

Cap. 4 LA SCELTA DI CONSUMO II

4.1 Relazioni duali nella scelta di consumo

Si parla di dualità quando si è di fronte a due relazioni (o sistemi di relazioni) speculari, nel senso che esiste una sostituzione di simboli che consente di ottenere la seconda relazione a partire dalla prima e la prima relazione a partire dalla seconda. In questo paragrafo vengono presi in considerazione due problemi speculari e analizzata la loro dualità.

Il primo problema è quello (analizzato nei paragrafi precedenti) di massimizzazione dell'utilità sotto il vincolo di bilancio (cioè, di spesa massima consentita): $\max_{x \geq 0, px \leq m} u(x)$. Il secondo problema è un problema

artificiale, nel senso che esso non rappresenta un criterio di scelta. Però ne è utile la considerazione, perché ad esso si collega, con le ipotesi consuete, la funzione hicksiana, o compensata, di domanda: si tratta del problema di minimizzazione della spesa sotto un vincolo di utilità (cioè, di utilità minima da raggiungere)¹: $\min_{x \geq 0, u(x) \geq u} px$. Questi problemi sono duali nel

senso che sostituendo la spesa $m(x) = p \cdot x$ all'utilità $u(x)$ e il massimo al minimo, si passa da un problema all'altro.

Più precisamente, si assuma che il sistema di preferenza $\langle X, \succeq \rangle$ sia monotono (ma non necessariamente convesso) e rappresentabile con una funzione continua di utilità $u: X \rightarrow U$, ove $U = \{u \in \mathbb{R}: u = u(x); x \in X\}$ è limitato inferiormente oltre che chiuso e convesso; si assuma, inoltre che sia $X = \mathbb{R}_+^k$, $p \in \mathbb{R}_+^k$ (cioè $p_h > 0$, ossia $p_h > 0$ per ogni $h = 1, \dots, k$). Allora, assumendo $m > 0$, il problema primale è

$$\max_x u(x) \quad \text{sotto i vincoli } x \in \mathbb{R}_+^k \text{ e } p \cdot x \leq m$$

e il problema duale è

¹ Si ricordi che $m(p, u)$ non è stata definita, quando è stata introdotta la funzione hicksiana di domanda, come la minima capacità di spesa richiesta, ai prezzi p , per conseguire l'utilità u , ma come la capacità di spesa che determina, con i prezzi p , attraverso la massimizzazione vincolata dell'utilità, un paniere di beni di utilità pari a u .

$$\min_x p x \quad \text{sotto i vincoli } x \in \mathbb{R}_+^k \text{ e } u(x) \geq u$$

ove ² $u > u(0)$.

Siano

$$u^*(p, m) = \max_{x \geq 0, px \leq m} u(x) \quad \text{funzione indiretta di utilità,}$$

$$d(p, m) = \arg \max_{x \geq 0, px \leq m} u(x) \quad \text{corrispondenza walrasiana di domanda,}$$

$$m^*(p, u) = \min_{x \geq 0, u(x) \geq u} p x \quad \text{funzione di spesa minima,}$$

$$g(p, u) = \arg \min_{x \geq 0, u(x) \geq u} p x \quad \text{corrispondenza di domanda di minima spesa.}$$

Proposizione 4.1 Con le ipotesi indicate (cioè, preferenze monotone, $X = \mathbb{R}_+^k$, $p \gg 0$, $m > 0$ e $u > u(0)$), valgono le seguenti relazioni duali:

$$m^*(p, u^*(p, m)) = m \quad u^*(p, m^*(p, u)) = u$$

$$g(p, u^*(p, m)) = d(p, m) \quad d(p, m^*(p, u)) = g(p, u)$$

Dimostrazione. L'ipotesi di preferenze localmente non saziate implica che $u(x) < u^*(p, m)$ per ogni x per cui $p x < m$. Ne consegue che $u(x) \geq u^*(p, m)$ solo se $p x \geq m$. Allora, essendo $u^*(p, m)$ ottenibile con la spesa m (ma non con una spesa inferiore) e con i panieri $x \in \arg \max_{x \geq 0, px \leq m} u(x)$, si ha, da un lato, $m = \min_{x \geq 0, u(x) \geq u^*(p, m)} p x$, cioè $m = m^*(p, u^*(p, m))$, e, dall'altro lato, che questo risultato viene conseguito con i medesimi panieri di beni $x \in \arg \max_{x \geq 0, px \leq m} u(x)$, per cui si ha che $\arg \max_{x \geq 0, px \leq m} u(x) = \arg \min_{x \geq 0, u(x) \geq u^*(p, m)} p x$, cioè $d(p, m) = g(p, u^*(p, m))$. Poi, essendo $m^*(p, u) = \min_{x \geq 0, u(x) \geq u} p x = \min_{x \geq 0, u(x) = u} p x$, si ha $u(x) < u$ per ogni x per cui $p x < m^*(p, u)$, non si ha mai $u(x) > u$ per un x con $p x = m^*(p, u)$ (come indicato nella nota 2) e si ha $u(x) = u$ se e solo se $x \in \arg \min_{x \geq 0, u(x) \geq u} p x$, panieri questi per i quali, per definizione, è $p x = m^*(p, u)$. Ne consegue che $u = \max_{x \geq 0, px \leq m^*(p, u)} u(x)$, ossia $u = u^*(p, m^*(p, u))$, e che questo risultato viene ottenuto se e solo se $x \in \arg \min_{x \geq 0, u(x) \geq u} p x$, per cui si ha che $\arg \min_{x \geq 0, u(x) \geq u} p x = \arg \max_{x \geq 0, px \leq m^*(p, u)} u(x)$, cioè $g(p, u) = d(p, m^*(p, u))$. $\square$

² La soluzione del problema duale non può consistere in un paniere di beni x^* per cui sia $u(x^*) > u$ (tenendo presente che $x^* \neq 0$ poiché $u > u(0)$). Infatti, per la continuità del sistema di preferenza, se fosse $u(x^*) > u$, vi sarebbe un $\varepsilon > 0$ tale che $u(x) > u$ per ogni x con $\|x - x^*\| < \varepsilon$ e, quindi, essendo $x^* \neq 0$, anche per qualche $x < x^*$. Vi sarebbe, perciò, un x tale che $u(x) > u$ e $p x < p x^*$, mentre il problema richiede $p x \geq p x^*$ per ogni x con $u(x) \geq u$.

Questo risultato, cioè $u(x^*) = u$, implica che la funzione di spesa minima $m^*(p, u)$ è funzione crescente di u : da un lato, infatti, la monotonicità della funzione di utilità $u(x)$ implica che $m^*(p, u') \geq m^*(p, u)$ se $u' > u$, e, dall'altro lato, non può essere $m^*(p, u') = m^*(p, u)$ se $u' > u$ poiché in tal caso la soluzione del problema di minima spesa sotto il vincolo $u(x) \geq u$ includerebbe un paniere di beni x^* con $u(x^*) = u' > u$.

Proposizione 4.2 Sotto le stesse ipotesi (cioè, preferenze monotone, $X = \mathbb{R}_+^k$, $p \gg 0$ e $u > u(0)$), la corrispondenza di domanda di minima spesa $g(p, u) = \arg \min_{x \geq 0, u(x) \geq u} px$ coincide con la corrispondenza hicksiana di domanda $h(p, u)$ introdotta dalla Definizione 3.4. Poi, per le coppie (p, u) per le quali questa corrispondenza è una funzione, la funzione hicksiana di domanda è uguale al vettore derivata della funzione di spesa minima rispetto ai prezzi, cioè, $D_p m^*(p, u) = h(p, u)$. Infine, è positiva la derivata della funzione di spesa minima rispetto all'utilità, cioè, $D_u m^*(p, u) > 0$.

Dimostrazione. Da un lato, la Definizione 3.4 introduce la corrispondenza hicksiana di domanda $h(p, u) = d(p, m(p, u))$ ove $m(p, u) = \{m \in \mathbb{R}_+ : u^*(p, m(p, u)) = u\}$, definendo perciò la capacità compensata di spesa in base alla condizione $u^*(p, m(p, u)) = u$. Dall'altro lato, la Proposizione 4.1 indica che, per la spesa minima $m^*(p, u)$, vale la relazione $u^*(p, m^*(p, u)) = u$. Allora, essendo, $D_m u^*(p, m) > 0$ per la Proposizione 3.12, le due relazioni precedenti ($u^*(p, m(p, u)) = u$ e $u^*(p, m^*(p, u)) = u$) implicano $m(p, u) = m^*(p, u)$, per cui $d(p, m(p, u)) = d(p, m^*(p, u))$, cioè $h(p, u) = g(p, u)$. Risulta, quindi, se $h(p, u)$ è una funzione, che $m^*(p, u) = p h(p, u)$ e, perciò, $D_p m^*(p, u) = h(p, u)$ (essendo $p^T D_p h(p, u) = 0$ per la Proposizione 3.17). Infine, $D_u m^*(p, u) > 0$ per la nota 2. $\square$

E' possibile, a questo punto, riepilogare le principali corrispondenze e funzioni fin qui introdotte allo scopo di indicarne le interrelazioni.

a) **La funzione di utilità** $u(x)$, il cui dominio è l'insieme X dei possibili panieri di beni, per ipotesi chiuso, convesso e limitato inferiormente (spesso, per semplicità, $X = \mathbb{R}_+^k$). Per ipotesi, la funzione di utilità è continua (cosicché il suo codominio $U = \{u \in \mathbb{R} : u(x) = u; x \in X\}$ è chiuso e convesso) e rappresenta un sistema di preferenza monotono.

b) **La funzione di spesa** $m(x) = p x$.

c) **La funzione indiretta di utilità** $u^*(p, m) = \max_{x \geq 0, px \leq m} u(x)$. Per quanto indicato

dalle Proposizioni 3.7, 3.8 e 3.10, questa funzione è continua, omogenea di grado zero rispetto ai prezzi e alla capacità di spesa, e quasi-convessa. Inoltre, per quanto indicato dalla Proposizione 3.12 (cioè, $D_p u^*(p, m) < 0$ e $D_m u^*(p, m) > 0$ se la soluzione del problema $\max_{x \geq 0, px \leq m} u(x)$ è interna, e con $D_p u^*(p, m) \leq 0$ se si include la possibilità di

soluzioni di frontiera), questa funzione è non crescente rispetto ai prezzi e crescente rispetto alla capacità di spesa. Infine, la funzione indiretta di utilità è ordinale come la funzione di utilità: in particolare, se si introduce una trasformazione monotona crescente $v = v(u)$ per la funzione di utilità, si ottiene la stessa trasformazione $v^* = v(u^*)$ per la funzione indiretta di utilità, poiché $u^*(p, m) = \max_{x \geq 0, px \leq m} u(x)$ e $v^*(p, m) = \max_{x \geq 0, px \leq m} v(u(x))$ implicano $v^*(p, m) = v(u^*(p, m))$.

d) **La funzione di spesa minima** $m^*(p, u) = \min_{x \geq 0, u(x) \geq u} px$. Questa funzione è continua rispetto ai prezzi e all'utilità (per il teorema del massimo, indicato nella nota 11 del Capitolo 3). E', inoltre, omogenea di grado uno rispetto ai prezzi: infatti, la Proposizione 4.2 richiede $m^*(p, u) = p x^*$ con $x^* \in h(p, u)$ e la Proposizione 3.15 richiede che la corrispondenza $h(p, u)$ sia omogenea di grado zero rispetto ai prezzi, per cui se $x^* \in h(p, u)$ allora anche $x^* \in h(\alpha p, u)$ per ogni $\alpha > 0$ e, quindi, $m^*(\alpha p, u) = \alpha p x^* = \alpha m^*(p, u)$. Per la Proposizione 4.2 (cioè, $D_u m^*(p, u) > 0$ e $D_p m^*(p, u) = h(p, u)$, perciò $D_p m^*(p, u) > 0$ se la soluzione del problema $\min_{x \geq 0, u(x) \geq u} px$ è

interna, e $D_p m^*(p, u) \geq 0$ se si include la possibilità di soluzioni di frontiera), questa funzione è non decrescente rispetto ai prezzi e crescente rispetto alla utilità. Inoltre, la funzione di spesa minima è concava rispetto ai prezzi, cioè, $m^*(p'', u) \geq \lambda m^*(p, u) + (1-\lambda) m^*(p', u)$ per ogni p, p', u e $\lambda \in [0, 1]$, ove $p'' = \lambda p + (1-\lambda) p'$.

Viene indicata dapprima una dimostrazione intuitiva di questa proprietà. Si abbia, in corrispondenza ad una qualsiasi coppia (p, u) , la spesa minima $m^*(p, u) = p x^*$, ove $x^* \in h(p, u)$. Se, al variare di p , da p a p' , si mantiene immutato x^* , si pone, cioè, $\bar{x} = x^*$, la spesa diviene pari a $p' \bar{x}$, varia, cioè, linearmente con i prezzi, e risulta, per definizione, non inferiore alla spesa minima $m^*(p', u)$. Risulta, perciò, che $m^*(p', u) - m^*(p, u) \leq (p' - p) x^*$ per ogni $x^* \in h(p, u)$, che è la condizione di concavità della funzione $m^*(p, u)$ rispetto ai prezzi, come illustrato nella Figura 4.1.

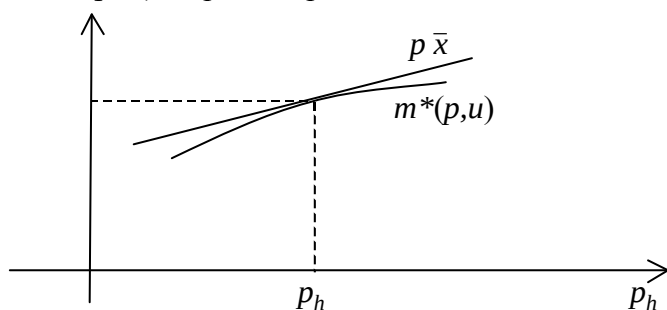


Figura 4.1

La dimostrazione che la funzione di spesa minima è concava rispetto ai prezzi viene ottenuta analiticamente tenendo conto che $m^*(p'', u) = p'' x^*$, ove $x^* \in h(p'', u)$ con $u(x^*) = u$, e, quindi, $m^*(p'', u) = \lambda p x^* + (1-\lambda) p' x^*$, con $p x^* \geq m^*(p, u)$ (poiché $u(x^*) = u$ e $p x^*$ non è inferiore alla minima spesa occorrente per conseguire l'utilità u ai prezzi p) e $p' x^* \geq m^*(p', u)$ (per la stessa ragione), per cui $m^*(p'', u) \geq \lambda m^*(p, u) + (1-\lambda) m^*(p', u)$.

e) **La funzione walrasiana di domanda** $d(p, m) = \arg \max_{x \geq 0, px \leq m} u(x)$. Questa funzione, che è, in generale, una corrispondenza, è omogenea di grado zero rispetto ai prezzi e alla capacità di spesa (Proposizione 3.8) e soddisfa la relazione $p d(p, m) = m$ (per la Proposizione 3.9, tenendo conto che le preferenze sono per ipotesi monotone, o localmente non saziate, e che la relazione vale, se $d(p, m)$ è una corrispondenza, per ogni $x \in d(p, m)$). La Proposizione 3.12 indica le derivate $D_p d(p, m)$ e $D_m d(p, m)$ della funzione walrasiana di domanda. Il loro segno definisce (Definizioni 3.5 e 3.6) i beni normali e inferiori, ordinari e di Giffen, sostituti e complementari lordi. La funzione walrasiana di domanda è una funzione (e non una corrispondenza), che è, inoltre, continua per $(p, m) \in \mathbb{R}_{++}^{k+1}$, se la funzione di utilità è strettamente quasi-concava (Proposizioni 3.5, 3.6 e 3.7).

f) **La funzione hicksiana di domanda** $h(p, u) = d(p, m(p, u))$, ove $m(p, u) = \{m \in \mathbb{R}_+ : u^*(p, m(p, u)) = u\}$ è la capacità compensata di spesa, cioè, la capacità di spesa con cui si consegue l'utilità u . Per la Proposizione 4.2, $h(p, u)$ coincide con la soluzione del problema di spesa minima, cioè, $h(p, u) = \arg \min_{x \geq 0, u(x) \geq u} px$. La funzione hicksiana di domanda (che è, in generale, una corrispondenza) è, per la Proposizione 3.15, omogenea di grado zero rispetto ai prezzi. La Proposizione 3.16 ne indica le derivate, cioè $D_p h(p, u)$ e $D_u h(p, u)$. La matrice jacobiana $D_p h(p, u)$ è simmetrica, semidefinita negativa e tale che $p^T D_p h(p, u) = 0$ (Proposizioni 3.14, 3.16 e 3.17) e definisce con il segno dei suoi elementi i beni sostituti e complementari (Definizione 3.5).

Le più importanti interrelazioni fra le ultime quattro funzioni sono le seguenti.

a) Relazioni tra la funzione indiretta di utilità e la funzione di spesa minima: dalla Proposizione 4.1 si ha

$$m^*(p, u^*(p, m)) = m \quad u^*(p, m^*(p, u)) = u$$

Queste relazioni indicano rispettivamente, per ogni $p \gg 0$, $m > 0$ e $u > u(0)$, che la spesa minima per conseguire una certa utilità è pari a quella capacità di spesa per cui questa utilità è massima e che l'utilità massima ottenibile con una certa capacità di spesa è pari all'utilità per il cui ottenimento questa capacità di spesa è la spesa minima.³

b) Relazione tra la funzione indiretta di utilità e la funzione walrasiana di domanda: è la relazione di Antonelli e Roy già indicata dalla Proposizione 3.13

$$d(p, m) = - \frac{D_p u^*(p, m)}{D_m u^*(p, m)}$$

c) Relazione tra la funzione di spesa minima e la funzione hicksiana di domanda: è indicata dalla Proposizione 4.2

$$h(p, u) = D_p m^*(p, u)$$

d) Relazioni tra la funzione walrasiana di domanda e la funzione hicksiana di domanda: dalla Proposizione 4.1, tenendo conto che per la Proposizione 4.2 la corrispondenza dei panieri di beni di spesa minima coincide con la corrispondenza hicksiana di domanda, si ha

$$d(p, m) = h(p, u^*(p, m)) \quad h(p, u) = d(p, m^*(p, u))$$

Derivando queste relazioni⁴ e tenendo conto della relazione di Antonelli e Roy, si perviene alla relazione di Slutsky indicata dalla Proposizione 3.18:

$$D_p d(p, m) = D_p h(p, u^*(p, m)) - (D_m d(p, m)) d(p, m)^T$$

³ Derivando queste relazioni, risultano le relazioni seguenti, ove $u^* = u^*(p, m)$ e $m^* = m^*(p, u)$,

$$\begin{aligned} D_u m^*(p, u^*) \quad D_m u^*(p, m) &= 1 \\ D_m u^*(p, m^*) \quad D_u m^*(p, u) &= 1 \\ D_p m^*(p, u^*) + D_u m^*(p, u^*) D_p u^*(p, m) &= 0 \\ D_p u^*(p, m^*) + D_m u^*(p, m^*) D_p m^*(p, u) &= 0 \end{aligned}$$

⁴ Si ottiene, con $u^* = u^*(p, m)$ e $m^* = m^*(p, u)$,

$$\begin{aligned} D_p d(p, m) &= D_p h(p, u^*) + D_u h(p, u^*) D_p u^*(p, m)^T \\ D_m d(p, m) &= D_u h(p, u^*) \quad D_m u^*(p, m) \\ D_p h(p, u) &= D_p d(p, m^*) + D_m d(p, m^*) D_p m^*(p, u)^T \\ D_u h(p, u) &= D_m d(p, m^*) \quad D_u m^*(p, u) \end{aligned}$$

Da queste uguaglianze e da quelle precedenti (nel testo e nella nota 3) si ricavano, oltre la relazione di Slutsky indicata nel testo, altre relazioni interessanti, fra cui

$$\begin{aligned} D_m d(p, m) &= D_u h(p, u^*) (D_u m^*(p, u^*))^{-1} \\ D_u h(p, u) &= D_m d(p, m^*) (D_m u^*(p, m^*))^{-1} \\ D_p h(p, u) &= D_p d(p, m^*) + (D_u m^*(p, u))^{-1} (D_u h(p, u)) h(p, u)^T \end{aligned}$$

Quest'ultima relazione corrisponde, per la funzione hicksiana di domanda, a quella che è, per la funzione walrasiana di domanda, la relazione di Slutsky.

Esercizio 4.1 Come esercizio, si può prendere in considerazione una funzione di utilità del tipo Cobb-Douglas: $u = x_1^a x_2^{1-a}$, con $a \in (0, 1)$. Risultano la funzione walrasiana di domanda

$$d(p_1, p_2, m) = \begin{bmatrix} a m p_1^{-1} \\ (1-a) m p_2^{-1} \end{bmatrix}$$

la funzione indiretta di utilità

$$u^*(p_1, p_2, m) = a^a (1-a)^{1-a} p_1^{-a} p_2^{a-1} m$$

la funzione hicksiana di domanda

$$h(p_1, p_2, u) = \begin{bmatrix} a^{1-a} (1-a)^{a-1} p_1^{a-1} p_2^{1-a} u \\ a^{-a} (1-a)^a p_1^a p_2^{-a} u \end{bmatrix}$$

e la funzione di spesa minima

$$m^*(p_1, p_2, u) = a^{-a} (1-a)^{a-1} p_1^a p_2^{1-a} u$$

Il lettore può verificare come le relazioni precedenti (incluse quelle indicate nelle note 3 e 4) e tutte le proprietà individuate per queste quattro funzioni siano soddisfatte.

4.2 Dalla scelta di consumo alle preferenze

Finora (dal Paragrafo 3.6) la scelta di consumo è stata analizzata assumendo come dato primitivo il sistema regolare di preferenza $\langle X, \succeq \rangle$: il criterio di scelta è stato determinato in base al sistema di preferenza e al vincolo di bilancio. Si è, cioè, seguito il primo approccio dei due indicati verso la fine del Paragrafo 2.1. Si tratta ora di analizzare la scelta di consumo secondo il secondo approccio, quello che assume come dato primitivo il criterio di scelta $\langle \mathcal{B}, S \rangle$ ed esamina la sua possibile razionalizzabilità, se, cioè, può essere spiegato/interpretato per mezzo di un sistema di preferenza, in caso affermativo individuandolo. E', questa, l'analisi delle preferenze rivelate per la scelta di consumo.

L'insieme $\mathcal{B}$ è composto da insiemi di bilancio B , che dipendono dai prezzi p e dalla capacità di spesa m (oltre che dall'insieme di consumo X , che però è ipotizzato invariabile). Come già noto, $B(p, m) = \{x \in X: p \cdot x \leq m\}$. Il criterio di scelta associa ad ogni situazione B , cioè, ad ogni insieme di bilancio o, anche, ad ogni coppia $(p, m) \in \mathbb{R}_{++}^{k+1}$, un insieme di scelta $S(B)$, che viene qui indicato, trattandosi di scelta di consumo, con il simbolo della domanda $d(B)$, o $d(p, m)$. Si noti come ora la corrispondenza di domanda $d(p, m)$ sia il dato e il sistema di preferenza $\langle X, \succeq \rangle$ l'entità (se esiste) da determinare, mentre nei Paragrafi 3.7, 3.8 e 3.9, il sistema di preferenza era il dato e la corrispondenza di domanda l'entità da determinare.

La Proposizione 2.2 dice che un criterio di scelta (qui rappresentato dalla corrispondenza di domanda $d(p, m)$) è razionalizzabile con un sistema regolare di preferenza solo se soddisfa l'assioma debole delle preferenze rivelate (WARP). Si tratta, allora, di vedere dapprima (prima, cioè, di esaminare sotto quali condizioni la corrispondenza di domanda implichi un sistema regolare di preferenza) come si presenta l'assioma debole delle preferenze rivelate nella scelta di consumo e di analizzarne le implicazioni.

Seguendo la Definizione 2.4, il criterio di scelta $d(p, m)$ soddisfa l'assioma debole delle preferenze rivelate se le condizioni $x, x' \in B(p, m)$; $x, x' \in B(p', m')$; $x \in d(p, m)$ e $x' \in d(p', m')$ implicano $x' \in d(p, m)$ e $x \in d(p', m')$. La condizione $x, x' \in B(p, m)$ significa che entrambi i panieri di beni x e x' appartengono all'insieme di bilancio quando i prezzi sono quelli indicati dal vettore p e la capacità di spesa è m . La condizione $x \in d(p, m)$ indica che, con questo insieme di bilancio, l'insieme di scelta $d(p, m)$ contiene il paniere x : quindi, il paniere x si rivela almeno altrettanto buono che il paniere x' , cioè $x \succeq^* x'$ (Definizione 2.3). Analogamente, le condizioni $x, x' \in B(p', m')$ e $x' \in d(p', m')$ implicano che $x' \succeq^* x$. L'assioma debole delle preferenze rivelate richiede che $x' \succeq^* x$ escluda $x \succ^* x'$, cioè $x' \notin d(p, m)$, e che, quindi, debba essere $x' \in d(p, m)$. Il WARP richiede anche, analogamente, che $x \succeq^* x'$ escluda $x' \succ^* x$, cioè $x \notin d(p', m')$, e che, quindi, debba essere $x \in d(p', m')$.

Un modo equivalente per esprimere l'assioma debole delle preferenze rivelate è il seguente: se è $x, x' \in B(p, m)$, $x \in d(p, m)$ e $x' \notin d(p, m)$ (per cui, $x \succ^* x'$), allora x' non può essere scelto quando l'insieme di bilancio contiene anche x (questa scelta indicherebbe $x' \succeq^* x$), per cui, se è anche $x' \in d(p', m')$, allora $x \notin B(p', m')$. Se la corrispondenza di domanda è una funzione, cioè $d(p, m)$ è composto da un solo paniere di beni x (e, analogamente, $d(p', m') = x'$), la formulazione appena indicata dell'assioma debole delle preferenze rivelate si presenta nel modo seguente.

Definizione 4.1 L'assioma debole delle preferenze rivelate (WARP) richiede che la funzione walrasiana di domanda soddisfi la relazione:

se $p' d(p', m') \leq m$ e $d(p', m') \neq d(p, m)$, allora $p' d(p, m) > m'$

In altre parole, se nella situazione descritta dalla coppia (p, m) viene acquistato il paniere di beni x e il paniere x' (con $x' \neq x$) rientra fra quelli acquistabili (cioè, $p' x' \leq m$), per cui x si rivela preferito a x' , allora, nella situazione (p', m') in cui viene acquistato x' , il paniere x deve non essere acquistabile, cioè deve essere $p' x > m'$, altrimenti x' si rivelerebbe preferito a x , in contraddizione con la rivelazione precedente.

Nella Figura 4.2 sono rappresentate, nel caso con due beni (cioè, $k = 2$), scelte che soddisfano l'assioma debole delle preferenze rivelate (e risulta $x \succ^* x'' \succ^* x'$), nella Figura 4.3 scelte che non lo soddisfano.

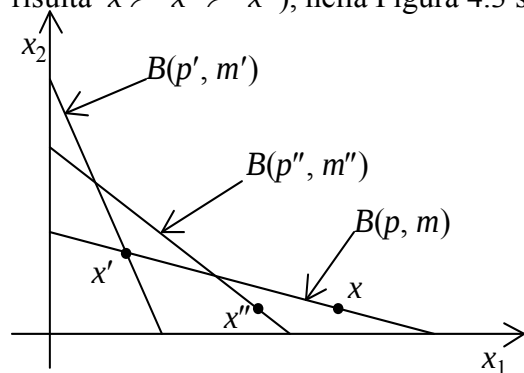


Figura 4.2

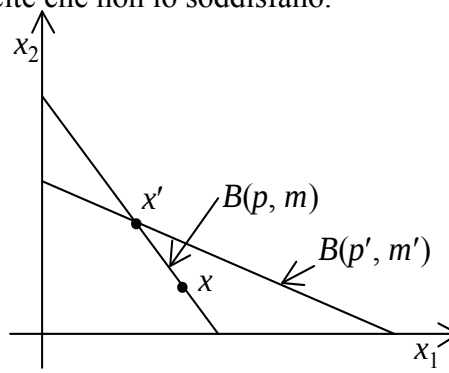


Figura 4.3

L'assioma debole delle preferenze rivelate implica relazioni che corrispondono alle relazioni di Antonelli e Roy e di Slutsky indicate dalle Proposizioni 3.13 e 3.18 e le proprietà della matrice di sostituzione indicate dalla Proposizione 3.14, esclusa, però, la simmetria (se $k > 2$).

Nel seguito verrà illustrato come l'assioma debole delle preferenze rivelate implichi la relazione di Antonelli e Roy e, esaminando la relazione di Slutsky, come esso richieda che la domanda compensata di un bene sia funzione non crescente del suo prezzo. Si assume che, per ogni situazione (p, m) presa in considerazione, il criterio di scelta si configuri in una funzione di domanda (cioè, $d(p, m)$) è composto da un solo paniere di beni $x = d(p, m)$ e che sia tale da impiegare tutta la capacità disponibile di spesa nell'acquisto dei beni (sia, cioè, $p \cdot x = m$).

La relazione di Antonelli e Roy (introdotta dalla Proposizione 3.13) può essere interpretata nel modo seguente. Si prendano in considerazione variazioni della capacità di spesa e dei prezzi che lascino immutato il valore massimo ottenibile di utilità, cioè, variazioni di m e p che mantengano $u^*(p, m)$ costante. La relazione di Antonelli e Roy dice che il rapporto tra queste variazioni (una sorta di saggio di sostituzione tra prezzi e capacità di spesa) è pari alla quantità acquistata del bene il cui prezzo è variato. Ossia, per ogni $h = 1, \dots, k$,

$$\left(\frac{\partial m}{\partial p_h} \right)_{u^*(p, m) = \bar{u}^*} = - \frac{1}{\frac{\partial u^*(p, m)}{\partial m}} \frac{\partial u^*(p, m)}{\partial p_h} = x_h = d_h(p, m)$$

Per mostrare come questa relazione sia implicata dall'assioma debole delle preferenze rivelate, si parta dalla situazione (p, m) cui corrisponde la scelta $x = d(p, m)$. Si modifichi la capacità di spesa a parità di prezzi: la situazione è (p, m') e si ha la scelta $x^m = d(p, m')$, per cui $p \cdot x^m = m'$. Si consideri, ora, una modificazione dei prezzi a parità di capacità di spesa: la situazione è (p', m) e si ha la scelta $x^p = d(p', m)$, per cui $p' \cdot x^p = m$. Se accade che $x^m = x^p$, allora si ottiene che

$$-(p' - p) \cdot x^m = m' - m = -(p' - p) \cdot x^p$$

Se $x^m \neq x^p$, siano queste variazioni tali che non si riveli né x^m preferito a x^p , né x^p preferito a x^m . L'assioma debole delle preferenze rivelate richiede che, nella situazione in cui viene comprato x^m , non sia comprabile x^p , sia, cioè, $p \cdot x^p > m'$, e che, nella situazione in cui viene comprato x^p , non sia comprabile x^m , sia, cioè, $p' \cdot x^m > m$. Si ottiene, allora, che

$$m' - m < -(p' - p) \cdot x^p \quad m' - m > -(p' - p) \cdot x^m$$

ossia,

$$-(p' - p) \cdot x^m < m' - m < -(p' - p) \cdot x^p$$

Considerando simultaneamente i due casi $x^m = x^p$ e $x^m \neq x^p$, si ha la relazione

$$-(p' - p) \cdot x^m \leq m' - m \leq -(p' - p) \cdot x^p$$

Tenendo conto che x^m e x^p sono prossimi a x se $m' - m$ e $p' - p$ sono prossimi a zero (sempre che il criterio di scelta sia continuo in (p, m)), questa relazione converge, per $m' - m \rightarrow 0$ e $p' - p \rightarrow 0$, alla relazione di Antonelli e Roy.

La relazione di Slutsky (introdotta dalla Proposizione 3.18) può essere ricostruita, partendo dal criterio di scelta rappresentato dalla funzione walrasiana di domanda, nel modo seguente. Si parta dalla situazione (p, m) cui corrisponde la scelta $x = d(p, m)$ e si consideri una modificazione dei prezzi: allora, la situazione è (p', m) e si ha la scelta $x' = d(p', m)$, per cui $p' \cdot x' = m$. Si introduca, a questo punto, una modificazione della capacità di spesa che compensi la variazione dei prezzi: con la compensazione, la capacità di spesa diviene m^c , che consente di acquistare ai prezzi p' il paniere di beni x , ossia, $m^c = p' \cdot x$.

(Si noti come la compensazione qui introdotta sia la cosiddetta compensazione di Slutsky indicata nella nota 20 del Capitolo 3). Si indichi con $x^s = d(p', m^c)$ la scelta nella situazione (p', m^c) , per cui risulta $p' x^s = m^c$.

Essendo $p' x = m^c$ e $p x = m$, vale la relazione

$$x' - x = x^s - x - (p' - p) x \frac{x^s - x}{m^c - m}$$

che richiede, se si considera la variazione del prezzo j -esimo, per ogni bene ℓ -esimo, con $j, \ell = 1, \dots, k$,

$$\frac{x_\ell' - x_\ell}{p_j' - p_j} = \frac{x_\ell^s - x_\ell}{p_j' - p_j} - x_j \frac{x_\ell^s - x_\ell}{m^c - m}$$

Questa relazione è del tutto analoga alla relazione di Slutsky : $\frac{x_\ell^s - x_\ell}{p_j' - p_j}$ è l'effetto di sostituzione (la variazione della capacità reale di spesa è stata compensata introducendo la capacità di spesa m^c) mentre il termine $-x_j \frac{x_\ell^s - x_\ell}{m^c - m}$ è l'effetto di reddito (si noti come $\frac{x_\ell^s - x_\ell}{m^c - m}$ indichi la variazione della scelta, a parità di prezzi, al variare della capacità di spesa).

Si può dimostrare, in base all'assioma debole delle preferenze rivelate, che l'effetto di sostituzione diretto, cioè $\frac{x_j^s - x_j}{p_j' - p_j}$, è non positivo. L'effetto è, ovviamente, nullo se $x^s = x$. Se $x^s \neq x$, nella situazione (p', m^c) in cui viene scelto x^s , questo paniere si rivela preferito a x (infatti, viene scelto x^s pur essendo anche $x \in B(p', m^c)$, poiché $p' x = m^c$), per cui l'assioma debole delle preferenze rivelate richiede che sia $p x^s > m$ (cioè, quando x viene scelto, x^s non è acquistabile). Quindi, essendo $p x = m$, risulta la disuguaglianza $p(x^s - x) > 0$. Allora, essendo $p' x^s = m^c$ e $p' x = m^c$ e, quindi, $p'(x^s - x) = 0$, risulta la disuguaglianza $(p' - p)(x^s - x) < 0$. Da questa consegue, se varia soltanto il prezzo j -esimo, che $\frac{x_j^s - x_j}{p_j' - p_j} < 0$. Tenendo conto anche del caso $x^s = x$, per il quale questo

rapporto è nullo, risulta, per ogni $j = 1, \dots, k$, che $\frac{x_j^s - x_j}{p_j' - p_j} \leq 0$, o, anche, $\Delta p_j \Delta x_j^s \leq 0$,

ove $\Delta p_j = p_j' - p_j$ e $\Delta x_j^s = x_j^s - x_j$.

Partendo da questa relazione si può dimostrare, dopo averla introdotta, che la matrice di sostituzione $S(p, m)$ è semidefinita negativa e soddisfa le condizioni $p^T S(p, m) = 0$ e $S(p, m) p = 0$ per ogni (p, m) , ossia che l'assioma debole delle preferenze rivelate implica queste proprietà.

Essendo $\Delta p_j \Delta x_j^s \leq 0$ per ogni $j = 1, \dots, k$, si ha $\sum_{j=1}^k \Delta p_j \Delta x_j^s \leq 0$, cioè $\Delta p^T \Delta x^s \leq 0$, ove Δp è il vettore delle variazioni dei prezzi e Δx^s è il vettore delle variazioni compensate della scelta. Assumendo che la funzione di domanda sia differenziabile, la relazione $\Delta p^T \Delta x^s \leq 0$ può essere scritta in termini differenziali come $dp^T dx^s \leq 0$. Essendo $x^s = d(p', m^c)$ e $m^c = p'^T x$, per cui $m^c - m = (p' - p)^T x$, cioè $dm = x^T dp$, differenziando si ha

$$dx^s = D_p d(p, m) dp + D_m d(p, m) x^T dp$$

per cui

$$dp^T dx^s = dp^T (D_p d(p, m) + D_m d(p, m) x^T) dp \leq 0$$

La matrice $D_p x^s = D_p d(p, m) + D_m d(p, m) x^T$ è la matrice delle derivate della domanda compensata rispetto ai prezzi, è, cioè, la matrice di sostituzione $S(p, m)$ e la condizione appena indicata, che vale per ogni dp , significa che questa matrice è semidefinita negativa. Inoltre, essendo $p'^T x^s = m^c = p'^T x$, per cui $(p + \Delta p)^T \Delta x^s = 0$, cioè $p^T dx^s = 0$ e $(dx^s)^T p = 0$, si ha che $p^T S(p, m) = 0$ e $S(p, m) p = 0$.

Risulta, allora, che valgono, per la matrice di sostituzione della domanda che soddisfa l'assioma debole delle preferenze rivelate, tutte le proprietà indicate nelle Proposizione 3.14 per la matrice di sostituzione della domanda ottenuta in base al sistema di preferenza, tranne una: la simmetria. In effetti, l'assioma debole delle preferenze rivelate non è sufficiente perché risulti la simmetria della matrice di sostituzione se $k > 2$. (La simmetria è, invece, implicata dall'assioma debole delle preferenze rivelate se vi sono soltanto due beni, cioè $k = 2$. Infatti, le condizioni $p^T S = 0$ e $S p = 0$ per ogni p , richiedono $p_1 s_{11} + p_2 s_{21} = 0$ e $s_{11} p_1 + s_{12} p_2 = 0$, per cui $s_{12} = s_{21}$).

Nella Proposizione 3.14 la simmetria della matrice di sostituzione risulta dalla condizione che la matrice delle derivate seconde della funzione di utilità è simmetrica. L'assenza di simmetria per la matrice di sostituzione implica, allora, che non esiste una funzione di utilità che razionalizzi la domanda (perché, se la funzione di utilità esistesse, allora la matrice di sostituzione sarebbe simmetrica). Ne consegue, come peraltro già indicato nel Capitolo 2, che l'assioma debole delle preferenze rivelate è insufficiente perché la domanda sia razionalizzabile con un sistema regolare di preferenza.

Si prenda in esame il problema della razionalizzabilità della corrispondenza walrasiana di domanda $d(p, m)$, se cioè esiste un sistema regolare di preferenza che giustifichi questo criterio di scelta. Per la Proposizione 2.2 l'assioma debole delle preferenze rivelate è condizione necessaria per la razionalizzabilità e, per la Proposizione 2.3, il sistema di preferenza rivelata è, se regolare, l'unico sistema di preferenza che razionalizza $d(p, m)$. Si tratta, allora, di vedere sotto quale condizione il sistema di preferenza rivelata è regolare, è, cioè, completo e transitivo.

La condizione che assicura la razionalizzabilità della corrispondenza walrasiana di domanda con un sistema regolare di preferenza è quel rafforzamento dell'assioma debole delle preferenze rivelate che è stato introdotto dalla Definizione 2.6 con il nome di assioma generalizzato delle preferenze rivelate (GARP). Se la corrispondenza walrasiana di domanda è una funzione, questo rafforzamento diviene l'assioma forte delle preferenze rivelate (introdotto da Ville, 1946, e Houthakker, 1950).

Definizione 4.2 L'assioma forte delle preferenze rivelate (SARP) richiede che la funzione walrasiana di domanda soddisfi la relazione:

$$p^n d(p^1, m^1) > m^n$$

per ogni successione $(p^1, m^1), (p^2, m^2), \dots, (p^n, m^n)$ per la quale si abbia $d(p^i, m^i) \neq d(p^{i+1}, m^{i+1})$ e $p^i d(p^{i+1}, m^{i+1}) \leq m^i$ per ogni $i = 1, \dots, n-1$.

Si noti come per $n = 2$ questa relazione coincida con il WARP. Ciò che il SARP richiede in più è che questa relazione valga anche per $n > 2$. In tal caso viene introdotta una preferenza rivelata *indiretta*, nel senso

seguente. Sia $x^i = d(p^i, m^i)$ la scelta nella situazione (p^i, m^i) , per $i = 1, \dots, n$, e sia x^2 acquistabile nella situazione (p^1, m^1) , cioè $p^1 x^2 \leq m^1$; per il WARP deve essere $p^2 x^1 > m^2$ (infatti, x^1 si rivela preferito a x^2 e, quindi, non deve essere acquistabile nella situazione in cui viene scelto x^2). Il SARP richiede che se x^1 si rivela direttamente preferito a x^2 , x^2 si rivela direttamente preferito a x^3 , e così via, allora x^n non possa rivelarsi direttamente preferito a x^1 , debba, cioè, essere $p^n x^1 > m^n$. Si tenga presente che il SARP non è implicato dal WARP: con il SARP il sistema di preferenza rivelata viene arricchito, rispetto al WARP, includendo anche la preferenza rivelata indirettamente.

La Proposizione 2.4 indica, per il caso in esame (cioè, il criterio di scelta rappresentato dalla funzione walrasiana di domanda), che l'assioma forte delle preferenze rivelate è condizione necessaria e sufficiente perché il sistema di preferenza rivelata indirettamente (completandolo, se necessario, cioè se non è completo) sia il sistema regolare di preferenza che razionalizza la funzione walrasiana di domanda. Si tratta ora di vedere se questo sistema regolare di preferenza è rappresentabile con una funzione di utilità.

Vale, al riguardo, la proposizione seguente la cui dimostrazione è qui omessa.⁵

Proposizione 4.3 Se la funzione di domanda $d: \mathbb{R}_{++}^{k+1} \rightarrow \mathbb{R}_+^k$ (ossia, con $d(p, m) \in \mathbb{R}_+^k$ per ogni $B(p, m) = \{x \in \mathbb{R}_+^k : p \cdot x \leq m\}$ con $p \gg 0$ e $m > 0$), soddisfa le condizioni seguenti:

a) $p \cdot d(p, m) = m$ (ossia, la spesa per il paniere di beni scelto esaurisce la capacità di spesa),

b) ogni paniere di beni $x \gg 0$ risulta scelto per una opportuna coppia (p, m) (ossia $\bigcup_{p \gg 0, m > 0} d(p, m) = \mathbb{R}_+^k$),

c) $d(p, m)$ soddisfa la condizione di Lipschitz rispetto a m ,⁶

d) $d(p, m)$ soddisfa l'assioma forte delle preferenze rivelate,

allora, la funzione walrasiana di domanda $d(p, m)$ è continua e il criterio di scelta indicato da essa è razionalizzabile con un sistema regolare di preferenza, che può essere rappresentato con una funzione di utilità u continua, fortemente monotona e strettamente quasi-concava.

La Proposizione 4.3 implica che il SARP rende simmetrica la matrice di sostituzione⁷

⁵ Teoremi 1 e 2 in Uzawa, 1971. Le ipotesi piuttosto restrittive richieste da questa Proposizione possono essere indebolite, ad esempio, come indicato da Richter, 1971, e Hurwicz e Richter, 1971.

⁶ Questa condizione richiede che per ogni (p^0, m^0) esistano un $\varepsilon > 0$ e un $a > 0$ tali che $\|d(p, m') - d(p, m'')\| \leq a |m' - m''|$ per ogni terna p, m', p'' con $\|p - p^0\| < \varepsilon$, $|m' - m^0| < \varepsilon$ e $|m'' - m^0| < \varepsilon$. Essa è soddisfatta se la derivata della funzione $d(p, m)$ rispetto a m è limitata.

⁷ Molto semplicemente, essendo il sistema regolare di preferenza implicato dal SARP rappresentabile con una funzione di utilità, allora la matrice di sostituzione è simmetrica per la Proposizione 3.14.

$$S = D_p d(p, m) + D_m d(p, m) x^T$$

che il *WARP* rende già (come si è visto) semidefinita negativa (cioè, $\alpha^T S \alpha \leq 0$ per ogni $\alpha \in \mathbb{R}^k$) e tale che $p^T S = 0$ e $S p = 0$.

4.3 Dalla scelta di consumo alla funzione di utilità

Si tratta ora di vedere come sia possibile determinare la funzione di utilità a partire dalla funzione di domanda. Questa analisi consentirà di vedere come sia cruciale la simmetria della matrice di sostituzione.

Le condizioni di integrabilità di Antonelli. Si prenda come numerario (cioè, come unità di conto dei prezzi) il k -esimo bene, per cui è $p_k = 1$, e si assuma che la corrispondenza walrasiana di domanda $d(p, m)$, con $p x = m$ per ogni $x \in d(p, m)$, sia invertibile e che risulti una funzione (non una corrispondenza) inversa continua e differenziabile con continuità. Risulta, allora, possibile scrivere il sistema $p_h = p_h(x)$ per $h = 1, \dots, k-1$ e $m = m(x)$, che è la funzione inversa di domanda. (Si noti come l'ultima relazione sia implicata dalle precedenti, con $m = x_k + \sum_{h=1}^{k-1} x_h p_h(x)$, per cui è irrilevante nell'analisi successiva). Poiché si desidera che la domanda risulti come soluzione del problema $\max_{p x = m} u(x)$, la funzione inversa di domanda deve soddisfare le condizioni

$$\frac{\partial u(x)}{\partial x_h} = p_h(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x_k} \quad h = 1, \dots, k-1$$

che rappresentano le condizioni del primo ordine di quel problema di massimo. Si noti come ora le funzioni $p_h(x)$, con $h = 1, \dots, k-1$, siano note, mentre la funzione di utilità $u(x)$ sia incognita. Il sistema indicato è, allora, un sistema di equazioni differenziali alle derivate parziali. Perché questo sistema ammetta soluzione, esista cioè una funzione $u(x)$ che lo soddisfi, occorre che sia tale che valga per la funzione di utilità la relazione

$\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_h \partial x_\ell} = \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_\ell \partial x_h}$, per ogni coppia $h, \ell = 1, \dots, k-1$. Questa relazione richiede che la

funzione inversa di domanda soddisfi le condizioni⁸

$$\frac{\partial p_h(x)}{\partial x_\ell} - p_\ell(x) \frac{\partial p_h(x)}{\partial x_k} = \frac{\partial p_\ell(x)}{\partial x_h} - p_h(x) \frac{\partial p_\ell(x)}{\partial x_k} \quad h, \ell = 1, \dots, k-1$$

Queste condizioni sono denominate, nella teoria delle equazioni differenziali alle derivate parziali, *condizioni di integrabilità* e sono note, nella letteratura economica, come condizioni di Antonelli (1886), che le ha indicate per primo. Si noti come queste condizioni richiedano la simmetria della matrice di Antonelli, composta dagli elementi

$\frac{\partial p_h(x)}{\partial x_\ell} - p_\ell(x) \frac{\partial p_h(x)}{\partial x_k}$, con $h, \ell = 1, \dots, k-1$, e come esse esistano solo se $k > 2$.

⁸ Basta tenere conto, da un lato, che $\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_h \partial x_\ell} = \frac{\partial p_h}{\partial x_\ell} \frac{\partial u}{\partial x_k} + p_h \frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_\ell} = \frac{\partial p_h}{\partial x_\ell} \frac{\partial u}{\partial x_k} + p_h \frac{\partial p_\ell}{\partial x_k} \frac{\partial u}{\partial x_h} + p_h p_\ell \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2}$ e, dall'altro lato, che $\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_\ell \partial x_h} = \frac{\partial p_\ell}{\partial x_h} \frac{\partial u}{\partial x_k} + p_\ell \frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_h} = \frac{\partial p_\ell}{\partial x_h} \frac{\partial u}{\partial x_k} + p_\ell \frac{\partial p_h}{\partial x_k} \frac{\partial u}{\partial x_h} + p_\ell p_h \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2}$.

La teoria delle equazioni differenziali alle derivate parziali dice che se le funzioni $p_h(x)$ sono continue e differenziabili con continuità allora le condizioni di integrabilità sono necessarie e sufficienti perché la soluzione esista. Perciò, se le condizioni di Antonelli sono soddisfatte (quindi, senza condizioni se $k = 2$), allora il sistema di equazioni differenziali alle derivate parziali indicato precedentemente ammette soluzione, esiste cioè una funzione $u(x)$ che soddisfa le condizioni $\frac{\partial u(x)}{\partial x_h} = p_h(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x_k}$, per $h = 1, \dots, k-1$.

Se, inoltre, la matrice di Antonelli è semidefinita negativa, allora sono soddisfatte anche le condizioni del secondo ordine del problema $\max_{p \cdot x = m} u(x)$, per cui la funzione $u(x)$ individuata risolvendo il sistema differenziale è la rappresentazione del sistema di preferenza che razionalizza il criterio di scelta indicato dalla funzione indiretta di domanda $p(x)$.

Quanto indicato è riassunto nella Proposizione seguente.

Proposizione 4.4 Se, invertendo la corrispondenza walrasiana di domanda $d(p, m)$, risulta una funzione (non una corrispondenza) inversa di domanda $p_h(x)$, per $h = 1, \dots, k-1$ (e con $p_k = 1$, avendo preso il k -esimo bene come numerario), continua e differenziabile con continuità, tale che la matrice di Antonelli (composta dagli elementi $\frac{\partial p_h(x)}{\partial x_\ell} - p_\ell(x) \frac{\partial p_h(x)}{\partial x_k}$, con $h, \ell = 1, \dots, k-1$) risulta simmetrica e semidefinita negativa, allora si può integrare il sistema differenziale $\frac{\partial u(x)}{\partial x_h} = p_h(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x_k}$, ove $h = 1, \dots, k-1$, e risulta una funzione di utilità $u(x)$ che rappresenta il sistema di preferenza che ha generato la corrispondenza di domanda $d(p, m)$.⁹

Le condizioni di integrabilità di Samuelson. La funzione di utilità può essere determinata direttamente dalla funzione walrasiana di domanda, cioè, senza passare dalla funzione inversa di domanda (la prima analisi al riguardo è dovuta a Samuelson, 1950).

Si parta dalla relazione di Antonelli e Roy (Proposizione 3.13), che richiede

$$\frac{\partial u^*(p, m)}{\partial p_h} = -d_h(p, m) \frac{\partial u^*(p, m)}{\partial m} \quad h = 1, \dots, k$$

Si tratta ora di vedere come sia possibile determinare la funzione di utilità indiretta $u^*(p, m)$ a partire dalla funzione walrasiana di domanda $d(p, m)$. Si noti come ora la funzione $d(p, m)$ sia nota, mentre la funzione indiretta di utilità $u^*(p, m)$ sia incognita. Il sistema indicato è, allora, un sistema di equazioni differenziali alle derivate parziali. Si prenda ancora come numerario il k -esimo bene, per cui è $p_k = 1$, e si assuma che la funzione (non una corrispondenza) walrasiana di domanda sia continua e differenziabile con continuità.

Perché questo sistema ammetta soluzione, esista cioè una funzione $u^*(p, m)$ che lo soddisfi, occorre che sia tale che valgano per la funzione indiretta di utilità le relazioni

⁹ Le ipotesi indicate ($p(x)$ è una funzione, e non una corrispondenza, continua e differenziabile con continuità, inoltre tale che la matrice di Antonelli è ovunque simmetrica e semidefinita negativa) possono essere in qualche misura indebolite: al riguardo, ad esempio, Hurwicz (1971).

$$\frac{\partial^2 u^*(p, m)}{\partial p_h \partial p_\ell} = \frac{\partial^2 u^*(p, m)}{\partial p_\ell \partial p_h} \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 u^*(p, m)}{\partial p_h \partial m} = \frac{\partial^2 u^*(p, m)}{\partial m \partial p_h} \quad \text{per ogni } h, \ell = 1, \dots, k-1.$$

Queste relazioni richiedono che la funzione di domanda soddisfi le condizioni¹⁰

$$\frac{\partial d_h(p, m)}{\partial p_\ell} + d_\ell(p, m) \frac{\partial d_h(p, m)}{\partial m} = \frac{\partial d_\ell(p, m)}{\partial p_h} + d_h(p, m) \frac{\partial d_\ell(p, m)}{\partial m}$$

per $h, \ell = 1, \dots, k-1$.

Queste *condizioni di integrabilità* (che esistono solo se $k > 2$) richiedono la simmetria della matrice di Slutsky. Se sono soddisfatte, allora il sistema di equazioni differenziali alle derivate parziali indicato precedentemente ammette soluzione, esiste cioè una funzione $u^*(p, m)$ che soddisfa le condizioni $\frac{\partial u^*(p, m)}{\partial p_h} = -d_h(p, m) \frac{\partial u^*(p, m)}{\partial m}$, per $h = 1, \dots, k-1$. Se, inoltre, la matrice di Slutsky è semidefinita negativa, allora sono soddisfatte anche le condizioni del secondo ordine del problema $\max_{p \in X(m)} u(x)$, per cui la

funzione $u^*(p, m)$ individuata¹¹ risolvendo il sistema differenziale è una funzione indiretta di utilità, cioè $u^*(p, m) = \max_{p \in X(m)} u(x)$.

Per determinare la funzione diretta di utilità $u(x)$ a partire da quella indiretta $u = u^*(p, m)$ e dalla funzione di domanda $x = d(p, m)$, è sufficiente invertire la funzione di domanda $x = d(p, m)$ ottenendo generalmente una corrispondenza $(m(x), p(x))$ (tenendo conto che $p_k = 1$) e porre $u(x) = u^*(p(x), m(x))$ (anche se $(m(x), p(x))$ è una corrispondenza, e non una funzione, i diversi possibili valori associati ad uno stesso x determinano una medesima utilità $u^*(p, m)$, così come accade quando uno stesso paniere di beni viene scelto in corrispondenza a diverse coppie p, m). Questa funzione di utilità $u(x)$ è la rappresentazione del sistema di preferenza che razionalizza il criterio di scelta indicato dalla funzione walrasiana di domanda $d(p, m)$.

La Proposizione seguente riassume quanto ora indicato.

Proposizione 4.5 Se la funzione (non una corrispondenza) walrasiana di domanda $d(p, m)$ è continua e differenziabile con continuità ed è tale che la matrice di Slutsky (di elementi $\frac{\partial d_h(p, m)}{\partial p_\ell} + d_\ell(p, m) \frac{\partial d_h(p, m)}{\partial m}$, con $h, \ell = 1, \dots, k-1$) è simmetrica e semidefinita negativa, allora il sistema differenziale $\frac{\partial u^*(p, m)}{\partial p_h} = -d_h(p, m) \frac{\partial u^*(p, m)}{\partial m}$, ove $h = 1, \dots, k-1$, può essere integrato e risulta una funzione indiretta di utilità $u^*(p, m)$ da cui è possibile risalire, tenendo conto della funzione di domanda $d(p, m)$, alla funzione

¹⁰ Basta tenere conto che $\frac{\partial^2 u^*}{\partial p_h \partial p_\ell} = -d_h \frac{\partial^2 u^*}{\partial m \partial p_\ell} - \frac{\partial u^*}{\partial m} \frac{\partial d_h}{\partial p_\ell}$ e $\frac{\partial^2 u^*}{\partial p_h \partial m} = -d_h \frac{\partial^2 u^*}{\partial m^2} - \frac{\partial u^*}{\partial m} \frac{\partial d_h}{\partial m}$, per cui $\frac{\partial^2 u^*}{\partial p_h \partial p_\ell} = d_h d_\ell \frac{\partial^2 u^*}{\partial m^2} + d_h \frac{\partial u^*}{\partial m} \frac{\partial d_\ell}{\partial m} - \frac{\partial u^*}{\partial m} \frac{\partial d_h}{\partial p_\ell}$.

¹¹ Si noti che questa funzione è determinata a meno di una trasformazione monotona crescente. Cioè, se $u^*(p, m)$ soddisfa le condizioni di Antonelli e Roy, allora anche una sua qualsiasi trasformazione monotona crescente le soddisfa, per cui è anch'essa una soluzione del sistema differenziale alle derivate parziali definito da queste condizioni.

di utilità $u(x)$ che rappresenta il sistema di preferenza che ha generato la funzione di domanda $d(p, m)$.¹² □

Si noti come possa accadere che la domanda diretta $d(p, m)$ sia espressa da una corrispondenza e che quella inversa $p(x)$ sia espressa da una funzione, per cui la funzione di utilità è ricavabile, se la matrice di Antonelli è simmetrica e semidefinita negativa, dal sistema $\frac{\partial u(x)}{\partial x_h} = p_h(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x_k}$, per $h = 1, \dots, k-1$. Analogamente, può accadere che la domanda inversa $p(x)$ sia espressa da una corrispondenza, mentre quella diretta $d(p, m)$ è espressa da una funzione, per cui la funzione di utilità è ricavabile, se la matrice di Slutsky è simmetrica e semidefinita negativa, dal sistema $\frac{\partial u^*(p, m)}{\partial p_h} = -d_h(p, m) \frac{\partial u^*(p, m)}{\partial m}$, per $h = 1, \dots, k-1$. Ovviamente, se entrambe la domanda diretta e quella inversa sono espresse da funzioni, allora si può seguire l'uno o l'altro procedimento, pervenendo alla stessa soluzione.

4.4 La domanda con preferenze dipendenti dal contesto o soggette a variazioni

L'analisi della domanda di consumo è stata finora compiuta ipotizzando che le preferenze dell'agente sui panieri di beni siano indipendenti da ogni altro elemento del contesto in cui l'agente si trova. Nel seguito vengono brevemente analizzati i casi in cui: a) le preferenze dipendono dai prezzi e dalla capacità di spesa, b) le preferenze dell'agente in esame dipendono dalla scelta di altri agenti, c) le preferenze mutano dipendendo da una qualsiasi altra ragione (senza indagare su questa, che è, in alcuni casi interessanti, di tipo dinamico, come verrà esemplificato trattando della scelta dinamica).

Si assuma che il sistema di preferenza $\langle X, \succeq \rangle$ sia regolare e continuo e, quindi, rappresentabile con una funzione ordinale di utilità $u: X \rightarrow \mathbb{R}$. Allora, si ha una funzione di utilità $u(x; p, m)$ se le preferenze dipendono dai prezzi e dalla capacità di spesa e una funzione di utilità $u(x; \xi)$, ove ξ rappresenta le scelte di altri agenti, se le preferenze dipendono da queste.

L'effetto Veblen. Sia il sistema di preferenza rappresentato dalla funzione di utilità $u(x; p, m)$. Si assuma che questa funzione sia continua e differenziabile quanto occorra anche rispetto a p e m e che sia, inoltre, omogenea di grado zero rispetto a queste variabili, cioè con $u(x; \alpha p, \alpha m) = u(x; p, m)$ per ogni $\alpha > 0$. La corrispondenza walrasiana di domanda $x = d(p, m)$ è, allora, anch'essa omogenea di grado zero, cioè $d(\alpha p, \alpha m) = d(p, m)$ per ogni $\alpha > 0$. Seguendo l'analisi della Proposizione 3.12, con le ipotesi ivi introdotte, si perviene, per il caso in esame, alle relazioni¹³

¹² Le ipotesi indicate ($d(p, m)$ è una funzione, e non una corrispondenza, continua e differenziabile con continuità, inoltre tale che la matrice di Slutsky è ovunque simmetrica e semidefinita negativa) possono essere in qualche misura indebolite: al riguardo, ad esempio, Hurwicz (1971).

¹³ Differenziando le condizioni del primo ordine si ottiene, nel caso in esame, il sistema

$$D_p d(p, m) = S(p, m) \left(I - \frac{1}{\lambda^*} D_{xp}^2 u \right) - \frac{(D_{xx}^2 u)^{-1} p x^{*T}}{p^T (D_{xx}^2 u)^{-1} p}$$

$$D_m d(p, m) = \frac{(D_{xx}^2 u)^{-1} p}{p^T (D_{xx}^2 u)^{-1} p} - \frac{1}{\lambda^*} S(p, m) D_{xm}^2 u$$

$$D_p u^*(p, m) = -\lambda^* x^* < 0$$

$$D_m u^*(p, m) = \lambda^* > 0$$

Mentre la relazione di Antonelli e Roy rimane identica a quella indicata dalla Proposizione 3.13, la relazione di Slutsky risulta modificata e diviene, nel caso in esame,

$$D_p d(p, m) = S(p, m) \left(I - \frac{1}{\lambda^*} (D_{xp}^2 u + (D_{xm}^2 u) x^{*T}) \right) - (D_m d(p, m)) d(p, m)^T$$

che mostra una matrice di sostituzione che differisce dalla matrice di Slutsky per il fattore $\left(I - \frac{1}{\lambda^*} (D_{xp}^2 u + (D_{xm}^2 u) x^{*T}) \right)$. In particolare, questa matrice di sostituzione non presenta le

proprietà della matrice di Slutsky (indicate dalla Proposizione 3.14), ossia non è necessariamente simmetrica, semidefinita negativa e tale che il suo prodotto per il vettore p è pari a zero. Non essendo semidefinita negativa, non è più necessariamente vero che sia non positivo l'effetto di sostituzione diretto, cioè $\frac{\partial h_j(p, u)}{\partial p_j}$ può risultare, per $j=1, \dots, k$,

sia negativo che positivo. Quindi, può risultare anche per un bene normale, cioè con $\frac{\partial d_j(p, m)}{\partial m} > 0$, che sia $\frac{\partial d_j(p, u)}{\partial p_j} > 0$, possibilità questa esclusa senza la dipendenza

delle preferenze dai prezzi (Proposizione 3.19).

Questo comportamento viene indicato come “effetto Veblen” dal nome dell'economista e sociologo Thorstein Veblen (1857-1929) che lo ha indicato in relazione ai consumi di lusso: se lo scopo dell'acquisto è l'ostentazione della ricchezza, allora quanto più un bene è caro tanto più viene richiesto dai ricchi. La ricchezza viene ostentata con il consumo di beni che gli altri agenti non si possono permettere: l'alto prezzo rende allora questi beni, insieme, esclusivi e desiderati. Oltre che in relazione ai consumi opulenti, l'influenza del prezzo sulle preferenze si manifesta anche quando il prezzo è inteso come un segnale di qualità. In questo caso, un bene più caro viene preferito ad un altro meno caro perché viene ritenuto di migliore qualità a causa del prezzo più alto (che l'acquirente collega ad un costo di produzione più elevato e/o ad un maggiore apprezzamento da parte degli altri consumatori) e può allora accadere che la domanda del primo bene sia maggiore (e quello del secondo minore) in relazione alla differenza tra i due prezzi.¹⁴

$$\begin{bmatrix} 0 & -p^T \\ -p & D_{xx}^2 u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\lambda^* \\ dx^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^{*T} dp - dm \\ (\lambda^* - D_{xp}^2 u) dp - (D_{xm}^2 u) dm \end{bmatrix}$$

dalla cui soluzione risultano le relazioni nel testo, ove

$$S(p, m) = \lambda^* ((D_{xx}^2 u)^{-1} - \frac{(D_{xx}^2 u)^{-1} p p^T (D_{xx}^2 u)^{-1}}{p^T (D_{xx}^2 u)^{-1} p})$$

è la matrice di Slutsky, che è simmetrica, semidefinita negativa e tale che $S(p, m) p = 0$.

¹⁴ Sia, ad esempio, $u = (3 + 5 \frac{p_1^2}{p_2 m}) \ln x_1 + 32 \ln x_2$. Risulta la funzione di domanda

$$x_1 = \frac{m}{p_1} \frac{3 + 5 \frac{p_1^2}{p_2 m}}{35 + 5 \frac{p_1^2}{p_2 m}} \quad x_2 = \frac{m}{p_2} \frac{32}{35 + 5 \frac{p_1^2}{p_2 m}}$$

L'effetto imitazione (band-wagon). Sia il sistema di preferenza rappresentato dalla funzione di utilità $u(x; \xi)$, ove ξ è la scelta di consumo di altri agenti. Si ha imitazione quando il consumo di qualche agente influisce positivamente (o negativamente) sulle preferenze dell'agente in esame, cioè il fatto che un bene sia consumato da certi agenti rende questo bene maggiormente appetito dall'agente in esame (molti consumi di moda sono di questo tipo, legati alla loro esibizione da parte di personaggi riconosciuti come *opinion leader*). Sia la scelta ξ una funzione walrasiana di domanda continua e differenziabile, indicata da $\xi(p)$, e sia la funzione di utilità $u(x; \xi)$ continua e differenziabile anche rispetto a ξ . Seguendo, come per l'effetto Veblen, l'analisi della Proposizione 3.11, con le ipotesi ivi introdotte, si perviene, per il caso in esame, alla seguente relazione modificata di Slutsky

$$D_p d(p, m) = S(p, m) \left(I - \frac{1}{\lambda^*} D_{x\xi}^2 u D_p \xi(p) \right) - (D_m d(p, m)) d(p, m)^T$$

La matrice di sostituzione differisce, ora, dalla matrice di Slutsky per il fattore $\left(I - \frac{1}{\lambda^*} D_{x\xi}^2 u D_p \xi(p) \right)$ e non presenta, come già nel caso dell'effetto Veblen, le proprietà della matrice di Slutsky indicate dalla Proposizione 3.14.

Prendendo in esame un bene (il bene h -esimo) per il quale si verifichi l'effetto imitazione, sia cioè $\frac{\partial^2 u(x; \xi)}{\partial x_h \partial \xi_h} > 0$, e supponendo che sia $\frac{\partial^2 u(x; \xi)}{\partial x_h \partial \xi_j} = 0$ per ogni $j \neq h$ con $j = 1, \dots, k$, si ottiene

$$\frac{\partial d_h(p, m)}{\partial p_h} = s_{hh} \left(1 - \frac{1}{\lambda^*} \frac{\partial^2 u(x; \xi)}{\partial x_h \partial \xi_h} \frac{\partial \xi_h(p)}{\partial p_h} \right) - \frac{\partial d_h(p, m)}{\partial m} d_h(p, m)$$

ove s_{hh} è l'elemento nella h -esima riga e colonna di $S(p, m)$. Allora, se il bene è ordinario per l'*opinion leader*, cioè $\frac{\partial \xi_h(p)}{\partial p_h} < 0$, e normale per l'agente in esame, cioè $\frac{\partial d_h(p, m)}{\partial m} >$

0 , non solo risulta che esso è ordinario per l'agente in esame, cioè $\frac{\partial d_h(p, m)}{\partial p_h} < 0$, ma

anche che la derivata della sua domanda rispetto al prezzo è minore di quella che risulterebbe in assenza dell'effetto imitazione, un aumento del prezzo determina, cioè, una diminuzione della quantità domandata maggiore di quella che si determinerebbe senza

l'effetto imitazione (se, cioè, $\frac{\partial^2 u(x; \xi)}{\partial x_h \partial \xi_h} = 0$). Tuttavia, come si vedrà analizzando

l'equilibrio di mercato, può accadere che l'effetto imitazione determini un prezzo di equilibrio che dipende positivamente dalla quantità esistente del bene, mostri cioè un prezzo maggiore (anziché minore) quando il bene è meno scarso. (Al contrario, questo risultato non sussiste con l'effetto Veblen).

La variazione delle preferenze. La funzione walrasiana di domanda dipende dalle preferenze, che sono rappresentate dalla funzione di utilità (tenendo conto che, essendo l'utilità ordinale, la funzione di domanda non varia se si sostituisce alla funzione u una funzione v con $v = f(u)$, ove $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è una qualsiasi funzione monotona crescente, come indicato nel Paragrafo 2.2). Si tratta, allora, di determinare come varia la domanda di consumo al variare della funzione di utilità. Limitandosi all'analisi differenziale del primo ordine, la domanda risulta dipendere dalla funzione di utilità tramite il suo gradiente $Du(x^*)$ nel punto scelto (basta osservare le condizioni del primo ordine della scelta di

Entrambi i beni sono normali e la domanda del secondo bene è monotonicamente decrescente rispetto a p_2 . Invece, la domanda del primo bene è funzione crescente di p_1 per $\frac{p_1}{p_2 m} \in [1, 21/5]$ e ne è funzione decrescente fuori da questo intervallo.

consumo nel Paragrafo 3.7): in altri termini, in questa analisi, la scelta di consumo $x = d(p, m)$ si modifica al variare di u solo se si modifica il gradiente $Du(x)$. E' possibile, perciò, indicare la dipendenza della funzione walrasiana di domanda dalla funzione di utilità scrivendo $d(p, m; Du(x))$, mettendo cioè in evidenza soltanto il gradiente di questa nel punto $x = d(p, m)$. Si noti che la funzione $d(p, m; Du(x))$ è separatamente omogenea di grado zero rispetto a (p, m) e a $Du(x)$, cioè $d(\alpha p, \alpha m; \beta Du(x)) = d(p, m; Du(x))$ per ogni coppia $\alpha, \beta > 0$.

Seguendo l'analisi della Proposizione 3.12, con le ipotesi ivi introdotte, e differenziando le condizioni del primo ordine della scelta di consumo rispetto a $Du(x)$, si perviene alla relazione

$$D_{Du} d(p, m; Du(x)) = -\frac{1}{\lambda^*} S(p, m; Du(x))$$

Per le proprietà della matrice di Slutsky, si ottiene che

$$\frac{\partial d_h(p, m; Du(x))}{\partial D_h u(x)} \geq 0 \quad h = 1, \dots, k$$

$$\frac{\partial d_h(p, m; Du(x))}{\partial D_j u(x)} = \frac{\partial d_j(p, m; Du(x))}{\partial D_h u(x)} \quad h, j = 1, \dots, k$$

ossia, un incremento, *ceteris paribus*, dell'utilità marginale di un bene (e, quindi, del saggio marginale di sostituzione rispetto ad esso) ne accresce, o mantiene invariata, la quantità domandata e determina una variazione della quantità domandata di un altro bene pari a quella che la variazione dell'utilità marginale di questo determina sulla quantità domandata del primo bene

4.5 La scelta di scambio di un agente che possiede un paniere di beni

La teoria della scelta di consumo è stata svolta finora considerando un agente dotato di una capacità di spesa m che può essere usata per acquistare un paniere di beni $x \in X$, con $X \subset \mathbb{R}_+^k$, in presenza di prezzi $p \in \mathbb{R}_+^k$ su cui l'agente in esame non ha alcun potere, è cioè un *price-taker*. Si tratta ora di generalizzare questa teoria considerando un agente che può eseguire scambi, ossia compravendite (non solo acquisti, ma anche vendite).

Vi sono, ora, per l'agente in esame, una dotazione di beni ω , un insieme di panieri possibili di beni X , e un sistema di preferenza $\langle X, \succeq \rangle$. La dotazione $\omega \in \mathbb{R}_+^k$ è il paniere di beni che l'agente possiede prima dello scambio. L'insieme dei panieri possibili di beni $X \subset \mathbb{R}^k$ è composto da vettori che non sono necessariamente non negativi, come nella teoria del consumo, ma possono contenere elementi negativi, corrispondenti a vendite di servizi (come i diversi tipi di lavoro): infatti, la quantità erogabile di ciascuno di questi servizi non è assegnata indipendentemente l'una dall'altra e non può, quindi, essere introdotta fra gli elementi del vettore ω .¹⁵ Le

¹⁵ Ad esempio, l'agente è in grado di fornire lavori di due tipi (può fare il muratore e il magazziniere, tipi di lavoro cui corrispondono generalmente salari diversi) per complessive 35 ore la settimana. Però, se esegue il primo tipo di lavoro per un certo numero di ore, può eseguire il secondo lavoro, al massimo, solo per il rimanente numero di ore, e viceversa. Allora, gli elementi di ω che corrispondono a questi due beni non possono

possibili azioni dell'agente di scambio sono rappresentate da vettori $x \in X$, quindi con scambi rappresentati da vettori $z = x - \omega$: gli elementi positivi di z indicano quantità acquistate, quelli negativi quantità vendute. Il vincolo di bilancio diviene l'insieme

$$B(p, \omega, X) = \{x \in X: p \cdot x \leq p \cdot \omega\}$$

Senza perdita di generalità, si può prescindere dalla dotazione ω , definendo come *insieme degli scambi possibili* l'insieme $Z = X - \{\omega\}$, quindi, con azioni di scambio rappresentate dai vettori $z \in Z$. (Conviene, tuttavia, evidenziare la dotazione ω quando si desidera esaminare la dipendenza della scelta da essa, definendo anche con il simbolo m il suo valore, ponendo cioè $m = p \cdot \omega$). In tal caso, il vincolo di bilancio è l'insieme

$$B(p, Z) = \{z \in Z: p \cdot z \leq 0\}$$

Si assumano le seguenti ipotesi, che adattano al caso in esame ipotesi già introdotte per l'analisi della scelta di consumo:

a) l'insieme $X \subset \mathbb{R}^k$, e quindi anche $Z \subset \mathbb{R}^k$, è non vuoto, convesso, chiuso e limitato (come indicato all'inizio del Capitolo 3);

$$b) p > 0 \text{ e } 0 > \min_{z \in Z} p \cdot z;$$

c) il sistema di preferenza $\langle Z, \succeq \rangle$ è regolare e continuo, perciò rappresentabile con una funzione di utilità $u: Z \rightarrow \mathbb{R}$ continua (secondo la Proposizione 3.2, tenendo conto che Z è connesso, essendo convesso).

Ne conseguono le seguenti proprietà:

a) l'*insieme di scelta*, composto dagli scambi preferiti, cioè il sottoinsieme di $B(p, Z)$ massimale rispetto a $\succeq$

$$e(B(p, Z)) = e(p) = \{z \in Z: p \cdot z \leq 0 \text{ e } z' \not\succeq z \text{ per ogni } z' \in Z \text{ con } p \cdot z' \leq 0\}$$

è non vuoto (Proposizione 3.3); è tale che $p \cdot z = 0$ per ogni $z \in e(p)$ se il sistema di preferenza è monotono (o localmente non saziato, Proposizione 3.4); ed è soluzione del problema $\max_{z \in B(p, Z)} u(z)$, che è unica se la funzione di utilità u è strettamente quasi-concava (Proposizione 3.6);

b) la *funzione indiretta di utilità* $u^*: \mathbb{R}_+^k \rightarrow \mathbb{R}$, definita da $u^*(p) = \max_{z \in B(p, Z)} u(z)$, è continua (Proposizione 3.7), omogenea di grado zero (cioè, $u^*(\alpha p) = u^*(p)$ per ogni $\alpha > 0$ e $p \in \mathbb{R}_+^k$, Proposizione 3.8) e quasi-concava (Proposizione 3.10);

essere posti entrambi pari a 35 (ore la settimana), poiché l'agente non ha la disponibilità di tutte e due queste quantità, ma solo dell'una o dell'altra o di una loro combinazione intermedia. Con l'impostazione indicata nel testo, gli elementi in ω corrispondenti a questi due beni sono posti pari a zero, però l'insieme X contiene vettori in cui questi elementi sono alternativamente pari a -35 o pari a numeri la cui somma è non inferiore a -35.

c) la *corrispondenza walrasiana di domanda netta (o di eccesso di domanda)* $e: \mathbb{R}_+^k \rightarrow Z$, definita da $e(p) = \arg \max_{z \in B(p, Z)} u(z)$, è omogenea di grado zero (cioè, $e(\alpha p) = e(p)$ per ogni $\alpha > 0$ e $p \in \mathbb{R}_+^k$, Proposizione 3.8) e, nel caso in cui sia una funzione, continua (Proposizione 3.7).¹⁶ Si ha, inoltre, che $p \cdot z \leq 0$ (che diviene $p \cdot z = 0$, se le preferenze sono monotone, o non saziate localmente) per ogni $z \in e(p)$ e $p \in \mathbb{R}_+^k$.

Per ogni p ove la corrispondenza di eccesso di domanda è una funzione con $e(p)$ punto interno di Z , valgono le seguenti relazioni (ottenute seguendo l'analisi della Proposizione 3.12)

$$D_p e(p) = S(p) - \frac{(D^2 u)^{-1} p z^*{}^T}{p^T (D^2 u)^{-1} p}$$

$$D_p u^*(p) = -\lambda^* z^*$$

con il consueto significato dei simboli, ove $S(p)$ è la matrice di Slutsky (con le proprietà indicate dalla Proposizione 3.14). Mettendo in evidenza la dotazione ω e il suo valore $m = p \cdot \omega$ e tenendo conto che la dotazione influisce sulla scelta solo tramite il suo valore (basta osservare che il vincolo di bilancio richiede $p \cdot x \leq p \cdot \omega$) risultano anche le relazioni

$$D_m e(p, m) = \frac{(D^2 u)^{-1} p}{p^T (D^2 u)^{-1} p} \quad D_\omega e(p, p\omega) = \frac{(D^2 u)^{-1} p p^T}{p^T (D^2 u)^{-1} p} - I$$

$$D_m u^*(p, m) = \lambda^* \quad D_\omega u^*(p, p\omega) = \lambda^* p$$

Risultano, allora, le relazioni di Antonelli-Roy (Proposizione 3.13) e di Slutsky (Proposizione 3.18)

$$e(p) = - \frac{D_p u^*(p)}{D_m u^*(p, p\omega)}$$

$$D_p e(p) = S(p) - (D_m e(p, m)) e(p)^T$$

Considerando le derivate $\frac{\partial e_h(p)}{\partial p_h}$, mentre non vi sono particolari

osservazioni se l'eccesso di domanda e_h è positivo, se questo è, invece, negativo (se, cioè, il bene è venduto dall'agente di scambio), si trova che l'effetto di reddito cambia segno: nel caso dei beni normali esso non ha più lo stesso segno (non positivo) dell'effetto di sostituzione, ma segno opposto.

Può quindi accadere, per un bene normale, che sia $\frac{\partial e_h(p)}{\partial p_h} > 0$ se $e_h < 0$,

cioè che la *curva di offerta* sia *decescente* (anziché non decrescente, come richiederebbe l'effetto di sostituzione).¹⁷

¹⁶ Se $e(p)$ è una corrispondenza, allora è emicontinua superiormente (come indicato subito dopo la Proposizione 3.7).

¹⁷ Walras è stato probabilmente il primo a notare questa asimmetria tra domanda e offerta.

Considerando le derivate $\frac{\partial e_h(p, p\omega)}{\partial \omega_h}$, si trova, per $h \neq j$, che esse sono positive se il bene h -esimo è normale e negative se esso è inferiore, mentre, per $h = j$, queste derivate sono maggiori di -1 per i beni normali e minori di -1 per i beni inferiori. Inoltre, poiché $p^T D_\omega e(p, p\omega) = 0$, deve essere $\frac{\partial e_h(p, p\omega)}{\partial \omega_h} \in (-1, 0)$, per ogni $h = 1, \dots, k$, se tutti i beni sono normali. (Il lettore può interpretare facilmente il significato, peraltro abbastanza banale, di questi risultati, tenendo conto che $z = x - \omega$ e $m = p\omega$).

L'analisi compiuta in questo capitolo e nel Capitolo 3 riguardo alla scelta di consumo e alla corrispondenza walrasiana di domanda possono essere estese, con le opportune modificazioni, alla scelta di scambio e alla corrispondenza di domanda netta introdotte in questo paragrafo.

4.6 La domanda aggregata e l'agente rappresentativo

Vi siano n agenti di consumo, ciascuno di quali presenti un criterio di scelta rappresentato da una funzione walrasiana di domanda $d_i(p, m_i)$, con $i = 1, \dots, n$.¹⁸ Si definisce, in tal caso, *funzione walrasiana aggregata di domanda* la funzione che esprime la quantità di beni domandata complessivamente dagli agenti, ossia $\sum_{i=1}^n d_i(p, m_i)$, che è una funzione del tipo $D(p, m_1, \dots, m_n)$. (E' del tutto equivalente, nell'analisi successiva, considerare, al posto della funzione aggregata, quella media, cioè, $d(p, m_1, \dots, m_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n d_i(p, m_i)$).

Analogamente, nel caso di agenti dotati di un paniere di beni (esaminato nel Paragrafo 4.5), la cui funzione walrasiana di domanda è del tipo $d_i(p, p\omega_i)$, ove $\omega_i \in \mathbb{R}_+^k$ è la dotazione dell'agente i -esimo, e la cui funzione di eccesso di domanda è, conseguentemente, $d_i(p, p\omega_i) - \omega_i$, la funzione walrasiana aggregata di domanda è del tipo $D(p, p\omega_1, \dots, p\omega_n)$ e quella di eccesso di domanda è $D(p, p\omega_1, \dots, p\omega_n) - \Omega$, ove $\Omega = \sum_{i=1}^n \omega_i$.

Valgono le seguenti osservazioni:

a) la domanda aggregata non è, normalmente, rappresentata da una funzione del tipo $D(p, M)$, ove $M = \sum_{i=1}^n m_i$ (o, la domanda media, da una

¹⁸ Nei paragrafi precedenti di questo capitolo e nel Capitolo 3, nei quali viene preso in considerazione un singolo agente, l'indice associato ad una variabile (ad esempio, l'indice h in x_h) indica il bene in esame ($x_h \in \mathbb{R}$ è una quantità di bene h -esimo). In questo paragrafo (e nel seguito, quando si presenterà la stessa situazione) viene presa in considerazione una molteplicità di agenti. Ora l'indice associato ad una variabile indica l'agente in esame (ad esempio, $x_i \in \mathbb{R}^k$ indica un paniere di beni a disposizione dell'agente i -esimo). Se vengono indicati due indici, il primo si riferisce all'agente e il secondo al bene (ad esempio, $x_{ih} \in \mathbb{R}$ indica una quantità di bene h -esimo a disposizione dell'agente i -esimo).

funzione del tipo $d(p, m)$, ove $m = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n m_i$ e, nel caso di agenti dotati di un paniere di beni, da una del tipo $D(p, p\Omega)$;

b) non necessariamente esiste un sistema regolare di preferenza che la razionalizzi (in particolare, non necessariamente essa soddisfa l'assioma debole delle preferenze rivelate e, quindi, a maggior ragione, l'assioma forte, che è, per il caso in esame, come indicato dalla Proposizione 2.4, condizione per la razionalizzabilità);

c) ed, infine, anche quando la razionalizzazione sia possibile, non necessariamente il sistema di preferenza risultante rappresenta il sistema di preferenza sociale (nel senso che verrà precisato nel seguito).

Se dovessero risultare soddisfatte le condizioni precedenti, se, cioè, la funzione aggregata di domanda è del tipo $D(p, M)$ (oppure, $D(p, p\Omega)$), ed è razionalizzabile con un sistema regolare di preferenza, che, a sua volta, rappresenta le preferenze sociali di consumo, allora questo sistema di preferenza può essere definito come l'agente rappresentativo della collettività degli agenti le cui scelte determinano la funzione aggregata di domanda. Infatti, in tal caso, è equivalente considerare l'insieme degli n agenti (rappresentati dai loro sistemi di preferenza) oppure l'agente rappresentativo (cioè, il sistema di preferenza che razionalizza la funzione aggregata di domanda), sia sotto l'aspetto positivo (cioè, la scelta dell'agente rappresentativo coincide con quella dell'insieme degli n agenti), sia sotto l'aspetto normativo (cioè, la scelta dell'agente rappresentativo è socialmente ottimale per la collettività degli n agenti). L'esistenza dell'agente rappresentativo richiede che siano soddisfatte le condizioni trovate da Antonelli (1886), Nataf (1953) e Gorman (1953).

Proposizione 4.6 (*Condizioni di Antonelli-Nataf-Gorman*). Si considerino i punti $(p, m_1, \dots, m_n)$ di $\mathbb{R}_+^{k+n}$ per i quali le funzioni walrasiane di domanda $d_i(p, m_i)$ sono differenziabili. La funzione aggregata $\sum_{i=1}^n d_i(p, m_i)$ è del tipo $D(p, M)$, con $M = \sum_{i=1}^n m_i$, se e solo se le funzioni indirette di utilità possono essere rappresentate, per ogni $i = 1, \dots, n$, da funzioni del tipo $u_i^*(p, m_i) = a_i(p) + b(p) m_i$, cioè, lineari rispetto alla capacità di spesa e con il coefficiente $b(p)$ uguale per tutti gli individui.

Dimostrazione. Le condizioni di Antonelli-Nataf-Gorman sono sufficienti: infatti, le funzioni indirette di utilità $u_i^*(p, m_i) = a_i(p) + b(p) m_i$ conducono (per la relazione di Antonelli e Roy $d_i(p, m_i) = -\frac{D_p u_i^*(p, m_i)}{D_{m_i} u_i^*(p, m_i)}$) alle funzioni walrasiane di domanda $d_i(p,$

$m_i) = -\frac{1}{b(p)}(D_p a_i(p) + m_i D_p b(p))$ e, conseguentemente, alla funzione aggregata di

domanda $\sum_{i=1}^n d_i(p, m_i) = -\frac{1}{b(p)}(\sum_{i=1}^n D_p a_i(p) + M D_p b(p))$, che è del tipo $D(p, M)$.

La dimostrazione che le condizioni di Antonelli-Nataf-Gorman sono necessarie è più complessa e viene qui soltanto accennata. La condizione $\sum_{i=1}^n d_i(p, m_i) = D(p, \sum_{i=1}^n m_i)$ implica che $\sum_{i=1}^n D_{m_i} d_i(p, m_i) dm_i = 0$ per ogni redistribuzione della capacità totale di

spesa M , ossia con $\sum_{i=1}^n dm_i = 0$. Ne consegue che il vettore $D_{m_i} d_i(p, m_i)$ è indipendente dall'indice i , è, cioè, del tipo $D_{m_i} d_i(p, m_i) = \beta(p)$. Integrando questa relazione, si ottiene che le funzioni di domanda sono del tipo $d_i(p, m_i) = m_i \beta(p) + \alpha_i(p)$ e, quindi, per la relazione di Antonelli e Roy, che le funzioni indirette di utilità soddisfano le condizioni $-\frac{D_p u^*(p, m_i)}{D_{m_i} u^*(p, m_i)} = m_i \beta(p) + \alpha_i(p)$. Queste equazioni implicano che $u^*(p, m_i) = F_i(a_i(p) + m_i b(p))$, ove $F_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è una qualsiasi funzione monotona crescente (in accordo con la nozione ordinale di utilità), con $-\frac{1}{b(p)} D_p b(p) = \beta(p)$ e $-\frac{1}{b(p)} D_p a_i(p) = \alpha_i(p)$. (Si noti che mentre $a_i(p)$ e $b(p)$ sono scalari, $\alpha_i(p)$ e $\beta(p)$ sono vettori). $\square$

Proposizione 4.7 Se le condizioni di Antonelli-Nataf-Gorman sono soddisfatte, allora la funzione aggregata di domanda $D(p, M)$ è razionalizzabile. In particolare, il sistema di preferenza dell'agente rappresentativo ha funzione indiretta di utilità del tipo $U^*(p, M) = A(p) + b(p) M$, ove $A(p) = \sum_{i=1}^n a_i(p)$ (ricordando che le funzioni individuali indirette di utilità sono, per le condizioni di Antonelli-Nataf-Gorman, del tipo $u_i^*(p, m_i) = a_i(p) + b(p) m_i$).

Dimostrazione. Il sistema di preferenza rappresentato dalla funzione indiretta di utilità $U^*(p, M) = A(p) + b(p) M$ determina, attraverso la relazione di Antonelli e Roy, proprio la funzione aggregata di domanda. Infatti, si ha che $-\frac{D_p U^*(p, M)}{D_M U^*(p, M)} = -\frac{1}{b(p)} (\sum_{i=1}^n D_p a_i(p) + M D_p b(p)) = \sum_{i=1}^n d_i(p, m_i) = D(p, M)$. $\square$

Sebbene l'analisi delle preferenze sociali sia presentata più avanti, nel Capitolo 7, è qui possibile introdurre la Proposizione seguente, che mostra come le condizioni di Antonelli-Nataf-Gorman non solo garantiscano l'esistenza dell'agente rappresentativo, ma anche che la sua scelta massimizza la funzione di benessere sociale di Bentham.

Proposizione 4.8 Siano gli individui dotati di una funzione cardinale monotona e strettamente concava di utilità $u_i(x_i)$ e le corrispondenti funzioni indirette $u_i^*(p, m_i)$ soddisfino le condizioni di Antonelli-Nataf-Gorman. Allora, la funzione aggregata di domanda massimizza la funzione di benessere sociale di Bentham $U = \sum_{i=1}^n u_i$, cioè

$$D(p, M) = \sum_{i=1}^n d_i(p, m_i) = \arg \max_{p \sum_{i=1}^n x_i \leq M} \sum_{i=1}^n u_i(x_i)$$

ove $M = \sum_{i=1}^n m_i$.

Dimostrazione. Sia $\max_{p \sum_{i=1}^n x_i \leq M} \sum_{i=1}^n u_i(x_i) = \sum_{i=1}^n u_i(x_i^*)$. Essendo le funzioni di utilità monotone, si ha $p \sum_{i=1}^n x_i^* = M$. Sia $m_i^* = p x_i^*$. Valgono, allora, le uguaglianze $\max_{p \sum_{i=1}^n x_i \leq M} \sum_{i=1}^n u_i(x_i) = \max_{\substack{p x_i = m_i^* \\ i=1, \dots, n}} \sum_{i=1}^n u_i(x_i) = \sum_{i=1}^n \max_{p x_i = m_i^*} u_i(x_i) = \sum_{i=1}^n u_i^*(p, m_i^*) = \sum_{i=1}^n (a_i(p) + b(p) m_i^*) = \sum_{i=1}^n (a_i(p) + b(p) m_i) = A(p) + b(p) M = U^*(p, M) = U(D(p, M))$.

Se la funzione di benessere sociale non è del tipo benthamiano (cioè, riconducibile alla somma delle utilità individuali), allora la proprietà precedente vale soltanto se la distribuzione della capacità totale di spesa fra gli individui è quella richiesta dalla massimizzazione del benessere sociale: ossia, se $(m_1, \dots, m_n)$ è soluzione del problema

$\max_{\sum_{i=1}^n m_i = M} W(u_1^*(p, m_1), \dots, u_n^*(p, m_n))$, ove $W: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ è la funzione di benessere sociale in considerazione. $\square$

Si tratta, ora, di vedere se vi sono preferenze che soddisfano le condizioni di Antonelli-Nataf-Gorman. Fra i sistemi di preferenza indicati nel Paragrafo 3.4, soddisfano queste condizioni le preferenze quasi-lineari. Con esse, come è facile dimostrare, la funzione indiretta di utilità è del tipo $u_i^*(p, m_i) = m_i + a_i(p)$ in corrispondenza a prezzi per cui $d_i(p, m_i) \in \mathbb{R}_{++}^k$.

Si noti, peraltro, che le condizioni di Antonelli-Nataf-Gorman sono molto restrittive. Non sono in genere soddisfatte neppure se tutti gli agenti hanno le stesse preferenze (e capacità di spesa non tutte uguali). Tuttavia, se tutti gli agenti hanno lo stesso sistema di preferenza e questo è omotetico, allora le condizioni sono soddisfatte. In tal caso, infatti, la definizione stessa di preferenze omotetiche (che richiede che le curve di indifferenza si mantengano, e quindi si mantengano invariati anche i saggi marginali di sostituzione, per variazioni equiporzionali delle quantità dei beni) implica che la domanda muta proporzionalmente alla variazione della capacità di spesa se viene variata la capacità di spesa a parità di prezzi, cioè, che $d_i(p, \alpha m_i) = \alpha d_i(p, m_i)$ per ogni $\alpha > 0$. Questa relazione implica, ponendo $\alpha = 1/m_i$, che $d_i(p, m_i) = m_i d_i(p, 1)$, cioè, $d_i(p, m_i) = m_i \beta_i(p)$. Se tutti gli agenti hanno lo stesso sistema di preferenza, questa relazione diviene $d_i(p, m_i) = m_i \beta(p)$ e risulta, quindi, $\sum_{i=1}^n d_i(p, m_i) = M \beta(p)$, cioè $\sum_{i=1}^n d_i(p, m_i)$ è del tipo $D(p, M)$.

Si è visto, con la Proposizione 4.6, come le condizioni di Antonelli-Nataf-Gorman siano necessarie e sufficienti perché la funzione aggregata di domanda sia del tipo $D(p, M)$ (oppure $D(p, p\Omega)$), e, con la Proposizione 4.7, come, in tal caso, la funzione aggregata di domanda sia razionalizzabile. Può essere utile vedere, con un esempio, come, se non sono soddisfatte le condizioni di Antonelli-Nataf-Gorman, non solo la funzione aggregata di domanda non sia del tipo $D(p, M)$ (oppure $D(p, p\Omega)$), ma come possa accadere che non sia neppure soddisfatto l'assioma debole delle preferenze rivelate (WARP), che è condizione necessaria per la razionalizzabilità del criterio di scelta rappresentato dalla funzione di domanda (Proposizione 2.2). Peraltro, l'assioma debole delle preferenze rivelate non è sufficiente per la razionalizzabilità: occorre che sia soddisfatto il più stringente assioma forte (SARP). L'esempio seguente indica due funzioni di domanda risultanti da un sistema di preferenza regolare e continuo (inoltre tale da rendere tutti i beni normali) che generano una funzione aggregata che non soddisfa il WARP.

Vi siano due beni e due agenti (x_{ih} è la quantità del bene h -esimo a disposizione dell'agente i -esimo). Il primo agente ha preferenze rappresentate dalla funzione di utilità

$$u_1 = \min\{4x_{11}, 22x_{12}\} \quad \text{per } x_{12} \leq 2; \quad u_1 = \min\{4x_{11}, 42 + x_{12}\} \quad \text{per } x_{12} \geq 2$$

e il secondo agente

$$u_2 = \min\{22x_{21}, 4x_{22}\} \quad \text{per } x_{21} \leq 2; \quad u_2 = \min\{42 + x_{21}, 4x_{22}\} \quad \text{per } x_{21} \geq 2$$

La funzione di domanda del primo agente $x_1 = d_1(p, m_1)$ è

$$\begin{aligned} x_{11} &= \frac{11m_1}{11p_1 + 2p_2}, & x_{12} &= \frac{2m_1}{11p_1 + 2p_2} & \text{per } m_1 \leq 11p_1 + 2p_2 \\ x_{11} &= \frac{m_1 + 42p_2}{p_1 + 4p_2}, & x_{12} &= \frac{4m_1 - 42p_1}{p_1 + 4p_2} & \text{per } m_1 \geq 11p_1 + 2p_2 \end{aligned}$$

per cui risulta la funzione indiretta di utilità

$$u_1^* = \frac{44}{11p_1 + 2p_2} m_1 \quad \text{per } m_1 \leq 11p_1 + 2p_2 \quad \text{e} \quad u_1^* = \frac{168p_2}{p_1 + 4p_2} + \frac{4}{p_1 + 4p_2} m_1 \quad \text{per } m_1 \geq 11p_1 + 2p_2$$

La funzione di domanda del secondo agente $x_2 = d_2(p, m_2)$ è

$$x_{21} = \frac{2m_2}{2p_1 + 11p_2}, \quad x_{22} = \frac{11m_2}{2p_1 + 11p_2} \quad \text{per } m_2 \leq 2p_1 + 11p_2$$

$$x_{21} = \frac{4m_2 - 42p_2}{4p_1 + p_2}, \quad x_{22} = \frac{m_2 + 42p_1}{4p_1 + p_2} \quad \text{per } m_2 \geq 2p_1 + 11p_2$$

per cui risulta la funzione indiretta di utilità

$$u_2^* = \frac{44}{2p_1 + 11p_2} m_2 \quad \text{per } m_2 \leq 2p_1 + 11p_2 \quad \text{e} \quad u_2^* = \frac{168p_1}{4p_1 + p_2} + \frac{4}{4p_1 + p_2} m_2 \quad \text{per } m_2 \geq 2p_1 + 11p_2$$

Si può facilmente vedere come le condizioni di Antonelli-Nataf-Gorman non siano soddisfatte da queste funzioni indirette di utilità.

Per $m_1 = m_2 = 24$, $p = (1, 2)$ e $p' = (2, 1)$ risulta

$$\begin{aligned} x_{11}(p) &= 12, & x_{12}(p) &= 6, & x_{21}(p) &= 2, & x_{22}(p) &= 11 \\ x_{11}(p') &= 11, & x_{12}(p') &= 2, & x_{21}(p') &= 6, & x_{22}(p') &= 12 \end{aligned}$$

per cui, considerando la funzione aggregata di domanda $X = D(p, m_1, m_2) = d_1(p, m_1) + d_2(p, m_2)$, si ha

$$X_1(p) = 14, \quad X_2(p) = 17, \quad X_1(p') = 17, \quad X_2(p') = 14$$

La funzione aggregata di domanda non soddisfa l'assioma debole delle preferenze rivelate, che richiede siano incompatibili le relazioni $p D(p', m_1, m_2) < p D(p, m_1, m_2)$ e $p' D(p, m_1, m_2) < p' D(p', m_1, m_2)$, cioè che si rivelino simultaneamente $D(p, m_1, m_2)$ preferito a $D(p', m_1, m_2)$ e $D(p', m_1, m_2)$ preferito a $D(p, m_1, m_2)$. Non risulta, infatti, soddisfatto il WARP poiché si ha

$$\begin{aligned} p_1 X_1(p') + p_2 X_2(p') &= 45 < 48 = p_1 X_1(p) + p_2 X_2(p) \\ p_1' X_1(p) + p_2' X_2(p) &= 45 < 48 = p_1' X_1(p') + p_2' X_2(p') \end{aligned}$$

Per quanto visto precedentemente, l'aggregazione delle funzioni walrasiane di domanda non conserva sempre, se non sono soddisfatte le condizioni di Antonelli-Nataf-Gorman, alcune proprietà rilevanti delle funzioni individuali, fra cui, in particolare, la razionalizzabilità. Si tratta, ora, di vedere quali proprietà delle funzioni individuali di domanda vengano conservate dalla funzione aggregata. Nell'analisi successiva si farà riferimento alle funzioni di eccesso di domanda $e(p)$ introdotte nel Paragrafo 4.5, poiché quanto segue è particolarmente rilevante nell'analisi dell'equilibrio generale che viene svolta correntemente usando le funzioni di eccesso di domanda: peraltro, è del tutto equivalente considerare le funzioni di domanda $d(p, m)$, tenendo conto che $e(p) = d(p, p \omega) - \omega$ e $m = p \omega$.

Siano le scelte individuali di consumo rappresentate da funzioni di eccesso di domanda $e_i: \mathbb{R}_+^k \rightarrow Z_i$, con $i = 1, \dots, n$, continue, omogenee di grado zero (cioè, $e_i(\alpha p) = e_i(p)$ per ogni $\alpha > 0$ e $p \in \mathbb{R}_+^k$) e, inoltre, tali che $p e_i(p) = 0$ per ogni $p \in \mathbb{R}_+^k$ (come accade se le preferenze individuali sono monotone o soddisfano la proprietà di non sazietà locale). Allora, la funzione aggregata di eccesso di domanda $E: \mathbb{R}_+^k \rightarrow Z$, ove $E(p) = \sum_{i=1}^n e_i(p)$ e $Z = \sum_{i=1}^n Z_i$ è un insieme non vuoto, convesso, chiuso e limitato (così come gli insiemi $Z_i \in \mathbb{R}^k$ per $i = 1, \dots, n$), è anch'essa continua, omogenea di grado zero e tale che $p E(p) = 0$ per ogni $p \in \mathbb{R}_+^k$. Le funzioni individuali di eccesso di domanda godono di ulteriori proprietà se derivano da sistemi di preferenze: ad esempio, soddisfano l'assioma forte delle preferenze rivelate (SARP) e, se differenziabili, la relazione di Slutsky, ove la matrice di sostituzione (o di Slutsky) è simmetrica, semidefinita

negativa e tale che $p^T S_i(p) = 0$. Tutte queste ulteriori proprietà non sono generalmente possedute dalla funzione aggregata di domanda, come implica la proposizione seguente, che esprime il teorema di Sonnenschein (1973)-Mantel (1974)-Debreu (1974), la cui dimostrazione viene omessa.

Proposizione 4.9 (Teorema di Sonnenschein-Mantel-Debreu). Se $E: \mathbb{R}_{++}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$ è una funzione continua e omogenea di grado zero, con $p^T E(p) = 0$ (quindi, non necessariamente razionalizzabile), allora esistono k (e, a maggior ragione, $n > k$) funzioni razionalizzabili di domanda $e_i(p)$ tali che $E(p) = \sum_{i=1}^k e_i(p)$ per ogni $p \in \mathbb{R}_{++}^k$.

4.7 L'evoluzione dell'analisi neoclassica della scelta di consumo

L'analisi delle scelte di scambio dell'agente di consumo *price-taker* è di grande importanza nella teoria economica corrente (o neoclassica). Non certo perché l'analisi economica si esaurisca in essa: la teoria economica neoclassica richiede l'analisi, oltre che delle scelte intenzionali, anche della loro compatibilità, cioè dell'equilibrio, e l'analisi dell'efficienza di questo. Inoltre, quanto incluso in questo capitolo e in quello precedente tratta soltanto il caso di un agente di consumo che non ha potere di mercato (è, cioè, *price-taker*) e che opera in un contesto privo di ogni tipo di incertezza. Perciò, situazioni molto importanti per l'economia, caratterizzate da scelte di tipo strategico (di cui si compone, ad esempio, per certi aspetti, la stessa vita familiare) o in cui l'incertezza è rilevante (ad esempio, l'allocazione della ricchezza fra diversi possibili impieghi), non sono comprese nell'analisi precedente.

L'importanza della teoria precedente delle scelte di consumo risiede principalmente nel fatto che essa fornisce il modello e gran parte degli strumenti per analoghe analisi di scelta (di produzione, intertemporale, sotto incertezza, sociale, con potere di mercato, strategica, ecc.). Fornisce modello e strumenti perché queste altre analisi presentano, come si vedrà, la stessa struttura logica della teoria della scelta di consumo, risultandone, in un certo senso, estensioni.

La teoria moderna della scelta di consumo presenta, inoltre, la proprietà notevole di interpretare le scelte, rappresentate dalla funzione walrasiana di domanda, in base al sistema di preferenza, che è un "dato" minimo. Infatti, la funzione ordinale di utilità, che rappresenta il sistema di preferenza se questo è regolare e continuo, può essere determinata (come indicato nel Paragrafo 4.3) a partire dalla funzione di domanda, che rappresenta nel caso in esame il criterio di scelta. Se la spiegazione della scelta di consumo impiegasse un "dato" più ricco del sistema di preferenza (quale è, ad esempio, la funzione cardinale di utilità), non sarebbe possibile determinare questo "dato" più ricco a partire dalla scelta: in altri termini, vi

sarebbe in esso qualcosa di inessenziale, di inutile per la comprensione del fenomeno della scelta.

Peraltro, la teoria della scelta concorrenziale di consumo è stata per lungo tempo al centro delle riflessioni degli studiosi e su di essa si sono riflesse, con diverse proposte e sfumature, quasi tutte le variegata versioni del marginalismo e dell'approccio neoclassico. La teoria presentata in questo capitolo e nel capitolo precedente è la versione oggi corrente, sostanzialmente di tipo assiomatico, consolidatasi fra il 1940 e il 1970, sebbene molti risultati particolari siano antecedenti.

Possono essere distinte tre fasi storiche principali nell'evoluzione della teoria neoclassica della domanda. La prima fase è quella che fonda la scelta individuale di consumo sull'utilità cardinale (qui presentata nel Paragrafo 3.6). Vi partecipano sia economisti marginalisti (per i quali, cioè, i prezzi dei beni dipendono essenzialmente dalla loro utilità marginale, grandezza questa del tutto soggettiva, nel senso che esprime valutazioni proprie di ciascun individuo), come Gossen (1854), Jevons (1871), Menger (1871), almeno in parte Walras (1874), Edgeworth (1881), Pantaleoni (1889) e Fisher (1892), sia economisti neoclassici (per i quali, cioè, i prezzi dei beni di consumo dipendono anche dalla loro produzione, quindi da elementi oggettivi), come Marshall (1890), Walras (che è al riguardo alquanto ambiguo, nel senso che usa un linguaggio marginalista anche quando presenta una teoria neoclassica), e Pareto (prima del 1900, ad esempio in 1896-1897). In questa fase, viene introdotta per ogni individuo, su una base di tipo psicologico (espresso dallo schema logico stimolo-sensazione-emozione-bisogno-utilità) una funzione che associa ad ogni paniere di beni una quantità (l'utilità) che l'individuo massimizza con la scelta. Risulta, nello scambio concorrenziale, per ogni bene e ogni individuo, la proporzionalità tra prezzo e utilità marginale.

La seconda fase riferisce la scelta individuale di consumo alla nozione di utilità ordinale, desunta da preferenze individuali sui diversi panieri di beni ottenibili (senza necessità di indagini ulteriori sull'origine e la determinazione delle preferenze). Le preferenze vengono descritte mediante curve di indifferenza le cui proprietà (decrecenza e convessità) vengono introdotte come "dati" naturali (osservativi, almeno concettualmente). Vi partecipano Pareto (dopo il 1900, anno in cui introdusse questo approccio, ad esempio in 1906),¹⁹ Slutsky (1915) e, soprattutto, Hicks e Allen (1934),

¹⁹ Pareto (1906) non solo ha introdotto l'approccio ordinalista, ma ha anche esaminato la determinazione delle preferenze a partire dalle scelte, rappresentate in generale dal campo vettoriale dei saggi marginali di sostituzione. A questo riguardo, ha esaminato non solo il caso in cui questo campo è conservativo, sono cioè soddisfatte le condizioni di integrabilità ed esiste, quindi, una funzione ordinale di utilità le cui derivate determinano, con i loro rapporti, i saggi marginali di sostituzione che rappresentano le scelte, ma anche il caso in cui il campo non è conservativo. Pareto assume, in questo caso, soltanto la razionalità locale (nel senso che il prodotto tra il saggio marginale di sostituzione tra il bene h e il bene h' e il saggio marginale di sostituzione tra il bene h' e il bene h'' è uguale al saggio marginale di sostituzione tra il bene h e il bene h'' , per ogni terna h, h', h''), ma non quella globale, rappresentata dalla condizione di transitività tra panieri

che resero paradigmatico l'ordinalismo. Fra i contributi italiani successivi a Pareto, sull'analisi della domanda, possono essere ricordati Amoroso (1928), che ha indicato per primo le condizioni matematiche rigorose della massimizzazione utilitaria, e Dominedò (1933 e 1934). Partecipano a questa fase anche le analisi miranti a dedurre le preferenze dalla domanda. Queste analisi sono state proposte secondo due approcci. Con il primo approccio, la funzione ordinale di utilità viene determinata mediante l'integrazione della funzione di domanda. Anche se questo approccio e le condizioni di integrabilità che lo contraddistinguono erano state introdotte ancora nella fase cardinalista da Antonelli (1886), Fisher (1892) e Pareto (1893, da quest'ultimo in modo impreciso), e, poi, in relazione all'analisi ordinalista paretiana, da Volterra (1906), la prima formulazione completa è dovuta a Samuelson (1950), con perfezionamenti ed estensioni di altri economisti, tra cui Uzawa e Hurwicz (1971)²⁰. Con il secondo approccio, le preferenze vengono determinate dalle scelte di consumo mediante le cosiddette preferenze rivelate e le connesse condizioni di consistenza (o razionalità), cioè l'assioma debole delle preferenze rivelate, dovuto a Samuelson, l'assioma forte, dovuto a Ville e Houtakker, e quello generalizzato, dovuto a Richter. Può essere collegato a questa fase anche l'insieme delle indagini econometriche volte a determinare, in base ai dati statistici, specifiche funzioni di domanda: numerosissime dopo i contributi pionieristici di Benini (1907), Moore (1914), Schultz (1925 e 1938), Bresciani Turrone (1931) e Wold (1953).

La terza fase è quella assiomatica (sostanzialmente qui seguita nei Capitoli 3 e 4), introdotta, nell'analisi della domanda, da Wold e sviluppata, in modo particolare, da Debreu. Ora, preferenze e scelte di consumo sono introdotte e analizzate come oggetti matematici, sebbene soggetti ad interpretazione economica. E' preminente l'aspetto logico-sistematico, che si configura nell'esplicitazione di tutte le ipotesi e nell'individuazione delle relazioni significative fra di esse. In tal modo, vengono individuati i nessi che intercorrono tra le ipotesi sul sistema di preferenza e la scelta in condizioni concorrenziali e, anche, tra questa ed il sistema di preferenza.

Come si può facilmente osservare, queste tre fasi corrispondono più ad una evoluzione della teoria che ad una contrapposizione tra teorie. Anche se non sono mancate contrapposizioni (ad esempio, Pantaleoni, 1924, seguito da Ricci, 1932, ed altri economisti, obiettò che l'introduzione dell'approccio ordinalista paretiano comportava la perdita delle informazioni desumibili dalla teoria psicologica del cardinalismo), tuttavia nessun risultato rilevante della fase precedente risulta rigettato dalla fase

qualsiasi di beni. Per questo secondo caso, Pareto mette in evidenza come l'integrazione tra due punti del campo vettoriale dipenda dal sentiero, mentre è indipendente dal sentiero nel primo caso (teoria dei cicli aperti e chiusi). L'assenza della razionalità globale non impedisce scelte e funzioni di domanda, impedisce, però, la loro razionalizzazione con un sistema regolare di preferenza, e, quindi, con una funzione di utilità.

²⁰ Una presentazione complessiva del problema della integrabilità delle funzioni di domanda è offerta da Hurwicz (1971).

seguente. Vengono introdotti una loro generalizzazione e la precisazione dell'ambito logico di validità. L'impressione che si sia passati, in questo percorso, da una descrizione ricca di contenuti realistici ad una sempre più astratta e asettica, è giustificata, almeno nel senso che a beni e piaceri sono subentrati punti in uno spazio euclideo e insiemi ordinati. Tuttavia, questo è il percorso tipico della concettualizzazione scientifica. L'analisi persegue il rigore logico: è la ricostruzione logica della realtà. D'altronde, l'interpretazione economica degli enti e delle relazioni logiche proposte dall'analisi della scelta di consumo implica che quei punti dello spazio euclideo e quegli insiemi ordinati siano panieri specifici di beni e specifiche preferenze (ossia, se si vuole, relazioni di piacevolezza relativa).