzione è strettamente quasi-concava, allora l'insieme $d^v(p_x^v, q, x^f)$ è composto da un solo punto e sono continue entrambe le funzioni di domanda condizionale e di costo minimo.

Proposizione 5.19 La corrispondenza di domanda condizionale di input è omogenea di grado zero rispetto ai prezzi, cioè, $d^v(\alpha p_x^v, q, x^f) = d^v(p_x^v, q, x^f)$ per ogni $\alpha > 0$. Le funzioni di costo minimo sono omogenee di grado uno rispetto ai prezzi, cioè, $c_v^*(\alpha p_x^v, q, x^f) = \alpha c_v^*(p_x^v, q, x^f)$, $c^*(\alpha p_x, q, x^f) = \alpha c^*(p_x, q, x^f)$ e $c^*(\alpha p_x, q) = \alpha c^*(p_x, q)$ per ogni $\alpha > 0$.

Assumendo che la funzione di produzione sia differenziabile due volte, la scelta degli input può essere ricavata dal problema di minimo

$$\min_{x^v \in \mathbb{R}_+^v} p_x^v x^v \quad \text{sotto il vincolo } q = f(x^v, x^f)$$

introducendo la funzione lagrangiana

$$L(x^v, \lambda) = p_x^v x^v + \lambda (q - f(x^v, x^f))$$

Risultano, se la soluzione è interna, le condizioni del primo ordine

$$p_x^v - \lambda^* Df(x^{v*}, x^f) = 0 \quad q - f(x^{v*}, x^f) = 0$$

ove $Df(x^{v*}, x^f) = \left(\frac{\partial f(x^{v*}, x^f)}{\partial x_1^v}, \dots, \frac{\partial f(x^{v*}, x^f)}{\partial x_v^v} \right)$. Queste condizioni richiedono

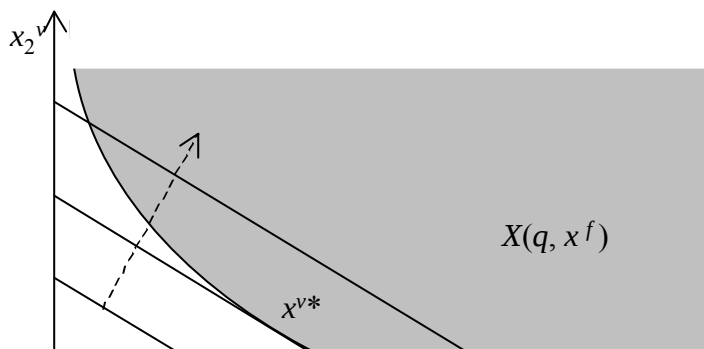
che la scelta x^{v*} stia sull'isoquanto q e che i saggi marginali di trasformazione tecnica in x^{v*} siano uguali alle pendenze degli isocosti

(cioè, $\frac{\partial f(x^{v*}, x^f)}{\partial x_j^v} / \frac{\partial f(x^{v*}, x^f)}{\partial x_h^v} = \frac{p_j^v}{p_h^v}$ per ogni coppia $j, h = 1, \dots, v$). Le

condizioni del secondo ordine concernono la forma quadratica vincolata

$$\alpha^T D^2(f(x^{v*}, x^f)) \alpha \quad \text{sotto il vincolo } p_x^v \alpha = 0$$

ove $D^2(f(x^{v*}, x^f))$ è la matrice hessiana della funzione di produzione rispetto a x^v valutata in x^{v*} . Se la forma quadratica è definita negativa, allora si ha un minimo costo locale e, se x^{v*} determina un minimo costo locale, allora la forma quadratica è semidefinita negativa. Il costo minimo si consegue con un unico x^{v*} (per cui si ha un minimo globale) se l'insieme dei requisiti di input è strettamente convesso, cioè, se la funzione di produzione è strettamente quasi-concava. La determinazione della scelta degli input è descritta, con due input variabili, nella Figura 5.19.



Definizione 5.9 L'assioma debole della minimizzazione del costo (WACM) richiede che la corrispondenza di domanda condizionale soddisfi la relazione:

se $x^{v'} \in d^v(p_x^{v'}, q', x^{f'})$ e $p_x^{v'} x^v < p_x^{v'} x^{v'}$,

allora $x^v \notin d^v(p_x^v, q, x^f)$ per ogni $p_x^v \in \mathbb{R}_{++}^v$, $q \geq q'$ e $x^f \leq x^{f'}$

In altre parole, se nella situazione rappresentata dalla terna $(p_x^{v'}, q', x^{f'})$ vengono scelti gli input $x^{v'}$ (perché minimizzano il costo di produzione), allora gli input x^v che determinerebbero un costo inferiore si rivelano impossibili, cioè, non consentono di ottenere la quantità di output q' (o una quantità maggiore) impiegando la quantità di input fissi $x^{f'}$ (o una quantità inferiore).

Nella Figura 5.20 sono rappresentate, nel caso con due input variabili, scelte che soddisfano l'assioma debole della minimizzazione del costo, nella Figura 5.21 scelte che non lo soddisfano.

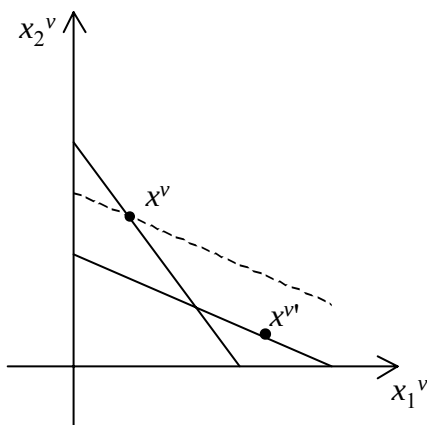


Figura 5.20

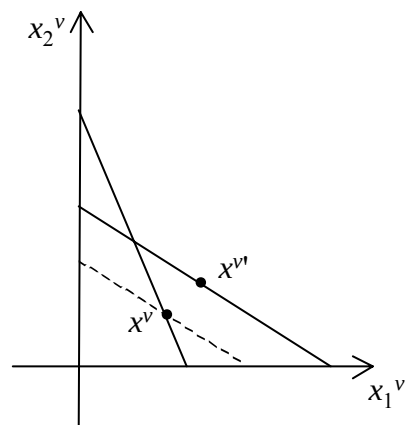


Figura 5.21

Proposizione 5.20 Prendendo in considerazione i prezzi $p_x^v \in \mathbb{R}_{++}^v$ per i quali la corrispondenza di domanda condizionale $d^v(p_x^v, q, x^f)$ è, rispetto a p_x^v , una funzione differenziabile, valgono la seguenti proprietà

$$\frac{\partial d_j^v}{\partial p_h^v} = \frac{\partial d_h^v}{\partial p_j^v} \text{ per ogni coppia } j, h = 1, \dots, v$$

$$\sum_{h=1}^v p_h \frac{\partial d_h^v}{\partial p_j^v} = 0 \text{ per ogni } j = 1, \dots, v$$

Proposizione 5.21 La corrispondenza di domanda condizionale è una relazione non crescente dei prezzi, ossia, per ogni coppia $x^v \in d^v(p_x^v, q, x^f)$ e $x^{v'} \in d^v(p_x^{v'}, q, x^f)$, vale la disuguaglianza

$$(p_x^{v'} - p_x^v)(x^{v'} - x^v) \leq 0$$

che implica, per ogni input, che la domanda condizionale è funzione non crescente del suo prezzo.

Proposizione 5.22 Prendendo in considerazione i prezzi $p_x^v \in \mathbb{R}_{++}^v$ per i quali la corrispondenza di domanda condizionale d^v è, rispetto a p_x^v , una funzione, vale la *relazione di Shephard* (1953)

$$d^v(p_x^v, q, x^f) = D_{p_x^v} c^*(p_x, q, x^f)$$

ossia, per ogni $j = 1, \dots, v$, $x_j^{v*} = \frac{\partial c^*}{\partial p_j^v}$.

Proposizione 5.23 Le funzioni di costo minimo $c_v^*(p_x^v, q, x^f)$, $c^*(p_x, q, x^f)$ e $c^*(p_x, q)$ sono non decrescenti e concave rispetto ai prezzi (p_x^v o p_x) degli input, su ogni insieme convesso (rispettivamente, in $\mathbb{R}_{++}^v$ o $\mathbb{R}_{++}^m$).

La proprietà di non decrescenza è immediata (ed implicata dalla Proposizione 5.22). La concavità può essere dimostrata in modo intuitivo, come illustrato nella Figura 5.22.

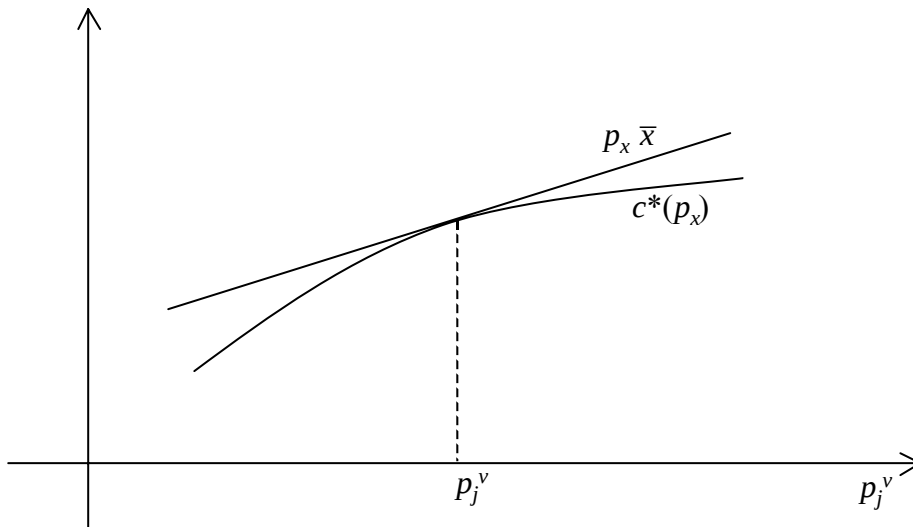


Figura 5.22

Essendo $c^* = p_x^v x^{v*} + p_x^f x^f$, con $x^{v*} \in d^v(p_x^v, q, x^f)$, se, al variare di p_x , da p_x a p_x' , si mantenesse x^{v*} immutato (si ponesse, cioè, $\bar{x}^v = x^{v*}$), il costo varierebbe linearmente con i prezzi, e sarebbe non inferiore al costo minimo $c^*(p_x', q, x^f)$. Conseguentemente,

$$c^*(p_x', q, x^f) - c^*(p_x, q, x^f) \leq (p_x' - p_x) x^{v*}$$

per ogni $x^{v*} \in d^v(p_x^v, q, x^f)$, che è la condizione di concavità, rispetto ai prezzi degli input, per le funzioni di costo minimo.

Proposizione 5.24 Le funzioni di costo minimo $c_v^*(p_x^v, q, x^f)$, $c^*(p_x, q, x^f)$ e $c^*(p_x, q)$ sono non decrescenti rispetto a q e sono, rispetto a q , funzioni continue se la funzione di produzione $q = f(x^v, x^f)$ è continua rispetto a x^v , inoltre, convesse (concave) se la funzione di produzione è concava (convessa) rispetto a x^v . Il costo marginale dell'output $MC(p_x, q, x^f) = \frac{\partial c^*}{\partial q}$ è legato al costo medio (sia questo il costo medio totale $AC = c^*/q$

o quello variabile $AC_v = c_v^*/q$) dalla relazione $\frac{\partial AC}{\partial q} = \frac{1}{q}(MC - AC)$ ed è

$MC(p_x, 0, x^f) = AC_v(p_x, 0, x^f)$. Il costo marginale è legato alle produttività marginali degli input dalla relazione $MC = p_j^v / PM_j^v$ per ogni $j = 1, \dots, v$,

ove $PM_j^v(p_x, q, x^f) = \frac{\partial f(x^{v*}, x^f)}{\partial x_j^v}$, ossia, $MC(p_x, q, x^f) = \lambda^*$ (ove λ^* è il

moltiplicatore di Lagrange del problema sopraindicato del costo minimo).

Dimostrazione. La dimostrazione che la concavità della funzione di produzione induce la convessità delle funzioni di costo minimo c^* rispetto a q può essere ottenuta nel modo seguente. Si prenda una coppia q, q' di quantità di output. Siano x^* e $x^{*'}$ i corrispondenti panieri di input di costo minimo, perciò con $q = f(x^*)$, $q' = f(x^{*'})$, $c^*(q) = p_x x^*$ e $c^*(q') = p_x x^{*'}$. Essendo la funzione di produzione concava, si ha $q'' = f(\lambda x^* + (1-\lambda)x^{*'}) \geq \lambda q + (1-\lambda)q'$ per ogni $\lambda \in [0, 1]$, con $c^*(q'') = \lambda c^*(q) + (1-\lambda)c^*(q')$. Essendo le funzioni di costo minimo non decrescenti rispetto a q (sostanzialmente, per l'ipotesi di *free disposal*), si ha $c^*(\lambda q + (1-\lambda)q') \leq c^*(q'') = \lambda c^*(q) + (1-\lambda)c^*(q')$ per ogni $\lambda \in [0, 1]$, cioè, che ogni funzione di costo minimo è convessa. La relazione tra costo marginale e costo medio si ottiene derivando rispetto a q la relazione $AC(q) = c^*(q)/q$. Da questa stessa relazione, nella specificazione che include solo gli input variabili, cioè, $AC_v(q) = c_v^*(q)/q$, considerandone il limite per q tendente a zero, si ottiene l'uguaglianza $AC_v(p_x, 0, x^f) = MC(p_x, 0, x^f)$. Il legame tra costo marginale dell'output e produttività marginale degli input può essere ottenuto tramite le condizioni del primo ordine del problema di minimizzazione del costo: essendo $dc = p_x dx$, $dq = Df(x) dx$ e, per le condizioni del primo ordine, $p_x = \lambda^* Df(x^*)$, si ottiene $dc^* = \lambda^* dq$, cioè, $MC(p_x, q, x^f) =$

$$\lambda^* \text{ e } MC(p_x, q, x^f) = p_j^v \left/ \frac{\partial f(x^{v*}, x^f)}{\partial x_j^v} \right. \text{ per ogni } j = 1, \dots, v. \quad \square$$

In generale, la corrispondenza di domanda condizionale $d^v(p_x^v, q, x^f)$ non presenta, rispetto a q , caratteristiche particolari, non è neppure sempre non decrescente (può accadere, cioè, che convenga ridurre, al crescere di q , la quantità di qualche input, sostituita dalla quantità maggiore di un altro).

Proposizione 5.25 Se la funzione di produzione è omotetica (ossia, come indicato nel Paragrafo 5.1, se è $f(x) = g(h(x))$ con $h(\cdot)$ funzione omogenea di grado uno e $g(\cdot)$ funzione monotona), e tutti gli input sono variabili, allora, indicando con $\gamma(\cdot)$ la funzione

inversa $g^{-1}(\cdot)$, per cui $\gamma(q) = h(x)$, inoltre, con $\gamma(\cdot)$ convessa (concava) se $g(\cdot)$ concava (convessa), si ha

$$\frac{1}{x_j^*} \frac{\partial x_j^*}{\partial q} = \frac{1}{\gamma(q)} \frac{d\gamma(q)}{dq} \quad \text{per ogni } j = 1, \dots, m$$

e, quindi,
$$\frac{1}{x_j^*} \frac{\partial^2 x_j^*}{\partial q^2} = \frac{1}{\gamma(q)} \frac{d^2 \gamma(q)}{dq^2} \quad \text{per ogni } j = 1, \dots, m.$$

Analogamente, per la funzione di costo minimo $c^* = p_x x^*$, si ha

$$\frac{1}{c^*} \frac{\partial c^*}{\partial q} = \frac{1}{\gamma(q)} \frac{d\gamma(q)}{dq} \quad \frac{1}{c^*} \frac{\partial^2 c^*}{\partial q^2} = \frac{1}{\gamma(q)} \frac{d^2 \gamma(q)}{dq^2}$$

cioè, le variazioni relative degli input rispetto all'output (che sono positive) sono tutte uguali tra loro e uguali a quella del costo minimo. Inoltre, le funzioni di domanda condizionale degli input e la funzione di costo minimo sono concave o convesse rispetto all'output a seconda che la funzione $g(\cdot)$ sia convessa o concava.

Dimostrazione. Le variazioni relative degli input sono uguali tra loro poiché la funzione di produzione omotetica richiede che i rapporti x_j^*/x_h^* non dipendano, a parità dei prezzi degli input, da q . Poi, essendo $\gamma(q) = h(x) = \prod_{j=1}^m x_j^{a_j}$ con $\sum_{j=1}^m a_j = 1$, si ha

$$\frac{d\gamma(q)}{dq} = \gamma(q) \sum_{j=1}^m \frac{a_j}{x_j^*} \frac{\partial x_j^*}{\partial q} = \gamma(q) \frac{1}{x_j^*} \frac{\partial x_j^*}{\partial q} \quad \text{per ogni } j = 1, \dots, m.$$

Derivando rispetto a q questa relazione e tenendo conto di essa si ottiene $\frac{d^2 \gamma(q)}{dq^2} = \gamma(q) \frac{1}{x_j^*} \frac{\partial^2 x_j^*}{\partial q^2}$. Essendo,

poi, $c^* = p_x x^*$, derivando rispetto a q , si ha $\frac{\partial c^*}{\partial q} = p_x D_q x^* = p_x x^* \frac{1}{\gamma(q)} \frac{d\gamma(q)}{dq}$. Dalla

derivata di questa relazione rispetto a q si ottiene l'ultima relazione dell'enunciato. $\square$

Nel caso in cui vi sono input fissi, la funzione di costo minimo variabile $c_v^*(p_x^v, q, x^f)$ risulta, per l'ipotesi *free disposal*, non crescente rispetto alle quantità degli input fissi x^f (questo non è in generale vero per il costo minimo totale $c^*(p_x, q, x^f) = c_v^*(p_x^v, q, x^f) + p_x^f x^f$ e neppure per la domanda condizionale $d^v(p_x^v, q, x^f)$). Vi sono, però, relazioni interessanti in riferimento alla scelta, nel lungo periodo, delle quantità degli input fissi. Poiché questa scelta minimizza il costo di produzione, indicando con x^{f*} la quantità ottima (che minimizza nel lungo periodo il costo, cioè, $x^{f*} \in \arg \min_{x^f \in \mathbb{R}_+^{m-v}} c^*(p_x, q, x^f)$), si ha, oltre che $c^*(p_x, q, x^{f*}) = c^*(p_x, q)$, anche

$c^*(p_x, q, x^{f*}) \leq c^*(p_x, q, x^f)$ per ogni $x^f \in \mathbb{R}_+^{m-v}$. Ovviamente, la stessa relazione vale per i costi medi (definiti dal rapporto tra il costo di produzione e la quantità di output prodotto), cioè, $AC(p_x, q, x^{f*}) = AC(p_x, q)$ e $AC(p_x, q, x^{f*}) \leq AC(p_x, q, x^f)$. Indicando con il simbolo $c_{LR}(q)$ il costo minimo di produzione di lungo periodo $c^*(p_x, q) = c^*(p_x, q, x^{f*})$, quello di breve periodo $c^*(p_x, q, x^f)$ con $c_{SR}(q, x^f)$ e i rispettivi costi medi con $AC_{LR}(q)$ e $AC_{SR}(q, x^f)$, si ha, allora, $c_{LR}(q) \leq c_{SR}(q, x^f)$ e $AC_{LR}(q) \leq AC_{SR}(q, x^f)$ per ogni $x^f \in \mathbb{R}_+^{m-v}$. Le disuguaglianze sono eguaglianze se e solo se $x^f = x^{f*}$. Si ha, cioè, $c_{LR}(q) = c_{SR}(q, x^{f*})$ e $AC_{LR}(q) = AC_{SR}(q, x^{f*})$. In altri termini, le funzioni $c_{LR}(q)$ e $AC_{LR}(q)$ sono, rispettivamente,

l'involuppo⁹ delle funzioni $c_{SR}(q, x^f)$ e $AC_{SR}(q, x^f)$, come descritto nelle Figure 5.23 e 5.24 (considerando, perciò, solo gli input fissi ottimali per almeno una produzione, tali, cioè, che esiste almeno un q per cui $c_{LR}(q) = c_{SR}(q, x^{f*})$, ossia, escludendo gli x^f per cui $c_{LR}(q) < c_{SR}(q, x^f)$ per ogni q).

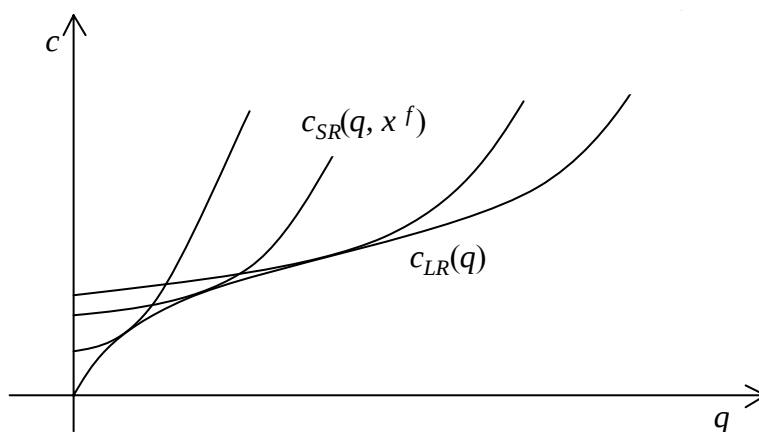


Figura 5.23

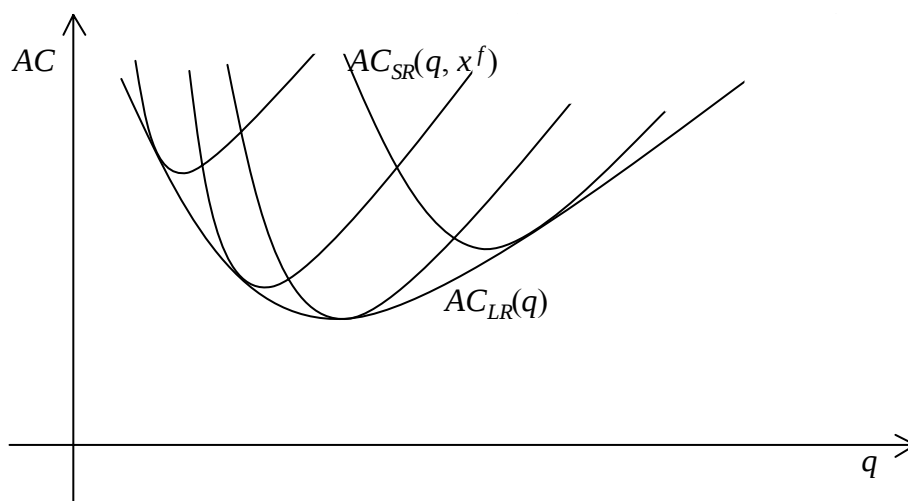


Figura 5.24

⁹ L'involuppo di una famiglia di curve è una curva che tocca, in ciascuno dei suoi punti, una curva della famiglia. Definisca la relazione $F(x, y, a) = 0$ una famiglia di curve: per ogni valore del parametro a vi è una curva. L'involuppo di questa famiglia soddisfa il sistema $F(x, y, a) = 0$, $\frac{\partial F(x, y, a)}{\partial a} = 0$. Allora, eliminando (se possibile) il parametro a , si ottiene da questo sistema l'involuppo. Se a è un vettore di parametri, il sistema precedente diviene $F(x, y, a) = 0$, $D_a F(x, y, a) = 0$.

La Figura 5.23 mostra come le curve di costo minimo di lungo e breve periodo siano tangenti in un punto. In esso i costi di lungo e breve periodo coincidono, per cui gli input fissi che definiscono la curva di breve periodo sono ottimali, nel senso che per produrre quella quantità di output (che è l'ascissa del punto di tangenza) quantità diverse di input fissi non possono ridurre il costo di produzione. Inoltre, essendo un punto di tangenza, le pendenze delle due curve di costo minimo sono uguali tra loro. Questo implica che il costo marginale di lungo periodo coincide con quello di breve periodo (per la quantità di output q'), se, nel breve periodo considerato, gli input fissi sono ottimali (per produrre quella quantità di output q'). Ossia, indicando il costo marginale di lungo periodo con $MC_{LR}(q)$ e quello di breve periodo con $MC_{SR}(q, x^f)$, si ha $MC_{LR}(q) = MC_{SR}(q, x^{f*})$ se $x^{f*} \in \arg \min_{x^f \in \mathbb{R}_+^{m-v}} c_{SR}(q, x^f)$. (Questa condizione sufficiente non è necessaria.

Può accadere che $MC_{LR}(q) = MC_{SR}(q, x^{f'})$ con $x^{f'} \notin \arg \min_{x^f \in \mathbb{R}_+^{m-v}} c_{SR}(q, x^f)$.

Nella stessa figura, si vede come la curva di lungo periodo abbia, nel punto di tangenza, curvatura non superiore alla curva di breve periodo. Allora, la curva del costo marginale di breve periodo, nel punto in cui taglia quella di lungo periodo perché ha input fissi ottimali, ha pendenza non inferiore a questa. Ossia, per $x^{f*} \in \arg \min_{x^f \in \mathbb{R}_+^{m-v}} c_{SR}(q, x^f)$, si ha $\frac{dMC_{LR}(q)}{dq} \leq \frac{\partial MC_{SR}(q, x^{f*})}{\partial q}$,

oltre che $MC_{LR}(q) = MC_{SR}(q, x^{f*})$. La Figura 5.25 illustra la relazione tra i costi marginali di breve e di lungo periodo.

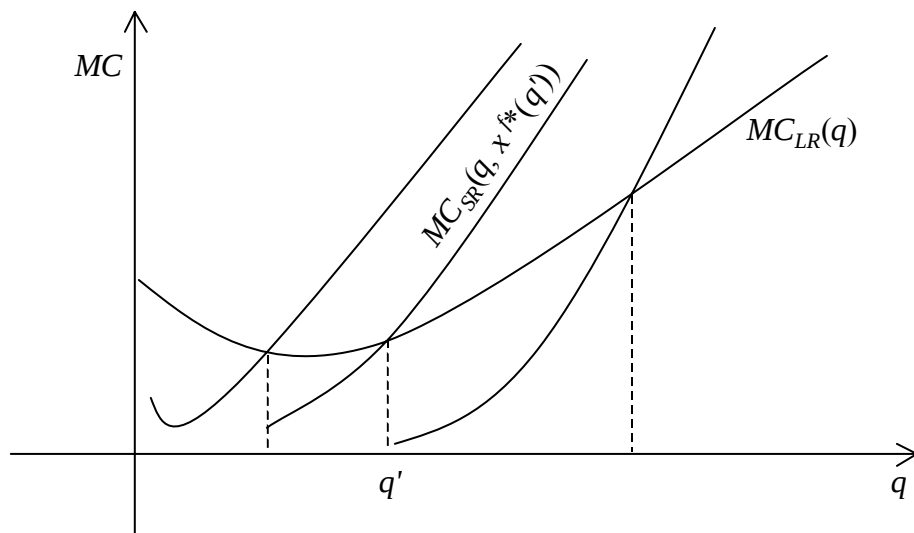


Figura 5.25

Le relazioni tra il costo minimo di produzione di lungo periodo e quelli di breve periodo sono sintetizzate (e dimostrate analiticamente) con la proposizione seguente.

Proposizione 5.26 Indicando il costo minimo di produzione di lungo periodo $c^*(p_x, q, x^{f*})$ con $c_{LR}(q)$, con $c_{SR}(q, x^f)$ quello di breve periodo

$c^*(p_x, q, x^f)$ e con x^{f*} la quantità di input fissi che minimizza il costo di breve periodo (per cui $x^{f*} \in \arg \min_{x^f \in \mathbb{R}_+^{m-v}} c_{SR}(q, x^f)$, cioè, $x^{f*} = x^{f*}(q)$), si ha

$$c_{LR}(q) = c_{SR}(q, x^{f*}), \quad MC_{LR}(q) = MC_{SR}(q, x^{f*}), \quad \frac{dMC_{LR}(q)}{dq} \leq \frac{\partial MC_{SR}(q, x^{f*})}{\partial q}$$

Dimostrazione. La scelta nel lungo periodo delle quantità x^f (input fissi nel breve periodo) viene qui ottenuta minimizzando la funzione $c_{SR}(q, x^f)$ rispetto a x^f . Allora,

$$c_{LR}(q) = \min_{x^f \in \mathbb{R}_+^{m-v}} c_{SR}(q, x^f) = c_{SR}(q, x^{f*})$$

Le condizioni del primo ordine richiedono $D_{x^f} c_{SR}(q, x^{f*}) = 0$ e quelle del secondo ordine

che la matrice hessiana $D_{x^f, x^f}^2 c_{SR}(q, x^{f*})$ sia semidefinita positiva. Le condizioni del primo ordine determinano, implicitamente, le funzioni $x^{f*}(q)$. Inoltre, denotano che la funzione di costo minimo di lungo periodo è l'involuppo della famiglia delle funzioni di costo minimo di breve periodo, ciascuna delle quali è determinata dai parametri x^f .

Derivando rispetto a q le condizioni del primo ordine, si ottiene la relazione $D_{x^f, q}^2 c_{SR} +$

$D_{x^f, x^f}^2 c_{SR} D_q x^{f*} = 0$ e, quindi, $D_{x^f, q}^2 c_{SR} = -D_{x^f, x^f}^2 c_{SR} D_q x^{f*}$. Si derivi ora la relazione $c_{LR}(q) = c_{SR}(q, x^{f*})$ rispetto a q , tenendo conto che $x^{f*} = x^{f*}(q)$ (relazione questa, espressa in forma implicita dalle condizioni del primo ordine). La derivata prima richiede (tenendo conto delle condizioni del primo ordine)

$$D_q c_{LR}(q) = D_q c_{SR}(q, x^{f*}) + D_{x^f} c_{SR}(q, x^{f*}) D_q x^{f*}(q) = D_q c_{SR}(q, x^{f*})$$

ossia, $MC_{LR}(q) = MC_{SR}(q, x^{f*})$ per $x^{f*} \in \arg \min_{x^f \in \mathbb{R}_+^{m-v}} c_{SR}(q, x^f)$. La derivata seconda richiede

(tenendo conto dell'implicazione suinducata delle condizioni del primo ordine e delle condizioni del secondo ordine)

$$D_{q, q}^2 c_{LR} = D_{q, q}^2 c_{SR} + D_{x^f, q}^2 c_{SR} D_q x^{f*}(q) = D_{q, q}^2 c_{SR} - (D_q x^{f*})^T D_{x^f, x^f}^2 c_{SR} D_q x^{f*} \leq D_{q, q}^2 c_{SR}$$

$$\text{ossia, } \frac{dMC_{LR}(q)}{dq} \leq \frac{\partial MC_{SR}(q, x^{f*})}{\partial q} \text{ per } x^{f*} \in \arg \min_{x^f \in \mathbb{R}_+^{m-v}} c_{SR}(q, x^f). \quad \square$$

Le proprietà più rilevanti della corrispondenza di domanda condizionale di input e delle funzioni di costo minimo sono riassunte dalla Proposizione 5.27.

Proposizione 5.27 Sia la funzione di produzione $q = f(x^v, x^f)$ continua e il conseguente insieme dei requisiti di input $X(q)$ non vuoto, chiuso, inclusivo verso l'alto e non crescente rispetto a q . Allora, la corrispondenza di domanda condizionale di input $d^v(p_x^v, q, x^f)$ (con $d^v(p_x^v, q, x^f) = d(p_x^v, q)$ per $v = m$) e le funzioni di costo minimo variabile $c_v^*(p_x^v, q, x^f)$, totale di breve periodo $c^*(p_x, q, x^f)$ e di lungo periodo $c^*(p_x, q)$ presentano le seguenti proprietà per ogni $p_x \in \mathbb{R}_{++}^m$:

a) la corrispondenza $d^v(p_x^v, q, x^f)$ è omogenea di grado zero rispetto a p_x^v (Proposizione 5.19).

b) l'insieme $d^v(p_x^v, q, x^f)$ è composto da un solo punto per ogni $p_x \in \mathbb{R}_{++}^m$ e la funzione di domanda condizionale $d^v(p_x^v, q, x^f)$ è continua se l'insieme $X(q, x^f)$ è strettamente convesso (Proposizione 5.18).

c) per ogni p_x^v per cui la corrispondenza di domanda condizionale $d^v(p_x^v, q, x^f)$ è una funzione differenziabile, la matrice $D_{p_x^v} d^v(p_x^v, q, x^f)$ è simmetrica, semidefinita negativa e tale che $(D_{p_x^v} d^v(p_x^v, q, x^f)) p_x^v = 0$ (Proposizioni 5.20 e 5.21).

d) le funzioni $c_v^*(p_x^v, q, x^f)$, $c^*(p_x, q, x^f)$ e $c^*(p_x, q)$ sono omogenee di grado uno, continue e concave rispetto ai prezzi (Proposizioni 5.19 e 5.23).

e) per ogni $p_x^v \in \mathbb{R}_{++}^v$ ove $d^v(p_x^v, q, x^f)$ è composto da un solo punto, si ha $D_{p_x^v} c^*(p_x, q, x^f) = d^v(p_x^v, q, x^f)$ (Proposizione 5.22).

f) le funzioni di costo minimo di produzione sono continue e non decrescenti rispetto a q e sono, sempre rispetto a q , convesse (concave) se la funzione di produzione $q = f(x^v, x^f)$ è concava (convessa) rispetto a x^v (Proposizione 5.24).

g) per ogni $x^{f*} \in \arg \min_{x^f \in \mathbb{R}_+^{m-v}} c^*(p_x, q, x^f)$, si ha $\min_{x^f \in \mathbb{R}_+^{m-v}} c^*(p_x, q, x^f) = c^*(p_x, q)$, $\frac{\partial c^*(p_x, q, x^{f*})}{\partial q} = \frac{\partial c^*(p_x, q)}{\partial q}$ e $\frac{\partial^2 c^*(p_x, q, x^{f*})}{\partial q^2} \geq \frac{\partial^2 c^*(p_x, q)}{\partial q^2}$ (Proposizione 5.26).

5.11 La funzione di offerta di output

Dopo aver determinato la scelta degli input e la funzione di costo minimo (completato, cioè, il primo stadio del processo indicato all'inizio del Paragrafo 5.9) si può determinare la scelta della quantità dell'output in modo da massimizzare il profitto prendendo in considerazione, nel breve periodo, il problema

$$\max_{q \in \mathbb{R}_+ : X(q, x^f) \neq \emptyset} \pi(q, p_q, p_x, x^f)$$

ove $\pi(q, p_q, p_x, x^f) = p_q q - c^*(p_x, q, x^f) = p_q q - c_v^*(p_x^v, q, x^f) - p_x^f x^f$ è una funzione continua di q (per la Proposizione 5.24), e, nel lungo periodo, il problema

$$\max_{q \in \mathbb{R}_+ : X(q) \neq \emptyset} \pi(q, p_q, p_x)$$

ove $\pi(q, p_q, p_x) = p_q q - c^*(p_x, q)$. Si tenga presente che, se la scelta $q = 0$ è possibile (come sarà ipotizzato nel seguito, cioè, $X(0, x^f) \neq \emptyset$), con questa scelta risulta, rispettivamente, $\pi(0, p_q, p_x, x^f) = -p_x^f x^f$ e $\pi(0, p_q, p_x) = 0$.

Il problema $\max_{q \in \mathbb{R}_+ : X(q, x^f) \neq \emptyset} p_q q - c_v^*(p_x^v, q, x^f) - p_x^f x^f$ non sempre ammette soluzione, come indicato all'inizio del Paragrafo 5.3. Se ammette soluzione e la funzione di costo minimo $c_v^*(p_x^v, q, x^f)$ è differenziabile due volte, risultano le condizioni del primo ordine e del secondo ordine seguenti

$$p_q = \frac{\partial c_v^*(p_x^v, q, x^f)}{\partial q} \quad \frac{\partial^2 c_v^*(p_x^v, q, x^f)}{\partial q^2} \geq 0$$

cioè, $p_q = MC_{SR}(q, x^f)$ e $\frac{\partial MC_{SR}(q, x^f)}{\partial q} \geq 0$.

Risulta anche definita la *funzione di profitto massimo di breve periodo*

$$\pi^*(p_q, p_x, x^f) = \max_{q \in \mathbb{R}_+ : X(q, x^f) \neq \emptyset} \pi(q, p_q, p_x, x^f)$$

e la *corrispondenza di offerta di output di breve periodo* $q = s(p_q, p_x, x^f)$

$$q = \arg \max_{q \in \mathbb{R}_+ : X(q, x^f) \neq \emptyset} \pi(q, p_q, p_x, x^f)$$

Proposizione 5.28 Analogamente a quanto dimostrato per la scelta di produzione, la corrispondenza di offerta $s(p_q, p_x, x^f)$ è omogenea di grado zero rispetto ai prezzi ed è non decrescente rispetto al prezzo dell'output p_q . La funzione di profitto massimo $\pi^*(p_q, p_x, x^f)$ è omogenea di grado uno e convessa rispetto ai prezzi, non decrescente rispetto a p_q , e, per ogni p_q per cui $s(p_q, p_x, x^f)$ ha un solo valore, si ha $D_{p_q} \pi^*(p_q, p_x, x^f) = s(p_q, p_x, x^f)$.

Tenendo conto che $\pi(0, p_q, p_x, x^f) = -p_x^f x^f$ e che la funzione di profitto massimo $\pi^*(p_q, p_x, x^f)$ e la corrispondenza di offerta $s(p_q, p_x, x^f)$ sono non decrescenti rispetto a p_q , risulta che $\pi^*(p_q, p_x, x^f) \geq -p_x^f x^f$ per ogni $p_q \geq 0$ e che $\pi^*(p_q', p_x, x^f) = -p_x^f x^f$ implica $\pi^*(p_q, p_x, x^f) = -p_x^f x^f$ e $s(p_q, p_x, x^f) = 0$ per ogni $p_q < p_q'$.

Il massimo prezzo p_q per cui $\pi^*(p_q, p_x, x^f) = -p_x^f x^f$, indicato talvolta come *prezzo di chiusura*, è, allora, quel prezzo p_q^* rispetto a cui si ha $\pi^*(p_q, p_x, x^f) > -p_x^f x^f$ per ogni $p_q > p_q^*$ e $s(p_q, p_x, x^f) = 0$ per ogni $p_q < p_q^*$. Ovviamente, il prezzo di chiusura dipende dai prezzi degli input e dagli input fissi, ossia, $p_q^* = p_q^*(p_x, x^f)$.

Proposizione 5.29 Se $q^* \in s(p_q^*, p_x, x^f)$ con $p_q^* = MC_{SR}(q^*, x^f)$, allora $p_q^* = AC_v(q^*, x^f) = \min_q AC_v(q, x^f)$.

Dimostrazione. Essendo $q^* \in s(p_q^*, p_x, x^f)$, risulta $\pi^*(p_q^*, p_x, x^f) = p_q^* q^* - c^*(p_x, q^*, x^f) = -p_x^f x^f$, ossia, $p_q^* q^* = c_v^*(p_x^v, q^*, x^f)$ e, quindi, $p_q^* = AC_v(q^*, x^f)$. Perciò, essendo anche $p_q^* = MC_{SR}(q^*, x^f)$, si ha che

$$AC_v(q^*, x^f) = MC_{SR}(q^*, x^f) \text{ con } \frac{\partial MC_{SR}(q^*, x^f)}{\partial q} \geq 0, \text{ cioè, che il costo medio è}$$

uguale al costo marginale in un punto in cui questo è crescente.¹⁰ □

La Proposizione 5.29 implica che se vi è più di un $q^* \in s(p_q^*, p_x, x^f)$ con $p_q^* = MC_{SR}(q^*, x^f)$, allora essi hanno tutti lo stesso costo medio

¹⁰ Ciò è possibile se e solo se il costo medio è, in quel punto, minimo (questa è una implicazione della Proposizione 5.24) Infatti, derivando la relazione $\frac{dAC(q)}{dq} = \frac{1}{q}(MC(q) - AC(q))$ si ottiene

$$\frac{d^2 AC(q)}{dq^2} = -\frac{1}{q^2} (MC(q) - AC(q)) + \frac{1}{q} \left(\frac{dMC(q)}{dq} - \frac{dAC(q)}{dq} \right) \text{ per}$$

$$\text{cui, se } MC(q^*) = AC(q^*), \text{ allora } \frac{d^2 AC(q^*)}{dq^2} = \frac{1}{q^*} \frac{dMC(q^*)}{dq} \geq 0.$$

variabile $AC_v(q^*, x^f)$. Dalla Proposizione 5.29, assumendo che la funzione di costo minimo $c_v^*(p_x^v, q, x^f)$ sia differenziabile due volte, consegue la proposizione seguente.

Proposizione 5.30 La corrispondenza di offerta $s(p_q, p_x, x^f) = \arg \max_{q \in \mathbb{R}_+ : X(q, x^f) \neq \emptyset} \pi(q, p_q, p_x, x^f)$ coincide con la funzione $q = 0$ per $p_q < \min_q AC_v(q, x^f)$; per $p_q = \min_q AC_v(q, x^f) = p_q^*$, è composta, oltre che dal punto $q = 0$, dai punti q^* che soddisfano la condizione $\min_q AC_v(q^*, x^f) = p_q^*$; e, per $p_q > \min_q AC_v(q, x^f)$, è composta da punti q (però, non sempre tutti i punti) che soddisfano le condizioni $p_q = MC_{SR}(q, x^f)$, $\frac{\partial MC_{SR}(q^*, x^f)}{\partial q} \geq 0$ e $MC_{SR}(q, x^f) > AC_v(q, x^f)$.

La Figura 5.26 descrive la corrispondenza di offerta in un caso, relativamente semplice, in cui la funzione del costo medio variabile ha un solo minimo e la funzione del costo marginale è monotona per quantità q superiori a quella di minimo costo medio variabile. (Ancora più semplice è il caso determinato da una funzione di produzione $q = f(x^v, x^f)$ strettamente concava rispetto a x^v . Sotto questa condizione, la funzione di costo minimo è strettamente convessa e, quindi, la funzione del costo marginale è monotona crescente. Allora, la corrispondenza di offerta è una funzione pari a $q = 0$ per $p_q \leq p_q^*$ e crescente per $p_q > p_q^*$, ove è espressa dalla funzione inversa $p_q = MC_{SR}(q, x^f)$).

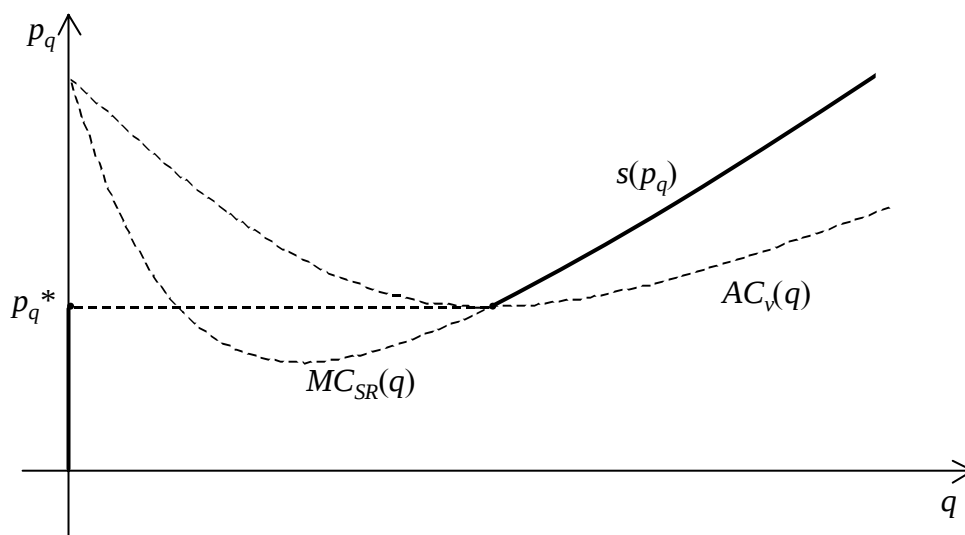


Figura 5.26

Le medesime relazioni valgono, con le opportune modificazioni, per il lungo periodo. Si ha la *funzione di profitto massimo di lungo periodo*

$$\pi^*(p_q, p_x) = \max_{q \in \mathbb{R}_+ : X(q) \neq \emptyset} \pi(q, p_q, p_x)$$

e la corrispondenza di offerta di output di lungo periodo $q = s(p_q, p_x)$

$$q = \arg \max_{q \in \mathbb{R}_+ : X(q) \neq \emptyset} \pi(q, p_q, p_x)$$

mentre il prezzo di chiusura di lungo periodo $p_q^*(p_x)$ risulta determinato dalla condizione $p_q^* = \min_q AC(q)$, che implica $\pi^*(p_q^*, p_x) = 0$.

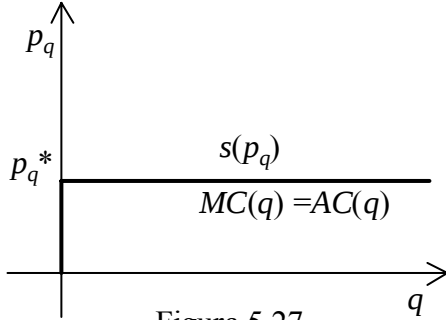


Figura 5.27

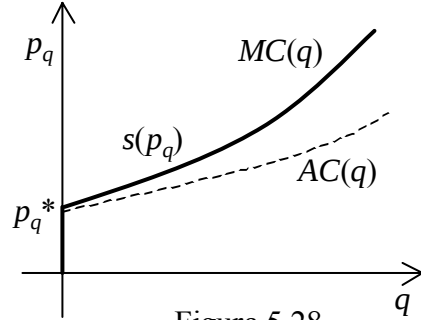


Figura 5.28

Nelle Figure 5.27 e 5.28 sono rappresentate le funzioni di offerta dell'output corrispondenti alle funzioni di produzione degli insiemi rappresentati nelle Figure 5.1 e 5.6 (la funzione di offerta della Figura 5.26 corrisponde alla Figura 5.8).

Anche le relazioni tra il breve e il lungo periodo per le funzioni di profitto e le corrispondenze di offerta sono dello stesso tipo di quelle già individuate alla fine del paragrafo precedente. La funzione (rispetto a p_q) di profitto di lungo periodo $\pi^*(p_q, p_x)$ è l'involuppo delle funzioni di profitto di breve periodo $\pi^*(p_q, p_x, x^f)$. Ciascuna di queste (sempre che non sia $c_{LR}(q) < c_{SR}(q, x^f)$ per ogni q) tocca la precedente in corrispondenza al prezzo p_q' per cui $x^f = x^{f*}(q')$ con $q' \in s(p_q', p_x)$. Le corrispondenze di offerta di breve periodo $s(p_q, p_x, x^f)$ (formate, per $p_q > p_q^*(p_x)$, da tratti delle corrispondenti funzioni di costo marginale), se intersecano la corrispondenza di offerta di lungo periodo $s(p_q, p_x)$ (formata, per $p_q > p_q^*(p_x)$, da tratti della funzione di costo marginale di lungo periodo), la intersecano in corrispondenza al prezzo p_q' appena definito e hanno, in questo punto, pendenza non inferiore a quella della funzione di lungo periodo. Nella Figura 5.29 sono rappresentate la corrispondenza di offerta di lungo periodo ed una di breve periodo che interseca la precedente (ovviamente, nel punto di intersezione, la funzione di offerta di lungo periodo ha pendenza non superiore a quella di breve periodo, perché così è per le funzioni di costo marginale).

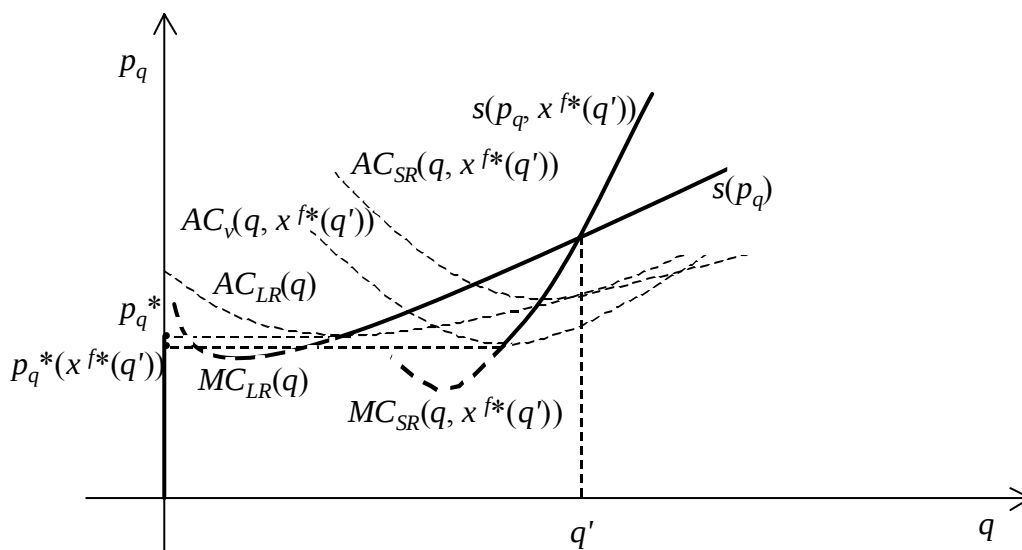


Figura 5.29

Se vi è libertà di entrata (situazione talvolta indicata come *lunghissimo periodo*), allora, seguendo l'analisi del Paragrafo 5.8, vi è l'insieme aggregato di produzione $\hat{Y}$ e la sua funzione di costo minimo $c^*(p_x, q)$ risulta essere proporzionale alla quantità di output q , è, cioè, del tipo $c^*(p_x) q$, perciò con costo medio e marginale dell'impresa rappresentativa costanti (ed uguali tra loro). Ne consegue che la corrispondenza di offerta $q = s(p_q, p_x)$ indica una quantità di output nulla per $p_q < p_q^*(p_x)$ ed è infinitamente elastica per $p_q = p_q^*(p_x)$. Nelle Figure 5.30 e 5.31 sono rappresentate, rispettivamente, le corrispondenze di offerta della singola impresa e quella aggregata.

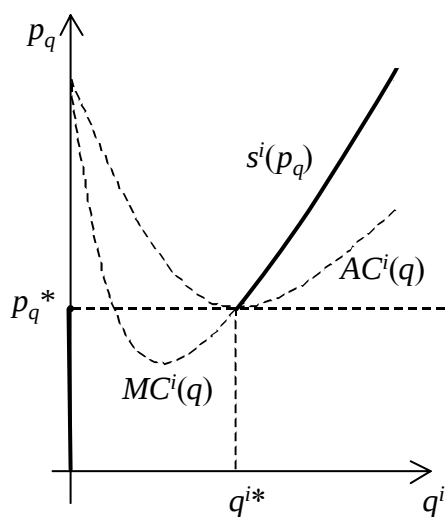


Figura 5.30

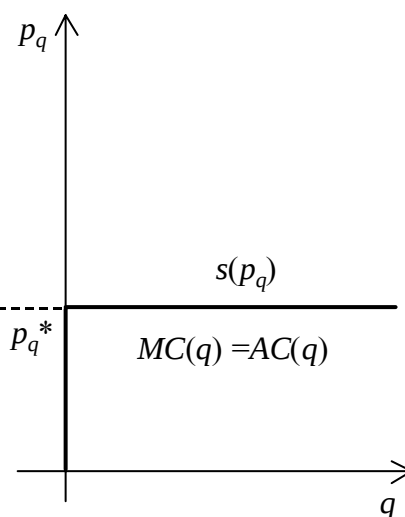


Figura 5.31

La funzione di produzione della singola impresa è assunta, nella Figura 5.30, tale da determinare una curva di costo medio ad U, per cui la quantità prodotta dalla singola impresa attiva è determinata (pari a q_i^*), mentre quella aggregata è indeterminata. Questa viene determinata dalla domanda del bene prodotto, che determina il numero delle imprese attive (se q^* è la quantità domandata in corrispondenza al prezzo p_q^* , allora il numero delle imprese attive è $\ell^* = q^*/q_i^*$). (Questa presentazione dell'offerta aggregata con libertà di entrata è subordinata all'ipotesi di comodo che il numero delle imprese attive sia un numero reale, invece che un numero intero).

L'analisi precedente è anche subordinata all'ipotesi che i prezzi p_x degli input siano costanti al variare della quantità prodotta q . Questa ipotesi è implicita per la singola impresa: questa non ha potere di mercato, è, cioè, *price-taker*, se non può influire, con le sue scelte, sui prezzi. Nulla vieta però che la presenza di un numero variabile di imprese determini prezzi variabili degli input. In altri termini, i prezzi degli input non dipendono, per l'ipotesi che ciascuna impresa sia *price-taker*, dalla quantità di input domandata dalla singola impresa, possono però dipendere dalla quantità domandata complessivamente dalle imprese dell'industria. Se i prezzi degli input variano al crescere della quantità q prodotta complessivamente dalle imprese in modo da innalzare il costo medio di produzione di ciascuna impresa, allora risulta una funzione di offerta $s(p_q)$ crescente limitatamente, cioè, con elasticità finita (anziché infinita). (Nella Figura 5.31 si osserverebbe, una funzione $s(p_q)$ non più orizzontale, ma, almeno da un certo punto in poi, crescente). Può anche accadere per qualche input che una maggiore richiesta da parte delle imprese in esame ne riduca il prezzo (se, ad esempio, questo input è prodotto con rendimenti di scala crescenti e, quindi, viene venduto su un mercato non concorrenziale) e che esso sia così rilevante per la produzione delle imprese in esame da indurre una riduzione del loro costo medio di produzione. In tal caso, la funzione di offerta $s(p_q)$ si presenta decrescente.

5.12 Il progresso della tecnologia e la scelta di produzione

La scelta di produzione (e, quindi, le funzioni di offerta e di profitto massimo) non dipende soltanto dai prezzi, come analizzato finora, ma anche dall'insieme di produzione, ed è particolarmente interessante esaminare l'influenza su di essa del progresso della tecnologia, che è uno dei maggiori fattori di cambiamento dell'economia. Questo progresso introduce nuove produzioni possibili, amplia, cioè, l'insieme di produzione. Allora, se la tecnologia progredisce, l'insieme di produzione Y che la descrive diviene più grande: diviene l'insieme Y' con $Y \subset Y'$. (Questa condizione include sia il progresso tecnico che risparmia risorse, nel senso che consente di

produrre uguali quantità di output con minori quantità di input, sia quello che introduce nuovi output. In questo secondo caso, tutti i vettori y di Y hanno pari a zero gli elementi che corrispondono, nella lista dei beni, ai nuovi output, mentre vi sono in Y' vettori in cui questi elementi non sono nulli).

La condizione $Y \subset Y'$ implica $\pi^*(p, Y') \geq \pi^*(p, Y)$ (poiché $Y \subset Y'$ implica $\max_{y \in Y} py \leq \max_{y \in Y'} py$). Questa relazione indica il vantaggio di cui gode l'agente di produzione che introduce progresso tecnico, almeno finché non si modificano i prezzi (per effetto della diffusione del progresso tecnico tra le imprese). (Il vantaggio, qui segnalato per gli agenti che operano in un ambiente concorrenziale, è ancora più elevato in situazioni monopolistiche e oligopolistiche, come si vedrà esaminando questi regimi di mercato). Conseguentemente, essendo $\pi^*(p, Y) = p_q q - c^*(p_x, q, Y)$, la condizione $Y \subset Y'$ implica anche $c^*(p_x, q, Y') \leq c^*(p_x, q, Y)$, cioè, il progresso tecnico risparmiatore di risorse riduce il costo di produzione degli output $q \in \mathbb{R}_+^n$.

L'influenza del progresso tecnico è, però, unidirezionale soltanto per la funzione di profitto massimo. Non lo è per la funzione di offerta. Può accadere, cioè, che il progresso tecnico induca sia un accrescimento della quantità degli input e/o degli output, sia una loro diminuzione. (Ovviamente, è escluso che aumentino le quantità degli input e diminuiscano quelle degli output). Analogamente, il progresso tecnico non necessariamente riduce la domanda condizionale di tutti gli input. Nelle Figure 5.32, 5.33 e 5.34 sono indicate, per il caso in cui vi è un solo input ed un solo output, tre possibili situazioni in conseguenza del progresso tecnologico. Nella Figura 5.32 si ha un incremento sia della quantità dell'input, sia di quella dell'output (oltre che del profitto). Nella Figura 5.33 cresce la quantità dell'output e decresce quella dell'input. Nella Figura 5.34 decrescono entrambe.¹¹

¹¹ La situazione descritta nelle Figure 5.33 e 5.34 corrisponde al caso descritto da Ricardo (1821) nel capitolo sulle macchine. (L'introduzione di nuove macchine non è, in realtà, necessaria: quel che occorre è il progresso tecnico. Le nuove macchine sono, tuttavia, spessissimo il mezzo con cui il progresso tecnico viene introdotto). Nella teoria ricardiana con produzione di solo grano per mezzo di lavoro e capitale, questi impiegati in proporzione fissa, y_2 è la quantità di grano prodotta, y_1 è la quantità di input (composta di dosi di lavoro e capitale), $y_1 p_1/p_2$ è il reddito (in unità di grano) dei lavoratori e dei capitalisti (quest'ultimo, indicato dai classici con il termine profitto) e π/p_2 è la rendita (sempre in unità di grano) dei proprietari di terre. Le Figure 5.33 e 5.34 mostrano come il progresso tecnico possa ridurre salari e profitti (ed anche, nella Figura 5.34, il prodotto nazionale). Si noti che nella teoria classica, il prezzo p_1/p_2 è, nella situazione di equilibrio stazionario, un dato, determinato dal salario di sussistenza e dal saggio di profitto minimo.

Tuttavia, seguendo più da vicino l'analisi di Ricardo, se il rapporto con cui si combinano lavoro e capitale, e, quindi, il rapporto tra salari e profitti, viene modificato dal progresso tecnico, ad esempio, richiedendo più dosi di capitale per unità di lavoro (come accade normalmente con l'impiego crescente di macchine), può risultare che i profitti crescano per effetto del progresso tecnico mentre i salari diminuiscono.

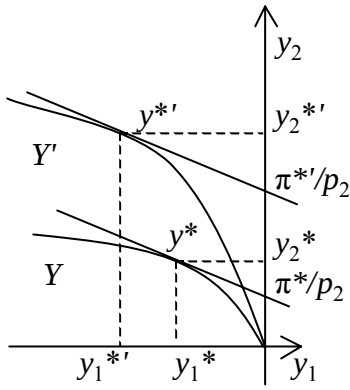


Figura 5.32

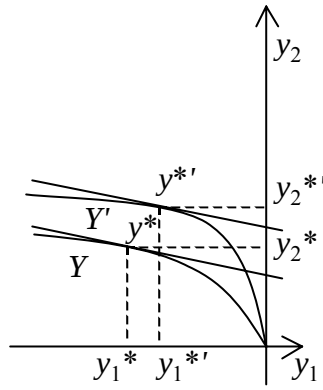


Figura 5.33

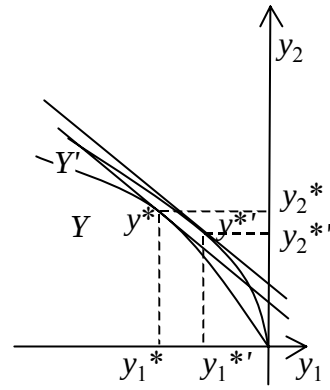


Figura 5.34

Quanto descritto nelle Figure precedenti può essere esaminato (in relazione al progresso tecnologico risparmiatore di risorse) analizzando la dipendenza della scelta di consumo dall'insieme di produzione, tenendo cioè conto che le funzioni di offerta e di profitto massimo dipendono da Y . Analogamente all'analisi, indicata nel paragrafo 4.4, che esamina la dipendenza della scelta di consumo dalle preferenze individuali, si può osservare che la scelta di produzione (determinata nel paragrafo 5.4) y^* dipende, oltre che dai prezzi p , anche dal valore della funzione di trasformazione $F(y^*)$ e del suo gradiente $DF(y^*)$. Estendendo, allora, l'analisi di statica comparata della Proposizione 5.6 (svolta per le funzioni $s(p)$ e $\pi^*(p)$) alle funzioni $s(p, F(y), DF(y))$ e $\pi^*(p, F(y), DF(y))$, differenziando le condizioni del primo ordine

$$-F(y^*) = 0 \quad p - \lambda^* DF(y^*) = 0$$

rispetto alle variabili dipendenti λ^* , y^* e alle variabili indipendenti p , $F(y^*)$ e $DF(y^*)$, risulta il sistema

$$\begin{bmatrix} 0 & -DF^T \\ -DF & -\lambda^* D^2 F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\lambda^* \\ dy^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} dF \\ -dp + \lambda^* dDF \end{bmatrix}$$

la cui soluzione è

$$d\lambda^* = \frac{1}{DF^T (D^2 F)^{-1} DF} \lambda^* dF + \frac{DF^T (D^2 F)^{-1}}{DF^T (D^2 F)^{-1} DF} (dp - \lambda^* dDF)$$

$$dy^* = -\frac{(D^2 F)^{-1} DF}{DF^T (D^2 F)^{-1} DF} dF + \left((D^2 F)^{-1} - \frac{(D^2 F)^{-1} DF DF^T (D^2 F)^{-1}}{DF^T (D^2 F)^{-1} DF} \right) \left(\frac{1}{\lambda^*} dp - dDF \right)$$

da cui, tenendo conto che le condizioni del primo ordine richiedono $DF = p/\lambda^*$, risultano le derivate

$$D_F s(p, F(y), DF(y)) = -\frac{(D^2 F)^{-1} p}{p^T (D^2 F)^{-1} p} \lambda^*$$

$$D_{DF} s(p, F(y), DF(y)) = -\left((D^2 F)^{-1} - \frac{(D^2 F)^{-1} p p^T (D^2 F)^{-1}}{p^T (D^2 F)^{-1} p} \right)$$

ossia, anche,

$$D_F s(p, F(y), DF(y)) = -D_p \lambda^*(p, F(y), DF(y))$$

$$D_{DF} s(p, F(y), DF(y)) = -\lambda^* D_p s(p, F(y), DF(y))$$

Tenendo poi conto che

$$d\pi^* = p^T dy^* + y^{*T} dp = -\lambda^* dF + y^{*T} dp$$

si ha

$$D_F \pi^*(p, F(y), DF(y)) = -\lambda^* \leq 0$$

$$D_{DF} \pi^*(p, F(y), DF(y)) = 0$$

Queste relazioni riconducono le derivate della funzione di offerta rispetto a $F(y^*)$ e $DF(y^*)$, rispettivamente, alle derivate del moltiplicatore di Lagrange e della funzione di

offerta rispetto ai prezzi (già ricavate dalla Proposizione 5.6) ed è, allora, possibile ricavare dalle proprietà di queste derivate le proprietà della dipendenza (locale) della scelta di produzione dalla tecnologia.

Si vede facilmente come la funzione $s(p, F(y), DF(y))$ sia separatamente omogenea di grado zero rispetto ai prezzi e al gradiente della funzione di trasformazione e sia indipendente da trasformazioni monotone crescenti di questa funzione che non ne alterino il segno, ossia, $s(\alpha p, T(F(y)), \beta D(T(F(y)))) = s(p, F(y), DF(y))$ per ogni coppia $\alpha, \beta > 0$ e ogni funzione T monotona crescente con $T(0) = 0$. Analogamente, la funzione di profitto massimo è omogenea di grado uno rispetto ai prezzi, omogenea di grado zero rispetto al gradiente della funzione di trasformazione ed è indipendente da trasformazioni monotone crescenti di questa funzione che non mutano il segno, ossia, $\pi^*(\alpha p, T(F(y)), \beta D(T(F(y)))) = \alpha \pi^*(p, F(y), DF(y))$ per ogni coppia $\alpha, \beta > 0$ e per ogni funzione T monotona crescente con $T(0) = 0$.

Anche questa analisi mostra che il profitto massimo è funzione non decrescente del progresso tecnico. Infatti, questo può rendere il punto y^* , che è sulla frontiera dell'insieme di produzione Y , perciò con $F(y^*) = 0$, un punto interno dell'insieme di produzione Y' , perciò con $F'(y^*) < 0$. Quindi, il progresso tecnico implica $\Delta F(y^*) = F'(y^*) - F(y^*) \leq 0$, riduce, cioè, il valore della funzione di trasformazione. Conseguentemente, la relazione $D_F \pi^* \leq 0$, che indica il profitto massimo funzione non crescente di $F(y^*)$, significa che esso è funzione non decrescente del progresso tecnico.

5.13 L'evoluzione dell'analisi neoclassica della scelta di produzione

L'analisi neoclassica della scelta di produzione ha una storia meno complessa di quella della scelta di consumo, sia perché la produzione non presenta la soggettività delle preferenze individuali che ha reso problematica l'analisi della scelta di consumo, sia, soprattutto, perché essa si è giovata in misura non trascurabile della macchina analitica della teoria del consumo. Dai paragrafi precedenti risulta evidente come l'analisi neoclassica tratti in modo analogo le scelte di consumo e di produzione, ponendosi problemi e pervenendo a risultati analoghi (però non sempre: ad esempio, essa perviene a risultati pressoché opposti per l'esistenza dell'agente rappresentativo).

La storia della teoria neoclassica della produzione può essere distinta in due fasi, coerentemente con l'evoluzione dell'analisi economica. Nella prima fase, le nozioni principali sono la funzione di produzione e la produttività marginale, che furono introdotte e sviluppate, nel ventennio a cavallo tra Ottocento e Novecento, da alcuni economisti (fra cui Walras, von Wieser, Edgeworth, Pareto, Barone, Wicksteed, Marshall e Wicksell). La produttività marginale (precursori von Thünen, 1826, e Longfield, 1834; nome dato da von Wieser, 1889; introduzione nell'analisi economica da parte di Walras, 1896 e Wicksteed, 1894, con polemiche tra questi ultimi

sulla primogenitura¹²) è, in qualche misura, una estensione della rendita differenziale ricardiana¹³ e una grandezza analoga all'utilità marginale (questa e la produttività marginale sono i cardini del marginalismo). La funzione di produzione è una comoda rappresentazione delle possibilità di produzione una volta che si introduca l'analisi in termini di produttività marginali: la sua introduzione esplicita fu opera di Barone, Pareto e Walras. La sua applicazione alla teoria della distribuzione (del prodotto nazionale ai fattori della produzione), usando una formulazione del tipo Cobb-Douglas, fu eseguita da Wicksteed, Wicksell e J.B.Clark.¹⁴

Fino alla metà del Novecento prevalse, seguendo questo approccio, l'approfondimento analitico (ad esempio, la relazione di Shephard, 1953, era già stata individuata da Hicks, 1939, e Samuelson, 1947), orientato soprattutto ad applicazioni di equilibrio parziale, anche non concorrenziale. Inoltre, un contributo notevole ad applicazioni di equilibrio generale fu proposto in questo periodo da Leontief (1949), con l'*analisi input-output*,

¹² Walras (1954, pp. 549-554, e 1965 II, pp. 644-648: sono, rispettivamente, alcune note di Jaffé nella traduzione in inglese degli *Elementi* da lui curata e uno scritto di Barone riportato nella corrispondenza di Walras).

¹³ Secondo questa teoria, la rendita di una terra è data dalla differenza tra il valore della produzione conseguita su di essa (al netto delle spese di coltivazione) e quello della produzione conseguita sulla terra meno fertile coltivata. Conseguentemente, la differenza tra le rendite di due terre è pari alla differenza tra i valori delle produzioni conseguibili su di esse. La teoria della produttività marginale dice che la remunerazione di un input (in unità di output) è pari al rapporto tra la variazione della quantità di output e la variazione della quantità di input che l'ha determinata (dalle condizioni del primo ordine indicate nel

paragrafo 5.4, applicate al caso in cui vi è un solo output, risulta $\frac{\partial q}{\partial x_j} = \frac{p_j}{p_q}$). La teoria

della rendita differenziale è vicina a quella della produttività marginale nel senso seguente. Si prendano due terre di uguale qualità, l'una un po' più grande dell'altra. La teoria della rendita differenziale dice che la prima terra gode di una rendita superiore alla seconda in misura pari alla maggiore produzione conseguibile, cioè, indicando con r la rendita di una

unità di terra, si ha $(t + \Delta t) r - t r = p_q (q(t + \Delta t) - q(t)) = p_q \Delta q(t)$, da cui $\frac{r}{p_q} = \frac{\Delta q}{\Delta t}$.

¹⁴ La funzione di produzione Cobb-Douglas, in queste analisi $Y = A L^a K^{1-a}$, ove Y è la produzione nazionale, L è la quantità di lavoro e K quella di capitale, gode della proprietà (conseguenza del cosiddetto teorema di Eulero) per cui $Y = \frac{\partial Y}{\partial L} L + \frac{\partial Y}{\partial K} K$.

Allora, essendo $\frac{\partial Y}{\partial L} = \frac{w}{p}$ e $\frac{\partial Y}{\partial K} = \frac{r}{p}$ per la teoria della produttività marginale, ove w

indica il salario unitario, r la remunerazione del capitale e p il prezzo del prodotto (posto normalmente pari a uno), si ha che i redditi dei fattori della produzione pareggiano il valore della produzione (cioè, $p Y = w L + r K$). In questo modo, bastano la funzione di produzione e la teoria della produttività marginale per spiegare la distribuzione del reddito tra i fattori della produzione (senza che vi influiscano la domanda e le forze politiche e sindacali). Si noti come questa analisi implichi non solo la presenza di mercati concorrenziali e l'aggregazione fra le unità di produzione (che non è problematica, come si è visto nel paragrafo 5.7), ma anche l'aggregazione in un'unica grandezza dei diversi tipi di lavoro e di capitale (impianti, macchine, attrezzi, ecc.), che è subordinata a condizioni forti.

fondata però su una rappresentazione del sistema della produzione che prescinde in parte dall'approccio precedente (e che richiama, invece, quella di Walras precedente l'impiego della teoria della produttività marginale).¹⁵

La seconda fase della teoria neoclassica della produzione corrisponde all'impiego dell'approccio assiomatico, seguito sostanzialmente in questo capitolo. La funzione di produzione viene generalizzata nella nozione di insieme di produzione e vengono studiate le proprietà formali delle funzioni di offerta e di profitto senza dare particolare rilievo alla nozione di produttività marginale (che richiede la presenza di un solo output e la differenziabilità della funzione di trasformazione). La sua introduzione nell'analisi della produzione è stata opera di Koopmans (1951 e 1957) e Debreu (1959), cui sono seguiti numerosi contributi di altri economisti.

¹⁵ L'analisi input-output descrive il sistema produttivo per mezzo di coefficienti di produzione (rapporti tra quantità di input e di output, per cui a_{ij} indica la quantità del bene i -esimo impiegata per produrre una unità del bene j -esimo). Assumendo che in ogni settore si produca un bene e tenendo conto della domanda intermedia (cioè, di prodotti impiegati nella produzione) si ha la relazione $X = A X + D$, ove X è il vettore delle quantità prodotte, A è la matrice dei coefficienti di produzione e D è il vettore delle quantità di prodotti domandate dai consumatori finali. Vi è, poi, la relazione $p = p A + w$, ove p è il vettore dei prezzi dei prodotti e w il costo di produzione dovuto agli input primari (quelli, cioè, non prodotti o prodotti prima del periodo di tempo in esame). In base a relazioni di questo tipo, è possibile una descrizione sistematica dell'attività produttiva di un'economia: il sistema di contabilità nazionale è fondato su di esse. Inoltre, introducendo delle ipotesi (sostanzialmente, che i coefficienti di produzione siano fissi, cioè, che le funzioni di produzione dei diversi settori siano del tipo con input perfettamente complementari e con rendimenti di scala costanti), sono possibili analisi e applicazioni interessanti.