**Aldo Montesano  PRINCIPI DI ANALISI ECONOMICA**

# CAP. 11   L’ANALISI DELL'EQUILIBRIO GENERALE I

L’analisi dell’equilibrio parziale, esaminata nel capitolo precedente, è sia un’utile introduzione all’analisi dell’equilibrio generale, sia uno strumento importante per lo studio dei mercati dei beni per i quali l’interdipendenza è trascurabile. Quando però l’interdipendenza è rilevante, ossia, quando le grandezze di equilibrio (prezzo e quantità) del bene in esame influiscono sull’equilibrio di altri beni e le grandezze di equilibrio di questi influiscono sull’equilibrio del bene in esame, allora l’analisi di equilibrio parziale si rivela del tutto insufficiente. Ad esempio, si immagini di analizzare il mercato del lavoro. Il salario e l’occupazione influiscono significativamente sulla domanda e l’offerta dei beni di consumo e i prezzi e le quantità prodotte di questi beni, a loro volta, hanno grande influenza sulla domanda e l’offerta di lavoro. L’ipotesi che queste influenze non siano rilevanti rende l’analisi di equilibrio parziale del mercato del lavoro una rappresentazione poverissima per l’interpretazione della realtà economica. E’, allora, necessaria un’analisi che prenda esplicitamente in considerazione le interdipendenze. Svolge questo compito l’equilibrio generale.

L’analisi dell’equilibrio generale esamina la compatibilità delle scelte individuali nei riguardi di tutti i beni simultaneamente. In questo modo, vengono determinati tutti gli scambi e le produzioni, viene, cioè, determinata l’allocazione di tutti i beni presso tutti gli agenti dell’economia. Naturalmente, l’analisi dell’equilibrio generale è più complessa di quella dell’equilibrio parziale. Non solo è richiesto un esteso impiego della matematica per ottenere i principali risultati (che riguardano, in riferimento a diverse condizioni, l’esistenza dell’equilibrio, la sua unicità, stabilità ed efficienza e la statica comparata), ma sono anche meno specifiche le applicazioni della teoria (se non altro, per la numerosità di variabili e condizioni implicate dalla simultanea considerazione di tutti i beni e tutti gli agenti). Anche se vi sono analisi concernenti equilibri generali non concorrenziali, la gran parte della letteratura sull’equilibrio generale esamina soltanto il caso dell’equilibrio concorrenziale, anche perché l’allocazione concorrenziale costituisce un termine di paragone importantissimo per tutte le altre possibili allocazioni.

Nel seguito di questo capitolo e nel capitolo seguente, dopo aver definito, sotto diverse ipotesi, l’equilibrio generale concorrenziale (o *equilibrio walrasiano*, che prende nome da Walras, che lo ha esaminato per primo, a partire dalla prima edizione, 1874-1877, dei suoi *Elementi di* *economia politica pura*), vengono introdotti diversi temi analitici, tra cui quelli dell'esistenza, unicità e stabilità dell'equilibrio e quello del *core*.

### 11.1 L'equilibrio generale concorrenziale

L'equilibrio concorrenziale è stato introdotto con la Definizione 10.1. Le scelte di agenti *price-taker* sono state esaminate nei Capitoli 3, 4 e 5. Si tratta, allora, di qualificare queste scelte nell'ambito dello schema dell'equilibrio generale e di imporre la loro compatibilità. I consumatori, come rappresentato nel Paragrafo 4.5, hanno ciascuno una dotazione di beni e possono eseguire compravendite di beni. La funzione walrasiana aggregata di domanda dei consumatori, come indicato nel Paragrafo 4.6, è del tipo $D(p, p\omega_1,\dots, p\omega_n)$ e quella di eccesso di domanda è $D(p, p\omega_1,\dots, p\omega_n) - \Omega$, con $\Omega = \sum_{i=1}^{n} \omega_i$, ove $\omega_i \in \mathbb{R}^k_+$ è il vettore che rappresenta la dotazione del consumatore $i$-esimo ( $k$ è il numero dei beni). Se non occorre porre in evidenza la dipendenza della domanda dalle dotazioni, allora la funzione aggregata di domanda viene indicata con $D(p)$ .

In una economia di puro scambio (cioè, senza produzione) la condizione di eseguibilità degli scambi scelti dai consumatori richiede che la quantità complessiva di beni che i consumatori desiderano avere, pari a $D(p)$ , sia uguale alla quantità complessiva di beni che vi è nell'economia, pari a $\Omega$ . Allora, la condizione di equilibrio richiede che i prezzi siano tali da soddisfare la condizione $D(p^*) = \Omega$ . Introducendo la *funzione aggregata di eccesso di domanda* $E(p) = D(p) - \Omega$ , la condizione di equilibrio indicata diviene $E(p^*) = 0$. (Se $D(p)$ è una corrispondenza, la condizione di equilibrio è $\Omega \in D(p^*)$ , ovvero $0 \in E(p^*)$ ).

In una economia di produzione (in cui, cioè, vi sono consumatori e produttori), entra in gioco anche la funzione aggregata di offerta dei produttori, introdotta nel Paragrafo 5.7, $S(p)$ e, inoltre, la funzione di domanda dei consumatori tiene conto (come verrà indicato nel Paragrafo 11.6) della capacità di spesa generata dai profitti della produzione. Allora, la condizione di equilibrio richiede che i prezzi soddisfino la condizione $D(p^*) = S(p^*) + \Omega$ . Introducendo la funzione aggregata di eccesso di domanda $E(p) = D(p) - S(p) - \Omega$ , la condizione di equilibrio indicata diviene $E(p^*) = 0$ .

I prezzi di equilibrio $p^* = (p_1^*,\dots, p_k^*)$ determinano l'allocazione dei beni presso tutti i consumatori e i produttori tramite le relazioni $x_i^* = d_i(p^*)$ e $y_j^* = s_j(p^*)$ , per $i = 1,..., n$ e $j = 1,\dots, m$ , ove $n$ è il numero dei consumatori e $m$ quello dei produttori. Un equilibrio generale concorrenziale $(x^*, y^*, p^*)$ è, allora, rappresentato da un vettore di prezzi $p^*$ e da una allocazione $(x^*, y^*) = (x_1^*,\dots, x_n^*, y_1^*,\dots, y_m^*)$ che soddisfi la condizione di equilibrio concorrenziale, cioè, tali che i panieri di beni che compongono l'allocazione corrispondano a scelte degli agenti (tutti *price-taker*) ai prezzi $p^*$ e, inoltre, soddisfino la condizione di realizzabilità.

Dopo questa introduzione alquanto informale conviene presentare formalmente l'equilibrio generale concorrenziale, distinguendo il caso in cui vale l'ipotesi di *free disposal*, accolta nella presentazione corrente, dal caso in cui essa non viene introdotta. L'ipotesi di *free disposal* (introdotta dalla Definizione 8.3) assume che ogni agente possa liberarsi di qualsiasi quantità di uno o più beni senza dovere sopportare alcun costo.

## 11.2 L'economia di proprietà privata

In questo paragrafo viene presentata l'*economia di proprietà privata*, che è l'unico tipo di economia esaminato in questo capitolo (ad un altro tipo di economia, quella con pianificazione centralizzata, verrà dedicato un cenno nel Capitolo 12). Nel paragrafo successivo viene esaminata, per l'economia di proprietà privata, l'*equilibrio concorrenziale di puro scambio*. Quello *di produzione* verrà presentato nel Paragrafo 11.8.

**Definizione 11.1** (*Economia di proprietà privata*) Un'economia è composta da consumatori, rappresentati dai loro insiemi di consumo e dai loro sistemi di preferenza, da produttori (o imprese), rappresentati dai loro insiemi di produzione, e da risorse (o beni disponibili). L'economia è di proprietà privata se i consumatori hanno la proprietà delle risorse e delle imprese.

Quindi, un'economia di proprietà privata di puro scambio è rappresentata da $\mathcal{E} = (\langle X_i, \succsim_i\rangle, \omega_i, i = 1,\ldots, n)$, ove $\langle X_i, \succsim_i\rangle$ è il sistema di preferenza del consumatore $i$-esimo sul suo insieme di consumo $X_i \subset \mathbb{R}^k$ (ove $k$ indica il numero dei beni), $\omega_i \in \mathbb{R}^k_+$ sono le risorse di proprietà dello stesso consumatore e $n$ è il numero dei consumatori.

Analogamente, un'economia di proprietà privata di produzione è rappresentata da $\mathcal{E} = (\langle X_i, \succsim_i\rangle, Y_j, \omega_i, \theta_{ij}, i = 1,\ldots, n, j = 1,\ldots, m)$, ove, oltre ai simboli già specificati, $Y_i \subset \mathbb{R}^k$ è l'insieme di produzione dell'impresa $j$-esima, $\theta_{ij}$ è la quota di proprietà del consumatore $i$-esimo nell'impresa $j$-esima e $m$ è il numero delle imprese, perciò con $\theta_{ij} \geq 0$ per ogni $i = 1,\ldots, n$ e $j = 1,\ldots, m$ e $\sum_{i=1}^{n} \theta_{ij} = 1$ per ogni $j = 1,\ldots, m$.

Si noti che l'economia di puro scambio è un caso particolare di economia di produzione. Un'economia di produzione diviene di puro scambio se $Y_i = \{0\}$ per ogni $j = 1,\ldots, m$.

## 11.3 L'equilibrio concorrenziale di puro scambio

L'equilibrio concorrenziale di puro scambio è definito dalla realizzabilità delle scelte dei consumatori dell'economia $\mathcal{E} = (\langle X_i, \succsim_i\rangle, \omega_i, i = 1,\ldots, n)$ . Occorre, allora, introdurre le scelte dei consumatori e imporre ad esse la condizione di realizzabilità. Ogni consumatore è vincolato a scegliere un paniere di beni nell'insieme di bilancio definito dai prezzi, dalla sua dotazione e dalla eventuale possibilità di *free disposal*.

**Definizione 11.2** (*Insieme di bilancio di un consumatore*) L'insieme di bilancio (che indica i panieri di beni ottenibili con lo scambio) del consumatore *i*-esimo, in relazione ad un vettore di prezzi $p\in\mathbb{R}^k$ (che include la possibilità che vi siano prezzi negativi)[1], è, senza *free disposal*,

$$\overline{B}_i(p) = \{x_i \in X_i : px_i = p\omega_i\}$$

e, in presenza di *free disposal*,

$$B_i(p) = \{x_i \in X_i : x_i \le x_i' \text{ per qualche } x_i' \in \mathbb{R}^k \text{ tale che } px_i' = p\omega_i\}$$

**Proposizione 11.1** Se i prezzi sono non negativi, cioè $p \ge 0$, allora l'insieme di bilancio di un consumatore in presenza di *free disposal* (introdotto dalla Definizione 11.2) è rappresentabile come

$$B_i(p) = \{x_i \in X_i : px_i \le p\omega_i\}$$

**Dimostrazione.** Si consideri l'insieme di bilancio

$$B_i(p) = \{x_i \in X_i : x_i \le x_i' \text{ per qualche } x_i' \in \mathbb{R}^k \text{ tale che } px_i' = p\omega_i\}$$

introdotto dalla Definizione 11.4. Con riferimento a questo insieme, da un lato, se $p \ge 0$ e $x_i \in B_i(p)$ , allora $px_i \le px_i' = p\omega_i$. Dall'altro lato, se $p \ge 0$, $x_i \in X_i$ e $px_i \le p\omega_i$, poiché esiste un $x_i' \ge x_i$ tale che $px_i' = p\omega_i$, risulta $x_i \in B_i(p)$. Perciò, se $p \ge 0$ , le due specificazioni di $B_i(p)$ (introdotte dalla Definizione 11.2 e dalla Proposizione 11.1) coincidono. □

**Definizione 11.3** (*Scelta di un consumatore*) La scelta di un consumatore, rappresentato dal sistema di preferenza regolare $\langle X_i, \succsim_i\rangle$, ove

[1] Chi compra il bene con prezzo negativo incassa, invece che pagare, e chi lo vende paga, invece che incassare. La Proposizione 11.2 esclude, mediante l'ipotesi di *free disposal* che vi siano beni con prezzo negativo. Il problema di un eventuale prezzo negativo nasce per quei beni, talvolta denominati "mali", di cui gli agenti preferiscono quantità inferiori a quella in esame. Un esempio di "male" è la spazzatura. Anziché introdurre il bene in questione, si potrebbe introdurre, al suo posto, il servizio per la rimozione, il cui prezzo è positivo (e pari, in valore assoluto, a quello del "male"). Ciò è quello che accade nella realtà. Non è possibile, tuttavia, riconoscere, prima di aver determinato l'equilibrio, se qualcosa è un "bene" o un "male". Inoltre, se un'economia ammette più di un equilibrio, può accadere che uno stesso bene sia in uno di questi un "bene" e in un altro un "male". Ne consegue che la possibilità di prezzi negativi non può essere evitata senza introdurre particolari condizioni.

$X_i \subset \mathbb{R}^k$ , e dalla dotazione $\omega_i \in \mathbb{R}^k_+$ , è, in assenza di *free disposal*, un qualsiasi punto dell'insieme

$$\bar{d}_i(p) = \{x_i \in \bar{B}_i(p) : x_i \succsim_i x_i' \text{ per ogni } x_i' \in \bar{B}_i(p)\}$$

e, in presenza di *free disposal*, un qualsiasi punto dell'insieme

$$d_i(p) = \{x_i \in B_i(p) : x_i \succsim_i x_i' \text{ per ogni } x_i' \in B_i(p)\}$$

**Definizione 11.4** (*Equilibrio concorrenziale*) L'equilibrio concorrenziale richiede che le scelte dei consumatori siano realizzabili. Perciò, in assenza di *free disposal*, un equilibrio è rappresentato da un vettore di prezzi $p^* \in \mathbb{R}^k$ e da un'allocazione $x^* = (x_1^*, \ldots, x_n^*)$ tali che $x_i^* \in \bar{d}_i(p^*)$ per ogni $i = 1, \ldots, n$ e $\sum_{i=1}^n x_i^* = \sum_{i=1}^n \omega_i$ . In presenza di *free disposal*, tali che $x_i^* \in d_i(p^*)$ per ogni $i = 1, \ldots, n$ e $\sum_{i=1}^n x_i^* \leq \sum_{i=1}^n \omega_i$ .

**Proposizione 11.2** Se un'economia di puro scambio soddisfa l'ipotesi di *free disposal* e i consumatori sono, complessivamente, sufficientemente avidi, allora il vettore dei prezzi di equilibrio è semipositivo o seminegativo, deve, cioè, essere $p^* > 0$ oppure $p^* < 0$. La condizione "sufficientemente avidi" richiede che i consumi di sazietà globale $\tilde{x}_i \in X_i$ (ossia, con $x_i \precsim_i \tilde{x}_i$ per ogni $x_i \in X_i$ ) soddisfino la condizione $\sum_{i=1}^n \tilde{x}_i \not\leq \sum_{i=1}^n \omega_i$ , oppure che vi sia almeno un consumatore (assumendo che gli insiemi di consumo siano chiusi e limitati inferiormente) le cui preferenze soddisfino la condizione di non sazietà globale (introdotta nel Paragrafo 3.2).

**Dimostrazione.** Se il vettore dei prezzi $p$ non è né semipositivo né seminegativo, allora, o tutti i prezzi sono nulli o vi è almeno un prezzo negativo ed uno positivo. In entrambi i casi l'insieme di bilancio di ogni consumatore coincide con l'insieme di consumo. Ossia, se $p \not> 0$ o $p \not< 0$ , allora $B_i(p) = \{x_i \in X_i : x_i \leq x_i' \text{ per qualche } x_i' \in \mathbb{R}^k \text{ tale che } px_i' = p\omega_i\} = X_i$ . Infatti, se tutti i prezzi sono nulli, allora l'insieme di bilancio coincide banalmente con l'insieme di consumo. Se vi è almeno un prezzo negativo ed uno positivo, allora, per ogni $x_i \in X_i$ , il consumatore può comprare un paniere di beni $x_i'$ tale che $p\, x_i' = p\, \omega_i$ e $x_i' \geq x_i$ . Basta che compri una quantità dei beni con prezzo negativo così elevata da consentirgli di comprare la quantità $x_{ih}$ dei beni con prezzo positivo. Può così pervenire, usando il *free disposal*, ad ogni $x_i \in X_i$ . Quindi, se per i consumi di sazietà globale vale relazione $\sum_{i=1}^n \tilde{x}_i \not\leq \sum_{i=1}^n \omega_i$ , allora la condizione di realizzabilità (Definizione 8.4) non è soddisfatta e il vettore $p$ non è un vettore di prezzi di equilibrio. Analogamente, se qualche consumatore ha preferenze che soddisfano la condizione di non sazietà globale. Infatti, essendo per ipotesi il suo insieme di consumo chiuso e limitato inferiormente, la condizione di non sazietà globale implica che l'insieme di consumo non è limitato e che egli desidera una quantità infinitamente grande di almeno un bene, rendendo così impossibile la realizzabilità dell'allocazione. □

La Proposizione 11.2 consente, nell'analisi dell'equilibrio con *free disposal* di considerare soltanto vettori semipositivi per i prezzi. Infatti, da un lato, la clausola "se i consumatori sono sufficientemente avidi" deve essere considerata sempre soddisfatta: se non valesse, anche assumendo che non vi siano consumatori che non soddisfano la condizione di non sazietà globale, l'economia sarebbe paradisiaca, dal momento che tutti i consumatori potrebbero ottenere il loro consumo di sazietà, e non vi sarebbe ragione di analisi economica. Dall'altro lato, poiché i consumatori sono interessati unicamente dai rapporti di scambio (intervenendo i prezzi nell'insieme di bilancio solo tramite la condizione $px_i' = p\omega_i$), un vettore seminegativo di prezzi è del tutto equivalente al suo opposto, per cui ci si può limitare a prendere in considerazione solo i vettori semipositivi.

## 11.4 L'esistenza dell'equilibrio concorrenziale di puro scambio in presenza di *free disposal*

L'esistenza dell'equilibrio significa che le condizioni che lo definiscono non sono contraddittorie, ossia che esiste un vettore di prezzi che rende realizzabili le scelte dei consumatori. La dimostrazione dell'esistenza dell'equilibrio richiede delle ipotesi, per cui occorre qualificare l'economia $\mathcal{E} = (\langle X_i, \succsim_i \rangle, \omega_i, i = 1,\ldots, n)$ in esame, ossia, gli insiemi di consumo $X_i$, i sistemi di preferenza $\langle X_i, \succsim_i \rangle$ e le dotazioni $\omega_i$. Molte di queste ipotesi sono state definite nel Capitolo 3 e vengono qui richiamate.

Le dimostrazioni dell'esistenza dell'equilibrio utilizzano teoremi del punto fisso. Le ipotesi introdotte sull'economia $\mathcal{E}$ riflettono le ipotesi richieste da questi teoremi. I due teoremi del punto fisso rilevanti per l'equilibrio con *free disposal* sono i teoremi di Brouwer e di Kakutani.

**Teorema di Brouwer:** Se $S \subset \mathbb{R}^k$ è un insieme non vuoto, compatto (cioè, chiuso e limitato) e convesso e $f : S \to S$ è una funzione continua, allora vi è un punto fisso, esiste cioè un $x^* \in S$ tale che $x^* = f(x^*)$.[2]

[2] La dimostrazione generale del teorema di Brouwer non viene riportata. La dimostrazione è, tuttavia, semplice nel caso unidimensionale, cioè per $k = 1$, in cui l'insieme $S$ è un intervallo.

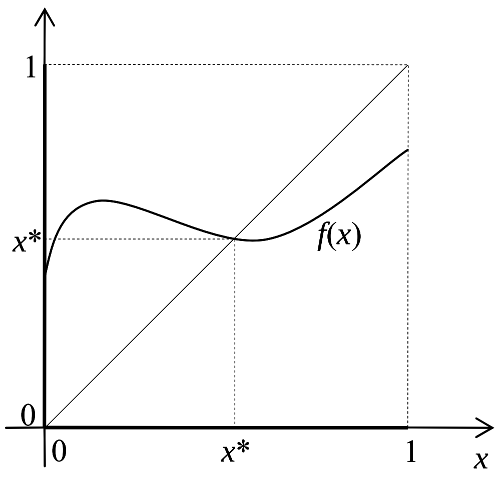


Figura 11.1

**Teorema di Kakutani:** Se $S \subset \mathbb{R}^k$ è un insieme non vuoto, compatto e convesso e $\phi$: $S \to S$ è una corrispondenza emicontinua superiormente con insiemi $\phi(x)$ convessi per tutti gli $x \in S$, allora vi è un punto fisso, esiste cioè un $x^* \in S$ tale che $x^* \in \phi(x^*)$.

La condizione di continuità richiesta dal teorema di Brouwer finisce per richiedere la continuità della funzione aggregata di domanda dei consumatori, cioè della funzione $D(p) = \sum_{i=1}^n d_i(p)$, e, quindi, della funzione aggregata di eccesso di domanda, cioè della funzione $E(p) = \sum_{i=1}^n e_i(p)$ (le funzioni di eccesso di domanda sono state introdotte nel Paragrafo 4.5), ove $e_i(p) = d_i(p) - \omega_i$ e, quindi, $E(p) = D(p) - \Omega$.

Questa condizione può essere introdotta direttamente, senza giustificarla sulla base dell'analisi della scelta compiuta nella Parte prima. Oppure possono essere messe in evidenza le condizioni sufficienti, ivi esaminate, che la garantiscono. In tal caso, si ha che la funzione aggregata di domanda è continua se lo è quella di ogni consumatore e la continuità di questa è assicurata, ponendo $m_i = p\omega_i$, dalla Proposizione 3.7, secondo cui la funzione di domanda $d_i(p)$ (e, quindi, quella di eccesso di domanda $e_i(p)$) è continua se l'insieme di bilancio $B_i(p) = \{x_i \in X_i : px_i \le p\omega_i\}$ = $\{z_i \in Z_i : pz_i \le 0\}$ (con $Z_i = X_i - \{\omega_i\}$) è non vuoto, compatto e convesso, la corrispondenza $B_i : \mathbb{R}^k_+ \to X_i$ è continua (ed è, quindi, continua anche la corrispondenza $B_i : \mathbb{R}^k_+ \to Z_i$), l'insieme di consumo $X_i$ è convesso e il sistema di preferenza $\langle X_i, \succsim_i \rangle$ è regolare, continuo e strettamente convesso.

Essendo $X_i$ non vuoto e $\omega_i \in X_i$ (ossia, $Z_i$ non vuoto e $0 \in Z_i$), si ha che l'insieme $B_i(p)$ è non vuoto per ogni $p$. La compattezza dell'insieme $B_i(p)$ è assicurata se $X_i$ (e, quindi, $Z_i$) è compatto, oppure se è chiuso e inferiormente limitato (cioè, se esiste un $\overline{x}_i \in \mathbb{R}^k$ tale che $x_i \ge \overline{x}_i$ per ogni $x_i \in X_i$, come accade, ad esempio, se $X_i = \mathbb{R}^k_+$) ed è $p >> 0$. La corrispondenza $B_i : \mathbb{R}^k_+ \to X_i$ (e, quindi, $B_i : \mathbb{R}^k_+ \to Z_i$) è continua (per la Proposizione 3.1) se $X_i$ è compatto, convesso ed è $p\omega_i > \min_{x_i \in X_i} px_i$ (ossia, $0 > \min_{z_i \in Z_i} pz_i$) per ogni $p > 0$.

La condizione di continuità della corrispondenza $B_i : \mathbb{R}^k_+ \to X_i$ può creare qualche problema. Si consideri, ad esempio, il caso, rappresentato nella Figura 11.2, in cui $X_i = \{x_i \in \mathbb{R}^2 : x_{i1} \in [0, a_{i1}], x_{i2} \in [0, a_{i2}]\}$ e $\omega_i = (\frac{1}{2}a_{i1}, 0)$. Se si fa tendere, modificando il prezzo del primo bene, il vettore $p = (p_1, p_2) >> 0$ al vettore $p' = (0, p_2)$, si trova che l'insieme di

---

Come rappresentato nella Figura 11.1, ove $S = [0,1]$, una funzione continua che abbia l'intervallo $[0,1]$ come dominio e codominio, deve avere (almeno) un punto sulla bisettrice.

bilancio $B_i(p_1, p_2) = \{x_i \in X_i : p_1 x_{i1} + p_2 x_{i2} \leq \frac{1}{2} p_1 a_{i1}\}$ diviene un triangolo sempre più piccolo, incluso nei precedenti, man mano che $p_1$ si riduce, tendendo verso il triangolo degenere $\lim_{p_1 \to 0} B_i(p_1, p_2) = \{x_{i1} \in [0, \frac{1}{2} a_{i1}], x_{i2} = 0\}$ rappresentato dal segmento $x_{i1} \in [0, \frac{1}{2} a_{i1}]$ sull'asse delle ascisse. Invece, in corrispondenza al vettore $p' = (0, p_2)$, l'insieme di bilancio è $B_i(0, p_2) = \{x_{i1} \in [0, a_{i1}], x_{i2} = 0\}$, rappresentato dal segmento $x_{i1} \in [0, a_{i1}]$ sull'asse delle ascisse. La disuguaglianza $\lim_{p_1 \to 0} B_i(p_1, p_2) \neq B_i(0, p_2)$ denota una discontinuità per la corrispondenza $B_i : \mathbb{R}^k_+ \to X_i$ in $p' = (0, p_2)$. Una ipotesi che evita questo inconveniente è quella suindicata, che pone $\omega_i$ punto interno di $X_i$ (ossia, $0$ punto interno di $Z_i$), in modo che si abbia $p\,\omega_i > \min_{x_i \in X_i} p x_i$ (ossia, $0 > \min_{z_i \in Z_i} p z_i$) per ogni $p > 0$.

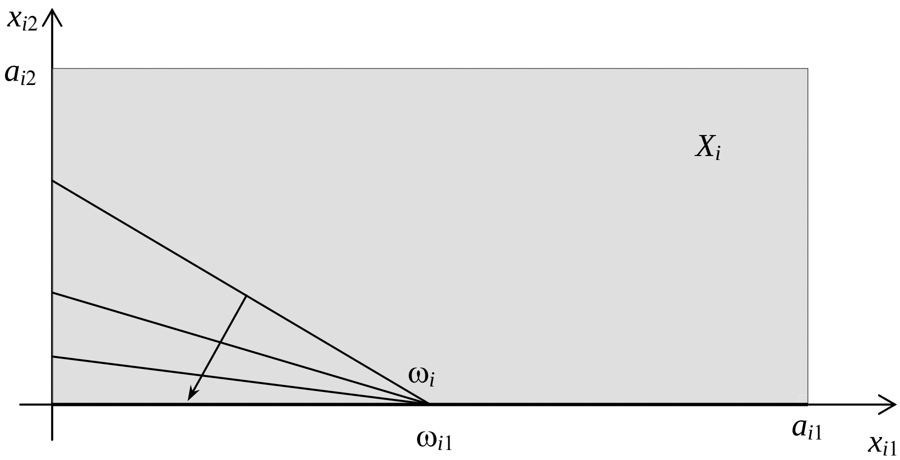


Figura 11.2

Inoltre, se il sistema di preferenza $\langle X_i, \succsim_i \rangle$ è monotono, allora la funzione di domanda $d_i(p)$ soddisfa la condizione $p\, d_i(p) = p\, \omega_i$ (e la funzione $e_i(p)$ soddisfa la condizione $p\, e_i(p) = 0$ ) per ogni $p > 0$ (come indicato dalla Proposizione 3.4). Risulta, perciò, per la funzione aggregata di domanda, la proposizione seguente (che deriva dalla Proposizione 3.9).

**Proposizione 11.3** (*Legge di Walras*) Se i sistemi di preferenza dei consumatori $\langle X_i, \succsim_i \rangle$, con $i = 1, \ldots, n$, sono monotoni, allora vale, per ogni $p > 0$, la relazione $p\, D(p) = p\, \Omega$, ove $\Omega = \sum_{i=1}^{n} \omega_i$, ovvero $p\, E(p) = 0$.

La legge di Walras implica che se $p >> 0$ e vi è equilibrio per $k - 1$ beni (ad esempio, si ha $D_h(p) = \Omega_h$, ovvero $E_h(p) = 0$, per $h = 1, \ldots, k - 1$), allora vi è equilibrio anche per il $k$-esimo bene (cioè, $D_k(p) = \Omega_k$, ovvero $E_k(p) = 0$ ).

Ricordando, poi, la Proposizione 3.8, secondo cui le funzioni di domanda sono omogenee di grado zero, cioè, $d_i(\alpha p) = d_i(p)$ (ovvero, $e_i(\alpha p) = e_i(p)$ ) per ogni $\alpha > 0$ , risulta possibile normalizzare i prezzi. Infatti, questa proprietà significa che la scelta dei consumatori dipende non dai prezzi nominali ma dai rapporti di scambio dei beni (che sono rapporti tra i prezzi), per cui è possibile alterare i prezzi mantenendo inalterati i loro rapporti senza che muti la domanda dei consumatori.[3] In altre parole, le domande non dipendono da $k$ variabili (quanti sono i prezzi nominali) ma da $k-1$ variabili (quanti sono i rapporti di scambio indipendenti). Allora, ad esempio, è possibile prendere i prezzi nell'insieme seguente (chiamato *simplesso* a $k-1$ dimensioni)

$$S^{k-1} = \{p \in \mathbb{R}^k_+ : \textstyle\sum_{h=1}^k p_h = 1\}$$

che determina tutti i possibili rapporti di scambio dei beni.[4] Le Figure 11.3 e 11.4 mostrano il simplesso, rispettivamente, per $k = 2$ e per $k = 3$.

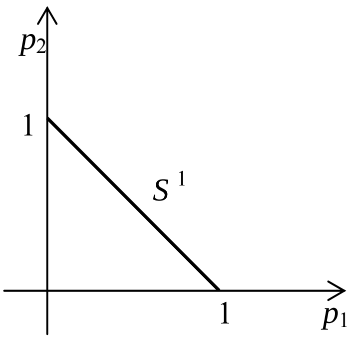


Figura 11.3

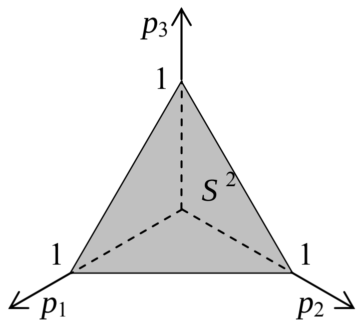


Figura 11.4

Si noti come il simplesso sia un insieme non vuoto, compatto e convesso.

[3] L'indipendenza dai prezzi nominali è un riflesso dell'arbitrarietà dell'unità di conto dei prezzi nominali. Questa unità, essendo una scelta arbitraria dell'osservatore, è necessariamente ininfluente sulle scelte dei consumatori. Né più né meno come la scelta dell'unità di misura della distanza delle terra dal sole è ininfluente sulla durata del periodo di rivoluzione della terra intorno al sole (che pur dipende da quella distanza).

[4] La normalizzazione indicata considera il prezzo $p_h' = \dfrac{p_h}{\sum_{h=1}^k p_h}$ al posto del prezzo $p_h$ per ogni $h = 1,\ldots, k$ . Con questa normalizzazione viene posto pari a 1 il prezzo di un paniere costituito da una unità di ogni bene (ossia, il prezzo del paniere $x$ è $px$ , per cui, se $x = (1, 1,\ldots, 1)$, il prezzo del paniere è $\sum_{h=1}^k p_h$ , che è necessariamente non nullo essendo $p$ semipositivo). Un'altra possibile normalizzazione consiste nel porre pari a 1 il prezzo di un bene (denominato, per questo, *numerario*) sotto condizione, però, che esso sia in equilibrio non nullo. Un'altra normalizzazione, che può essere usata anche quando vi sono prezzi negativi, considera l'insieme $\{p \in \mathbb{R}^k : \sum_{h=1}^k p_h^2 = 1\}$ .

E' ora possibile stabilire l'esistenza dell'equilibrio con la seguente proposizione, che riguarda la funzione aggregata di eccesso di domanda $E : S^{k-1} \to Z$ , ove $Z = \sum_{i=1}^{n} Z_i$ .

**Proposizione 11.4** (*Esistenza dell'equilibrio concorrenziale di puro scambio con free disposal*) Esiste un $p^* \in S^{k-1}$ per cui $E(p^*) \le 0$ se $E : S^{k-1} \to Z$ (ove $Z$ è un sottoinsieme compatto di $\mathbb{R}^k$ ) è una funzione continua tale che $p\ E(p) = 0$ per ogni $p \in S^{k-1}$ .

**Dimostrazione.** Si introduca la funzione $G : S^{k-1} \to S^{k-1}$ , definita dalle relazioni

$$G_h(p) = \frac{p_h + \max\{0, E_h(p)\}}{1 + \sum_{h=1}^{k} \max\{0, E_h(p)\}} \ , \qquad h = 1,\dots, k$$

Si noti come questa definizione introduca una funzione il cui codominio è $S^{k-1}$ se il suo dominio è $S^{k-1}$ (infatti, si ha $G_h(p) \in [0,1]$ per ogni $h = 1,\dots, k$ e $\sum_{h=1}^{k} G_h(p) = 1$ per ogni $p \in S^{k-1}$ ). Inoltre, è continua se la funzione $E : S^{k-1} \to Z$ è continua. Essendo $S^{k-1}$ un insieme non vuoto, compatto e convesso, si può allora applicare il teorema di Brouwer, per cui esiste un $p^* \in S^{k-1}$ tale che $p^* = G(p^*)$ . In relazione a questo $p^*$, si ha, allora,

$$p_h{}^* = \frac{p_h{}^* + \max\{0, E_h(p^*)\}}{1 + \sum_{h=1}^{k} \max\{0, E_h(p^*)\}} \ , \qquad h = 1,\dots, k$$

Moltiplicando per $E_h(p^*)\ (1 + \sum_{h=1}^{k} \max\{0, E_h(p^*)\})$ entrambi i membri di queste relazioni, sottraendo da entrambi i membri $p_h{}^* E_h(p^*)$ e sommando le uguaglianze così ottenute rispetto a $h$ , risulta

$$\sum_{h=1}^{k} p_h{}^*\ E_h(p^*)\ \sum_{h=1}^{k} \max\{0, E_h(p^*)\} = \sum_{h=1}^{k} E_h(p^*)\ \max\{0, E_h(p^*)\}$$

e, quindi, tenendo conto della legge di Walras,

$$0 = \sum_{h=1}^{k} E_h(p^*)\ \max\{0, E_h(p^*)\}$$

Questa relazione, essendo $E_h(p^*) \max\{0, E_h(p^*)\} \ge 0$ per ogni $h = 1,\dots, k$ , impone $E_h(p^*) \max\{0, E_h(p^*)\} = 0$ , cioè $E_h(p^*) \le 0$ , per ogni $h = 1,\dots, k$.□

Le Proposizioni 11.3 e 11.4 implicano la proposizione seguente, secondo la quale i *beni liberi*, quelli, cioè, che in equilibrio vengono scelti in quantità inferiore alla quantità complessivamente disponibile, hanno prezzo nullo. Ossia, se $E_h(p^*) < 0$ , allora $p_h{}^* = 0$ .

**Proposizione 11.5** Se valgono le ipotesi della Proposizioni 11.4, allora $E_h(p^*) < 0$ implica $p_h{}^* = 0$ e $p_h{}^* > 0$ implica $E_h(p^*) = 0$ .

**Dimostrazione.** Le condizioni $p^* E(p^*) = 0$ , $E(p^*) \le 0$ e $p^* \in S^{k-1}$ implicano $p_h{}^* E_h(p^*) = 0$ per ogni $h = 1,\dots, k$ , da cui deriva quanto enunciato dalla proposizione. □

E' anche interessante accertare sotto quali condizioni non vi sono beni liberi, quando, cioè, $E(p^*) = 0$.

Non vi sono beni liberi e si ha, inoltre, $p^* >> 0$ se vi sono consumatori con preferenze fortemente monotone e insiemi di consumo sufficientemente ampi. Infatti, un prezzo nullo indurrebbe questi consumatori a domandare una quantità molto elevata del bene in esame, pari alla quantità massima consentita dai loro insiemi di consumo, per cui la quantità totale domandata sarebbe superiore alla quantità totale disponibile.

Una condizione, introdotta dalla seguente Definizione 11.5, alquanto più debole (denominata condizione di *desiderabilità*) assicura anch'essa, per il generico bene *h*-esimo, $E_h(p^*) = 0$ e $p_h^* > 0$.

**Definizione 11.5 (***Condizione al contorno di desiderabilità dei beni***)** Un bene si dice desiderabile se la funzione $E_h(p)$ è positiva in corrispondenza ad ogni $p \in S^{k-1}$ con $p_h = 0$.

Ne consegue che è $p_h^* > 0$ se il bene *h*-esimo è desiderabile. Infatti, non può essere $p_h^* = 0$ perché non sarebbe soddisfatta la condizione di eseguibilità $E_h(p^*) \leq 0$.

Si noti come l'ipotesi che le preferenze siano fortemente monotone per ogni consumatore non solo escluda che vi siano consumatori che utilizzino la possibilità di *free disposal*, ma richieda anche che l'allocazione di equilibrio soddisfi la condizione di realizzabilità $\sum_{i=1}^{n} x_i \leq \sum_{i=1}^{n} \omega_i$ con il segno di uguaglianza. Ne consegue, se le preferenze sono fortemente monotone, che l'equilibrio concorrenziale con *free disposal* coincide con quello senza *free disposal* (questi equilibri sono stati introdotti dalla Definizione 11.4).

Le ipotesi della Proposizione 11.4 sono condizioni sufficienti, ma non necessarie, per l'esistenza dell'equilibrio (così sono le condizioni del teorema di Brouwer). L'equilibrio concorrenziale, cioè, potrebbe esistere anche se quelle condizioni non fossero soddisfatte. (Sono sufficienti, ma non necessarie, anche le condizioni della Proposizione 3.7 per la continuità delle funzioni individuali di domanda). Questo riduce alquanto la rilevanza dei teoremi di esistenza. Infatti, la ricostruzione logica della realtà economica operata dalla teoria dell'equilibrio generale (si ricordi quanto riassunto nel Paragrafo 1.2) trova nei teoremi di esistenza la prova della coerenza degli enunciati (scelte intenzionali dei consumatori e eseguibilità di queste). Però, la verità logica della teoria, essendo l'economia una scienza empirica, è soltanto condizione necessaria perché la teoria rappresenti la realtà (esprima, cioè, verità di fatto). Ossia, una teoria logicamente falsa (cioè, contraddittoria) non può rappresentare la realtà, ma non è sufficiente che la teoria sia logicamente vera perché sia empiricamente vera. Se lo scopo della teoria economica è la ricostruzione logica, empiricamente vera, di una certa realtà economica, allora le condizioni dei teoremi di esistenza sono condizioni sufficienti per una condizione necessaria, sono, quindi, condizioni non decisive. In altri termini, può accadere che esse siano soddisfatte, ma che l'equilibrio che ne consegue non rappresenti la realtà in esame. Al contrario, può accadere che esse non siano soddisfatte, che ciononostante esista un equilibrio e che questo sia una buona rappresentazione della realtà in esame. (Con condizioni necessarie avremmo avuto che la loro falsità empirica implicherebbe sia la contraddittorietà delle relazioni di equilibrio sia la falsità empirica di queste). Tuttavia, pur con questa limitazione, la dimostrazione dell'esistenza dell'equilibrio concorrenziale ha costituito un grande progresso della scienza economica, essendosi potuta accertare con essa la coerenza logica della teoria dell'equilibrio generale sotto condizioni sufficientemente deboli (consistenti, essenzialmente, nella continuità della funzione aggregata di eccesso di domanda).

Il calcolo dell'equilibrio concorrenziale di puro scambio può essere eseguito determinando dapprima le scelte dei consumatori (come indicato nel Paragrafo 3.8, ponendo $m_i = p\omega_i$) e imponendo poi la condizione di eseguibilità $\sum_{i=1}^n x_i^* \leq \sum_{i=1}^n \omega_i$ .

**Esercizio 11.1** Riprendendo l'Esercizio 4.1 ove viene preso in considerazione, in un'economia con due beni, un agente dotato di una funzione di utilità del tipo Cobb-Douglas $u = x_1^a x_2^{1-a}$ con $a \in (0,1)$ , e assumendo che vi siano $n$ consumatori tutti dotati di una funzione di utilità dello stesso tipo, cioè, che il consumatore $i$-esimo sia rappresentato dalla funzione di utilità $u_i = x_{i1}^{a_i} x_{i2}^{1-a_i}$ e dalla dotazione $\omega_i = (\omega_{i1}, \omega_{i2}) >> 0$ , risultano le funzioni di domanda individuali

$$d_i(p_1, p_2) = \begin{bmatrix} a_i(\omega_{i1} + \omega_{i2} p_2 p_1^{-1}) \\ (1-a_i)(\omega_{i2} + \omega_{i1} p_1 p_2^{-1}) \end{bmatrix}, \qquad i = 1, ..., n$$

e, quindi, la funzione aggregata di domanda

$$D(p_1, p_2) = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n a_i(\omega_{i1} + \omega_{i2} p_2 p_1^{-1}) \\ \sum_{i=1}^n (1-a_i)(\omega_{i2} + \omega_{i1} p_1 p_2^{-1}) \end{bmatrix}$$

Tenendo presente che le preferenze sono fortemente monotone per cui la condizione di eseguibilità può essere soddisfatta soltanto come uguaglianza, risultano le condizioni

$$\sum_{i=1}^n a_i(\omega_{i1} + \omega_{i2} p_2 p_1^{-1}) = \sum_{i=1}^n \omega_{i1} , \qquad \sum_{i=1}^n (1-a_i)(\omega_{i2} + \omega_{i1} p_1 p_2^{-1}) = \sum_{i=1}^n \omega_{i2}$$

non indipendenti (per la legge di Walras), ciascuna delle quali determina il rapporto di scambio di equilibrio

$$\frac{p_2^*}{p_1^*} = \frac{\sum_{i=1}^n (1-a_i)\omega_{i1}}{\sum_{i=1}^n a_i \omega_{i2}}$$

Introducendo questo valore nelle funzioni individuali di domanda, risulta poi determinata l'allocazione di equilibrio.

Si assuma, ora, ferme restando le altre ipotesi, che sia $n = 2$ , $a_2 = 1$ (cioè, $u_2 = x_{21}$ ), $\omega_1 = (0,1)$ e $\omega_2 = (2,1)$ . La domanda del primo consumatore è, allora, $x_{11} = a_1 p_2 p_1^{-1}$ per ogni $p \in S^1$ e $x_{12} = 1 - a_1$ per ogni $p \in S^1$ con $p_2 > 0$ , mentre è $x_{12} = \infty$ per $p_2 = 0$ . La domanda del secondo consumatore è $x_{21} = 2 + p_2 p_1^{-1}$ per ogni $p \in S^1$ e

$x_{22} = 0$ per ogni $p \in S^1$ con $p_2 > 0$ , mentre è $x_{22} \in [0, \infty)$ (cioè, un qualsiasi punto dell'intervallo) per $p_2 = 0$ . Si può vedere come queste scelte non siano realizzabili. Infatti, se $p_2 > 0$, la realizzabilità richiederebbe $a_1 p_2 p_1^{-1} + 2 + p_2 p_1^{-1} \leq 2$ , cioè, $(1 + a_1) p_2 p_1^{-1} \leq 0$, condizione che non è mai soddisfatta per $p_2 > 0$ . Se $p_2 = 0$, le scelte non sono realizzabili perché il primo consumatore domanderebbe una quantità infinita del secondo bene. In questo caso, perciò, non esiste un equilibrio concorrenziale.

### 11.5 Una rappresentazione grafica dell'equilibrio di puro scambio con due beni e due agenti: il diagramma di Edgeworth-Pareto.

Il diagramma di Edgeworth-Pareto (introdotto nel Paragrafo 8.3 e descritto nella Figura 8.1) si presta a rappresentare l'economia $\mathcal{E} = (\langle X_1, \succsim_1\rangle, \langle X_2, \succsim_2\rangle, \omega_1, \omega_2)$ . Nel seguito si assume anche $X_1 = X_2 = \mathbb{R}^2_+$ , $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{R}^2_+$ e che i sistemi di preferenza dei due consumatori siano regolari, continui e fortemente monotoni.

Un'economia di questo tipo è poco rappresentativa per la teoria dell'equilibrio generale concorrenziale: infatti, da un lato, è poco credibile l'ipotesi che i due agenti (quindi, un solo compratore e un solo venditore per ciascun bene) siano *price-taker* (tuttavia, a questo riguardo, si può immaginare che vi siano due tipi di agenti e che il loro numero, uguale per i due tipi, sia sufficientemente grande) e, dall'altro lato, la presenza di due soli beni (quindi, di un solo rapporto di scambio) non genera alcuna interdipendenza. Tuttavia, il diagramma di Edgeworth-Pareto è utilissimo per la comprensione di molti aspetti dell'equilibrio generale.

Nel diagramma di Edgeworth-Pareto, rappresentato nella Figura 11.5, l'allocazione iniziale $\omega = (\omega_1, \omega_2)$ è rappresentata da un punto.

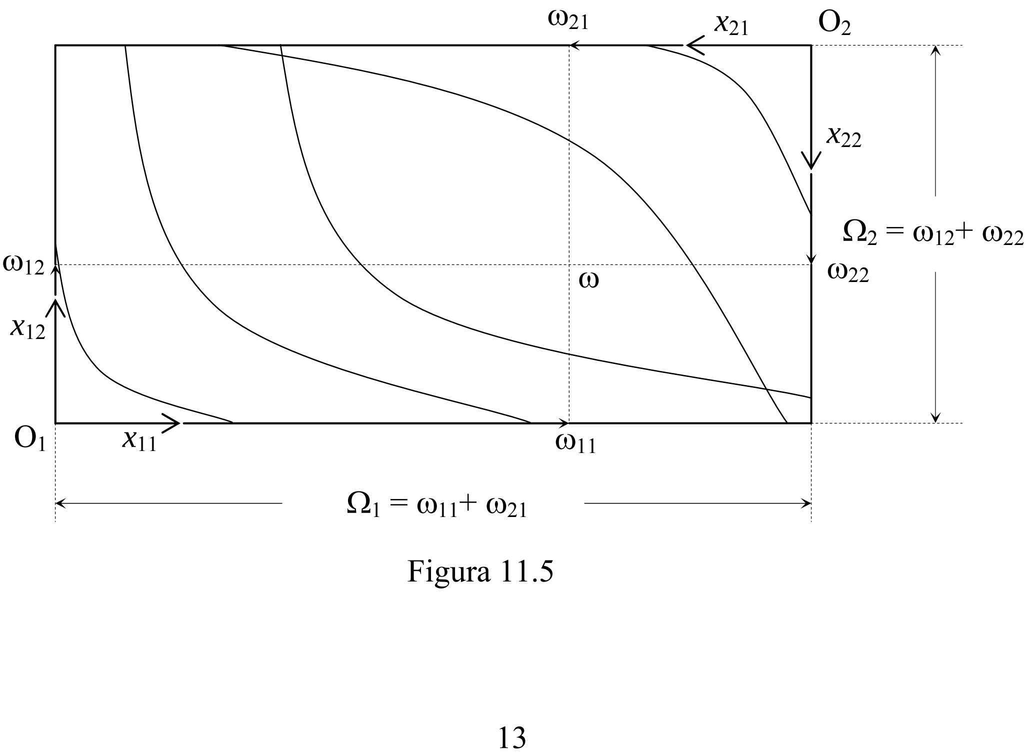


Figura 11.5

La Figura 11.5 rappresenta tutti i dati dell'economia $\mathcal{E} = (\langle X_1, \succsim_1\rangle, \langle X_2, \succsim_2\rangle, \omega_1, \omega_2)$ in esame. Si tratta ora di raffigurare l'equilibrio concorrenziale, cioè, le scelte realizzabili.

L'ipotesi di monotonicità delle preferenze implica che i due consumatori scelgano sempre, cioè, qualunque siano i prezzi, un paniere di beni che rende soddisfatto il vincolo di bilancio col segno di uguaglianza. Ossia, per ogni scelta $x_i$, si ha $p_1\, x_{i1} + p_2\, x_{i2} = p_1\, \omega_{i1} + p_2\, \omega_{i2}$, per $i = 1, 2$. Questa relazione è, nel diagramma, una retta passante per il punto $\omega$ con pendenza negativa pari, in valore assoluto, al rapporto di scambio $p_1/p_2$. Nel diagramma, come rappresentato nella Figura 11.6, le rette dei due consumatori coincidono: la differenza consiste nel fatto che la retta di bilancio del primo consumatore va letta rispetto al sistema di assi di origine $O_1$, quella del secondo consumatore rispetto a $O_2$. La scelta di ciascun consumatore in corrispondenza dei diversi possibili valori del rapporto di scambio è raffigurata dalla curva prezzo-consumo (introdotta nel Paragrafo 3.8 e rappresentata nella Figura 3.16), che è una rappresentazione della funzione walrasiana di domanda.

La condizione di realizzabilità, in presenza di *free disposal*, richiede che sia $x_{1h} + x_{2h} \le \Omega_h$ (ove $\Omega_h = \omega_{1h} + \omega_{2h}$), per $h = 1, 2$. Con preferenze fortemente monotone, allora, come indicato nel Paragrafo 11.4 subito dopo la Proposizione 11.5, non vi sono beni liberi e la condizione di eseguibilità è soddisfatta come uguaglianza, cioè, $x_{1h} + x_{2h} = \Omega_h$, per $h = 1, 2$. Ne consegue che le allocazioni realizzabili sono i punti dell'insieme $C = \{x_1, x_2 \in \mathbb{R}^2_+ : x_1 + x_2 = \Omega\}$, che, coincide, nel diagramma di Edgeworth-Pareto, con l'insieme dei punti del rettangolo.

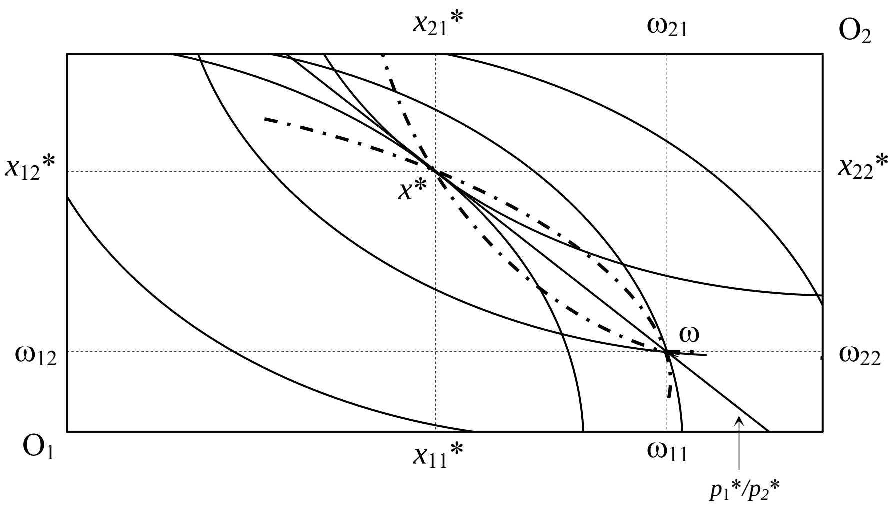


Figura 11.6

L'equilibrio concorrenziale richiede la considerazione di panieri di beni che siano, da un lato, scelte, ossia appartengano alle curve prezzo-consumo (rappresentate nella Figura 11.6 dalle curve spesse tratteggiate), e che diano luogo, dall'altro lato, ad una allocazione realizzabile, ossia, in base alle ipotesi introdotte, che i panieri di beni dei due individui siano rappresentati dallo stesso punto del diagramma di Edgeworth-Pareto. Ne consegue che un'allocazione è di equilibrio concorrenziale solo se è rappresentata da un punto che appartiene ad entrambe le curve prezzo-consumo. L'ulteriore condizione richiesta per l'equilibrio concorrenziale è che le scelte dei due consumatori siano determinate dallo stesso rapporto di scambio. Questa condizione è soddisfatta da tutti i punti comuni alle due curve prezzo-consumo tranne, eventualmente, il punto $\omega$. (Se le preferenze dei due consumatori sono convesse, allora questo punto appartiene ad entrambe le curve prezzo-consumo perché viene scelto da ciascun consumatore in corrispondenza al rapporto di scambio pari al suo saggio marginale di sostituzione in quel punto. Non rappresenta, però, quasi mai un'allocazione di equilibrio concorrenziale, poiché normalmente i due consumatori hanno in esso saggi marginali di sostituzione differenti. E', però, un'allocazione di equilibrio concorrenziale se questi ultimi sono uguali). I punti appartenenti ad entrambe le curve prezzo-consumo (tranne, eventualmente, il punto $\omega$) indicano scelte dei due consumatori associate ad uno stesso rapporto di scambio, poiché si trovano sulla stessa retta di bilancio. Si noti come le curve di indifferenza dei due individui non si intersechino mai in un punto di equilibrio (se sono lisce, cioè senza spigoli, sono tangenti tra loro). Nella Figura 11.6 è rappresentata un'economia con una sola allocazione di equilibrio concorrenziale $x^* = (x_1^*, x_2^*)$. E' possibile disegnare situazioni prive di equilibri concorrenziali (ad esempio, se le preferenze di un consumatore non sono convesse) ed altre dotate di una molteplicità, anche infinita, di equilibri concorrenziali (ad esempio, se entrambi i consumatori hanno preferenze per cui i beni sono perfettamente complementari).

Dalla Figura 11.6 risulta anche che l'allocazione di equilibrio concorrenziale $x^* = (x_1^*, x_2^*)$ è efficiente, secondo quanto illustrato dalla Figura 8.1. Infatti, le curve di indifferenza dei due agenti sono tangenti tra loro nel punto che rappresenta l'allocazione concorrenziale, poiché sono entrambe tangenti in quel punto alla retta del vincolo di bilancio. Questa proprietà, secondo cui le allocazioni di equilibrio concorrenziale sono efficienti, è notevole. Essa è nota con il nome di "primo teorema dell'economia del benessere" e verrà presentata, per il caso generale con $n$ agenti e $k$ beni, nel Paragrafo 11.6. In questo paragrafo verrà anche presentato il "secondo teorema" che è illustrato, nel diagramma di Edgeworth-Pareto, dalla proprietà seguente. Si prenda una qualsiasi allocazione efficiente (ossia un punto del luogo delle allocazioni efficienti, che è la curva tracciata nella Figura 8.1). Si trova che questa allocazione può essere ottenuta tramite un equilibrio concorrenziale, se le preferenze sono convesse (oltre che continue e fortemente monotone), con un opportuna assegnazione delle risorse nelle dotazioni. La Figura 11.7 mostra quanto appena indicato con riferimento a due allocazioni efficienti $x^*$ e $\hat{x}$ . L'allocazione efficiente $x^*$ è l'allocazione concorrenziale se la dotazione iniziale è $\omega^*$ (o qualsiasi altro punto sulla retta tangente in $x^*$ alle curve di indifferenza); l'allocazione efficiente $\hat{x}$ è l'allocazione concorrenziale se la dotazione iniziale è $\hat{\omega}$ (o qualsiasi altro punto sulla retta tangente). La pendenza della tangente alle curve di indifferenza nell'allocazione efficiente in esame determina il rapporto di scambio del corrispondente equilibrio concorrenziale.

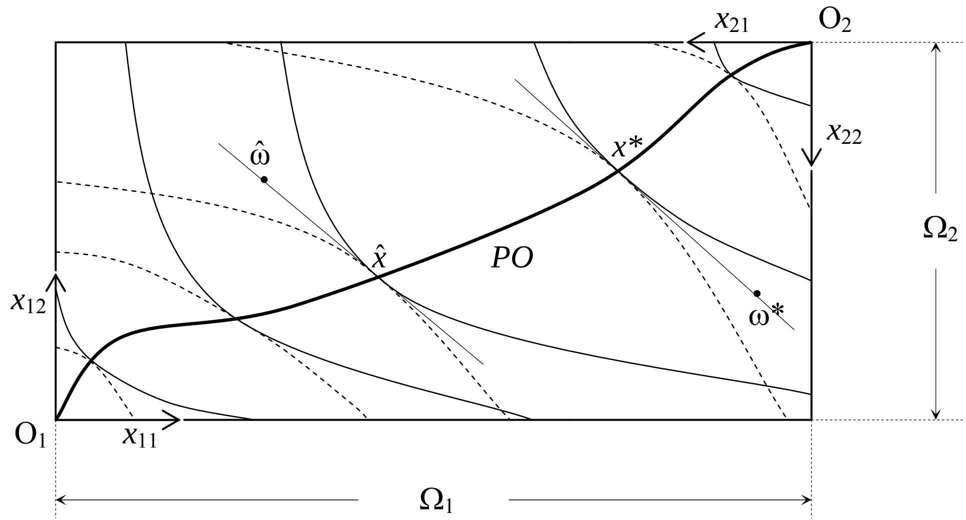


Figura 11.7

Nella Figura 11.8 sono indicati anche equilibri non concorrenziali, sempre per una economia con due consumatori e due beni. Il punto $x^*$ indica l'allocazione di equilibrio concorrenziale (questa allocazione si trova in un punto in cui le curve di indifferenza dei due consumatori sono entrambe tangenti alla retta che congiunge questo punto con quello che rappresenta la dotazione iniziale; inoltre per questo punto passano anche le curve prezzo-consumo, delle quali è indicata nella figura solo quella del consumatore 1). Il punto $x_m$ indica l'allocazione di monopolio a prezzo unico da parte del consumatore 2, ossia l'allocazione di equilibrio che si ottiene quando questo individuo può scegliere il rapporto di scambio $p_2/p_1$ (questa allocazione è, sulla curva prezzo-consumo del consumatore 1, quella più conveniente per il consumatore 2). Il punto $x_{md}$ indica l'allocazione di monopolio con discriminazione di prezzo del primo genere da parte del consumatore 2, ossia l'allocazione di equilibrio che si ottiene quando il consumatore 1 può solo accettare o rifiutare l'allocazione proposta dal consumatore 2 (questa allocazione è, sulla curva di indifferenza del consumatore 1 passante per la dotazione iniziale, quella più conveniente per il consumatore 2). Si può notare come le allocazioni $x^*$ e $x_{md}$ siano efficienti e l'allocazione $x_m$ inefficiente; come l'individuo 2 tragga il maggior vantaggio dall'allocazione $x_{md}$ e il minor vantaggio dall'allocazione $x^*$ (viceversa per il consumatore 1); come la quantità del bene 2 venduta dall'individuo 2 nel monopolio a prezzo unico sia minore che nella concorrenza perfetta e come essa sia venduta ad un prezzo più elevato, cioè $(p_2/p_1)_m > (p_2/p_1)^*$ , in accordo con la teoria di equilibrio parziale del monopolio a prezzo unico (indicata nel § 10.8). Invece, al contrario che nell'analisi di equilibrio parziale (§ 10.10), non necessariamente la quantità venduta di bene 2 è, nel monopolio con discriminazione di prezzo del primo genere, maggiore che nel monopolio puro e il suo prezzo marginale inferiore.

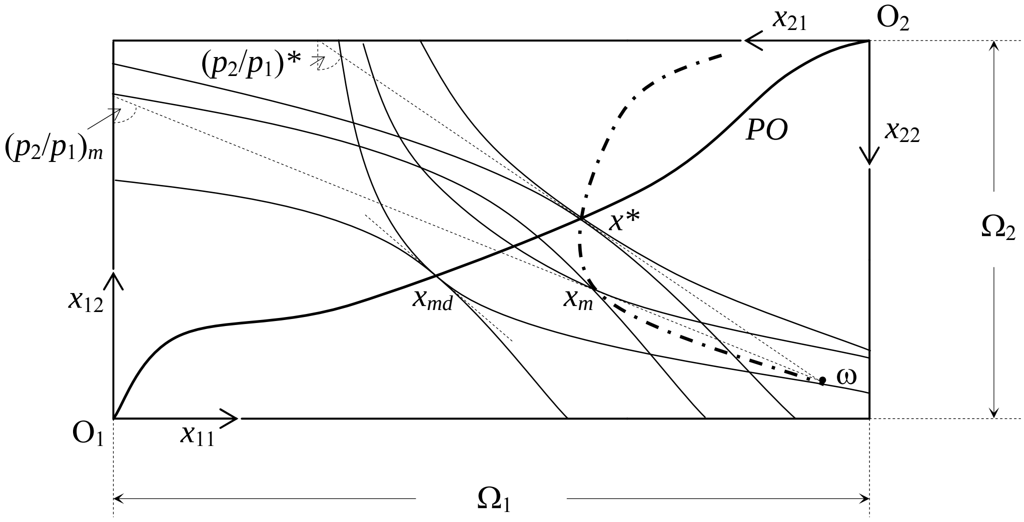


Figura 11.8

### 11.6 Equilibrio concorrenziale di puro scambio ed efficienza: i due teoremi dell'economia del benessere

L'equilibrio concorrenziale di puro scambio con *free disposal* è rappresentato da un vettore di prezzi $p^* \in S^{k-1}$ e da un'allocazione $x^* = (x_1^*, \ldots, x_n^*)$ tali che $x_i^* \in d_i(p^*)$ per ogni $i = 1, \ldots, n$ (come indicato dalla Definizione 11.4). Si tratta ora di esaminare la relazione tra le allocazioni così ottenute e quelle efficienti (introdotte nel Paragrafo 8.2) per un'economia di puro scambio. Le due proposizioni principali al riguardo esaminano, la prima, le condizioni che rendono efficiente un'allocazione ottenuta con l'equilibrio concorrenziale e, la seconda, le condizioni che rendono ottenibile con un equilibrio concorrenziale un'allocazione efficiente.

**Proposizione 11.6** (*Primo teorema dell'economia del benessere*) Se $(x^*, p^*)$ è un equilibrio concorrenziale con *free disposal* per l'economia (priva di esternalità) $\mathcal{E} = (\langle X_i, \succsim_i \rangle, \omega_i, i = 1, \ldots, n)$, allora l'allocazione $x^*$ è debolmente efficiente.

**Dimostrazione.** Si consideri la proposizione equivalente secondo cui se un'allocazione non è debolmente efficiente, allora non può appartenere ad un equilibrio concorrenziale. Se $x$ non è un'allocazione debolmente efficiente, allora esiste un'altra allocazione $x'$ realizzabile, cioè con $\Sigma_{i=1}^n x_i' \leq \Sigma_{i=1}^n \omega_i$, tale che $x_i' \succ_i x_i$ per ogni $i = 1, \ldots, n$. Ne consegue che per ogni $p \in S^{k-1}$ si ha $\Sigma_{i=1}^n p x_i' \leq \Sigma_{i=1}^n p \omega_i$ e, quindi, che vi è almeno un $i =$

$1,\ldots, n$ per cui $px_i' \leq p\omega_i$ . Ma se vi è, per ogni $p \in S^{k-1}$ , qualche $i = 1,\ldots, n$ per cui $px_i' \leq p\omega_i$ e $x_i' \succ_i x_i$ , allora $x_i \notin d_i(p)$ ed è, quindi, escluso che l'allocazione $x$ possa appartenere ad un equilibrio concorrenziale. □

La proposizione precedente, che è molto generale, richiede qualche ipotesi (oltre l'assenza di esternalità) perché l'allocazione di equilibrio concorrenziale sia fortemente efficiente. Questo accade, ad esempio, se le preferenze di tutti i consumatori sono continue e fortemente monotone, perché, in tale caso, ogni allocazione debolmente efficiente è, per la Proposizione 8.3, anche fortemente efficiente (oltre che viceversa).[5]

Tuttavia, è possibile riformulare il primo teorema dell'economia del benessere con riferimento all'efficienza forte senza richiedere che le preferenze siano continue e fortemente monotone. Basta assumere che siano localmente non saziate.

**Proposizione 11.7** Se $(x^*, p^*)$ è un equilibrio concorrenziale (con *free disposal*) per l'economia (priva di esternalità) $\mathcal{E} = (\langle X_i, \succsim_i\rangle, \omega_i, i = 1,\ldots, n)$ , con preferenze di tutti i consumatori regolari (cioè, complete e transitive) e localmente non saziate, allora l'allocazione $x^*$ è fortemente efficiente.

**Dimostrazione.** Si assuma, per assurdo, che, pur essendo $(x^*, p^*)$ un equilibrio concorrenziale, l'allocazione $x^*$ non sia fortemente efficiente. Allora esiste un'allocazione $x$ realizzabile, cioè con $\Sigma_{i=1}^n x_i \leq \Sigma_{i=1}^n \omega_i$ , tale che $x_i \succsim_i x_i^*$ per ogni $i = 1,\ldots, n$ e $x_j \succ_j x_j^*$ per almeno un $j = 1,\ldots, n$ . Ne consegue, essendo $x_j^* \in d_j(p^*)$ , che deve essere per questo consumatore $p^* x_j > p^* \omega_j$ , mentre per tutti gli altri consumatori deve essere $p^* x_i \geq p^* \omega_i$ (altrimenti, se cioè fosse $p^* x_i < p^* \omega_i$ , essendo le preferenze localmente non saziate, esisterebbe nell'intorno di $x_i$ un $x_i' \succ_i x_i \succsim_i x_i^*$ tale che $p^* x_i' < p^* \omega_i$ , che è incompatibile con l'assunto $x_i^* \in d_i(p^*)$ ). Risulta, quindi, che $\Sigma_{i=1}^n p^* x_i > \Sigma_{i=1}^n p^* \omega_i$ , in contrasto con la condizione di realizzabilità $\Sigma_{i=1}^n x_i \leq \Sigma_{i=1}^n \omega_i$ . □

I due esempi seguenti riguardano due economie che soddisfano le ipotesi della Proposizione 11.6, ma non quelle della Proposizione 11.7 (che richiedono preferenze localmente non saziate). In questi esempi vi sono equilibri concorrenziali che presentano allocazioni debolmente efficienti ma non fortemente efficienti.

Il primo esempio, rappresentato dal diagramma di Edgeworth-Pareto della Figura 11.9, riguarda un'economia con due consumatori e due beni, in cui il primo consumatore non ha preferenze localmente non saziate (segnalate da una curva di indifferenza "spessa", i cui punti, cioè, sono tutti indifferenti tra loro). L'allocazione $x^*$ (coincidente con quella delle dotazioni $\omega$ ) è l'allocazione di equilibrio concorrenziale, i cui prezzi sono rappresentati dalla pendenza del vincolo di bilancio indicato nella figura. Questa allocazione è efficiente debolmente, ma non fortemente, poiché vi sono altre allocazioni realizzabili, come l'allocazione $\hat{x}$ che sono preferite dal secondo consumatore all'allocazione $x^*$ e sono indifferenti a $x^*$ per il primo consumatore.

[5] Si tenga, peraltro, presente che questa equivalenza richiede che gli insiemi di consumo siano sufficientemente ampi, condizione questa verificata se $X_i = \mathbb{R}_+^k$ per ogni $i = 1,\ldots, n$ .

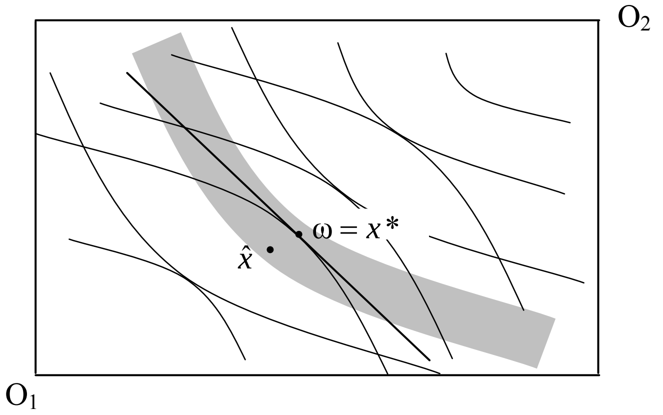


Figura 11.9

Il secondo esempio riguarda un'economia con due consumatori e quattro beni, di ciascuno dei quali esiste una sola unità indivisibile. Perciò l'insieme di consumo $X_i$ , per $i$ = 1, 2, è costituito da un numero finito di punti, rappresentabili con il simbolo $a_{h_1,h_2,h_3,h_4}$ , con $h_1$, $h_2$, $h_3$, $h_4 \in \{0, 1\}$ , in cui ciascun pedice indica la quantità del corrispondente bene (allora, $a_{1,1,0,0}$ è il paniere di beni composto dalle unità esistenti dei primi due beni). Quindi, $X_i = \{x_i \in \mathbb{R}^4 : x_i = a_{h_1,h_2,h_3,h_4} ;\ h_1, h_2, h_3, h_4 \in \{0, 1\}\}$ , per $i$ = 1, 2. Siano le preferenze di entrambi i consumatori tali che $x_i' \succ_i x_i$ se $x_i'e > x_ie$ (ove $e = (1, 1, 1, 1)$) e $x_i' \sim_i x_i$ se $x_i'e = x_ie \neq 2$, mentre, se è $x_i'e = x_ie = 2$, allora per il primo consumatore è $a_{0,1,0,1} \succ_1 a_{1,0,1,0} \sim_1 a_{1,1,0,0} \succ_1 a_{0,0,1,1} \succ_1 a_{1,0,0,1} \succ_1 a_{0,1,1,0}$ e per il secondo consumatore $a_{1,1,0,0} \succ_2 a_{0,1,0,1} \succ_2 a_{0,0,1,1} \succ_2 a_{1,0,0,1} \sim_2 a_{0,1,1,0} \succ_2 a_{1,0,1,0}$. Siano le dotazioni $\omega_1 = a_{1,1,0,0}$ e $\omega_2 = a_{0,0,1,1}$. Un equilibrio concorrenziale è costituito dai prezzi $p^* = \frac{1}{13}(2, 5, 3, 3)$ e dall'allocazione $x_1^* = \omega_1$ , $x_2^* = \omega_2$ . Però, questa allocazione non è fortemente efficiente, poiché esiste l'allocazione realizzabile $\hat{x}_1 = a_{1,0,1,0}$ , $\hat{x}_2 = a_{0,1,0,1}$ , per la quale è $\hat{x}_1 \sim_1 x_1^*$ e $\hat{x}_2 \succ_2 x_2^*$ .

Con riferimento alla determinazione dell'equilibrio concorrenziale mediante il calcolo, la Proposizione 11.6 comporta che le condizioni del primo ordine per l'equilibrio implichino le condizioni del primo ordine per l'efficienza (presentate nel Paragrafo 8.2), cioè che i saggi marginali di sostituzione siano per ogni coppia di beni uguali per tutti i consumatori. Ciò è immediatamente verificato, poiché le condizioni del primo ordine della scelta di ciascun consumatore richiedono l'uguaglianza di ogni saggio marginale di sostituzione al rapporto tra i prezzi dei due beni corrispondenti e l'equilibrio concorrenziale richiede che i prezzi siano gli stessi per tutti i consumatori.

L'ipotesi principale della Proposizione 11.6 è l'assenza di esternalità. Se vi sono esternalità, si ha, in genere, un *fallimento del mercato* (cioè, l'allocazione generata dall'equilibrio del mercato è inefficiente). In tale caso, per pervenire all'efficienza occorre introdurre dei correttivi, che possono consistere in imposte e sussidi, nell'introduzione di prezzi (positivi o negativi) per quei particolari servizi che sono le esternalità o, anche, se le esternalità sono prodotte e subite da imprese, nell'introduzione di scambi sulla proprietà di quest'ultime. Questi aspetti sono analizzati nel Paragrafo …. Un'altra ipotesi, implicita nell'enunciato della Proposizione 11.6, riguarda la comune conoscenza, da parte di tutti i consumatori, delle caratteristiche dei beni scambiati. Se vi sono asimmetrie informative su di esse (ad esempio, alcuni agenti distinguono un certo tipo di bene in beni diversi per qualità, che altri agenti non sono in grado di distinguere), allora l'allocazione dell'equilibrio concorrenziale può risultare inefficiente. Questo problema (noto come *selezione avversa*) è analizzato nel Paragrafo …

Il *secondo teorema dell'economia del benessere* riguarda la possibilità di pervenire tramite un equilibrio concorrenziale, con una opportuna assegnazione delle dotazioni, ad una prefissata allocazione efficiente. Questa possibilità richiede condizioni alquanto restrittive, tra le quali la più importante è la convessità delle preferenze. Tra le possibili formulazioni di questo teorema, una delle più semplici è la seguente.

**Proposizione 11.8** (*Secondo teorema dell'economia del benessere*) Sia $x^*$ un'allocazione efficiente per l'economia (priva di esternalità) $(\langle X_i, \succsim_i\rangle, \Omega, i = 1,\ldots, n)$. Se, per ogni $i = 1,\ldots, n$, il sistema di preferenza $\langle X_i, \succsim_i\rangle$, ove $X_i = \mathbb{R}^k_+$, è regolare (cioè, completo e transitivo), continuo, fortemente monotono[6] e convesso e $x_i^* >> 0$, allora esiste un vettore $p^* \in S^{k-1}$ per cui $(x^*, p^*)$ è un equilibrio concorrenziale per l'economia $\mathcal{E} = (\langle X_i, \succsim_i\rangle, \omega_i, i = 1,\ldots, n)$, ove le dotazioni $\omega_i$ sono tali che $\Sigma_{i=1}^n \omega_i = \Omega$ e $p^* \omega_i = p^* x_i^*$ per ogni $i = 1,\ldots, n$ (ad esempio, se $\omega_i = x_i^*$ per ogni $i = 1,\ldots, n$).

**Dimostrazione.** Poiché la dimostrazione è piuttosto lunga, conviene separarla in passi successivi.

*a*) Si considerino, per ogni consumatore, gli insiemi dei panieri di beni preferiti a $x_i^*$, cioè $P_i(x_i^*) = \{x_i \in \mathbb{R}^k_+ : x_i \succ_i x_i^* \}$, e si consideri l'insieme somma $P(x^*) = \Sigma_{i=1}^n P_i(x_i^*)$ $= \{X \in \mathbb{R}^k_+ : \Sigma_{i=1}^n x_i = X$ e $x_i \succ_i x_i^*$ per ogni $i = 1,\ldots, n \}$. Tutti questi insiemi sono convessi, poiché le preferenze dei consumatori sono convesse e la somma di insiemi convessi è un insieme convesso.

*b*) Essendo l'allocazione $x^*$ efficiente, allora si ha che $X^* \notin P(x^*)$, ove $X^* = \Sigma_{i=1}^n x_i^*$. Quindi, poiché $X^* \in \mathbb{R}^k$ non appartiene all'insieme convesso $P(x^*) \subset \mathbb{R}^k$, si può applicare il teorema dell'iperpiano di sostegno,[7] secondo cui esiste un vettore $a \neq 0$ tale

[6] L'ipotesi che richiede preferenze fortemente monotone può essere sostituita dalla più debole ipotesi che le preferenze siano localmente non saziate. In tale caso, la dimostrazione va leggermente modificata.

[7] Questo teorema appartiene al gruppo dei teoremi dell'iperpiano di separazione. L'enunciato rilevante per la proposizione in esame asserisce che, se $P \subset \mathbb{R}^k$ è un insieme convesso e $x^* \in \mathbb{R}^k$ non è un punto di $P$, cioè $x^* \notin P$, allora esiste un vettore $a \neq 0$ tale che $ax \geq ax^*$ per ogni $x \in P$. Nella Figura 11.10 è raffigurato quanto appena enunciato, per il caso in cui $P$ è un insieme convesso aperto e $x^*$ appartiene alla sua frontiera.

che $a\,X \geq a\,X^*$ per ogni $X \in P(x^*)$ . D'altra parte, essendo le preferenze fortemente monotone, l'allocazione efficiente $x^*$ soddisfa la condizione $\Sigma_{i=1}^{n} x_i^* = \Omega$ . Ne consegue che $a\,X^* = a\,\Omega$ .

*c*) Si consideri l'allocazione $(x_i^* + \frac{1}{n} e_h)_{i=1}^{n}$ , ove $e_h$ è il vettore con elementi tutti uguali a zero tranne l'elemento $h$-esimo che è pari a 1. Poichè le preferenze di tutti i consumatori sono fortemente monotone, allora si ha $(x_i^* + \frac{1}{n} e_h) \succ_i x_i^*$ per ogni $i = 1,\ldots, n$ e, quindi, essendo $(X^* + e_h) = \Sigma_{i=1}^{n} (x_i^* + \frac{1}{n} e_h)$ , si ha $(X^* + e_h) \in P(x^*)$ per ogni $h = 1,\ldots, k$ . Risulta, allora, applicando la disuguaglianza del teorema dell'iperpiano di sostegno, $a(X^* + e_h) \geq aX^*$ , cioè $a_h \geq 0$ per ogni $h = 1,\ldots, k$ . Si definisca, a questo punto, $p^* = \dfrac{1}{\Sigma_{h=1}^{k} a_h} a$ . Si ha, allora, che $p^* \in S^{k-1}$ e $p^*X \geq p^*X^*$ per ogni $X \in P(x^*)$ .

*d*) Si dimostra, ora, per ogni $i = 1,\ldots, n$ , che, se $x_i \succ_i x_i^*$ , allora $p^*\, x_i \geq p^*\, x_i^*$ . Se $x_i \succ_i x_i^*$ , essendo le preferenze continue e $X_i = \mathbb{R}_+^k$ , esiste un $t \in (0, 1)$ tale che $(1 - t)\, x_i \succ_i x_i^*$ . Si prenda in considerazione l'allocazione $x'$ , ove $x_i' = (1 - t)\, x_i$ e $x_b' = x_b^* + \dfrac{t}{n-1} x_i$ per ogni $b \neq i$ e $b = 1,\ldots, n$ . Essendo le preferenze fortemente monotone, si ha $x_i' \succ_i x_i^*$ per ogni $i = 1,\ldots, n$ . Allora, si ha $X' = \Sigma_{i=1}^{n} x_i' \in P(x^*)$ e, quindi, per il teorema dell'iperpiano di sostegno, $p^*\, X' \geq p^*X^*$ , cioè $p^*\, \Sigma_{i=1}^{n} x_i' \geq p^*\, \Sigma_{i=1}^{n} x_i^*$ . Tenendo conto della definizione dell'allocazione $x'$ , si ottiene, perciò,

$$p^*\,(1 - t)\, x_i + p^*\, \Sigma_{b=1, b\neq i}^{n} \left( x_b^* + \frac{t}{n-1} x_i \right) \geq p^*\, \Sigma_{b=1}^{n} x_b^*$$

da cui risulta che $p^*\, x_i \geq p^*\, x_i^*$ .

*e*) Si può rafforzare la relazione precedente dimostrando, per ogni $i = 1,\ldots, n$ , che, se $x_i \succ_i x_i^*$ , allora non è soltanto $p^*\, x_i \geq p^*\, x_i^*$ ma $p^*\, x_i > p^*\, x_i^*$ . Infatti, come già indicato, se $x_i \succ_i x_i^*$ , essendo le preferenze continue e $X_i = \mathbb{R}_+^k$ , esiste un $t \in (0, 1)$ tale che $(1 - t)\, x_i \succ_i x_i^*$ . Allora, applicando la relazione individuata nel passo precedente, si ha $p^*\,(1 - t)\; x_i \geq p^*\, x_i^*$ , ossia $p^*\, x_i \geq \dfrac{1}{1-t}\, p^*\, x_i^*$ . Essendo $p^* \in S^{k-1}$ e, per ipotesi, $x_i^* >> 0$, è necessariamente $p^*\, x_i^* > 0$ , per cui la disuguaglianza precedente richiede $p^*\, x_i > p^*\, x_i^*$ .

*f*) Dai passi precedenti risulta, per ogni $i = 1,\ldots, n$ , che, se $x_i \succ_i x_i^*$ , allora $p^*\, x_i > p^*\, x_i^*$ . Ciò implica che, se $p^*\, x_i \leq p^*\, x_i^*$ , allora $x_i \precsim_i x_i^*$ e, quindi, che $x_i^* \succsim_i x_i$ per ogni

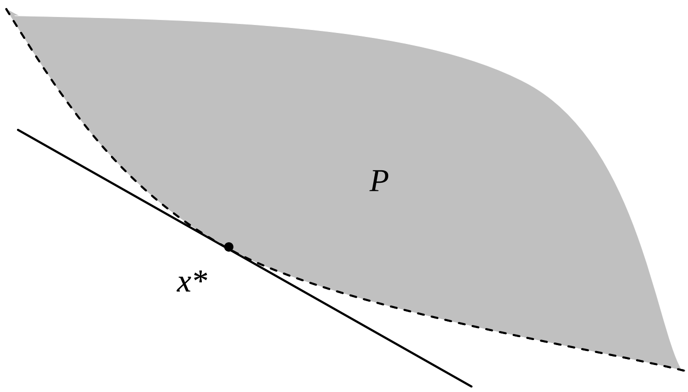


Figura 11.10

$x_i \in \{x_i \in X_i: p^* x_i \leq p^* x_i^*\}$. Ne consegue, per ogni $i = 1,\dots, n$, che $x_i^* \in d_i(p^*, p^*\omega_i)$ per ogni $\omega_i$ tale che $p^*\omega_i = p^*x_i^*$. Essendo, inoltre, l'allocazione $x^*$ realizzabile (poiché efficiente), ne consegue che $(x^*, p^*)$ è un equilibrio concorrenziale. (Si noti, infine, come questo risultato e l'ipotesi che le preferenze siano fortemente monotone implichino anche che $p^* >> 0$). □

Nelle Figure 11.11 e 11.12 sono indicati i diagrammi di Edgeworth-Pareto corrispondenti a due casi in cui un'allocazione efficiente non può essere ottenuta tramite un equilibrio concorrenziale: nel caso della Figura 11.11 perché le preferenze non sono convesse e nel caso della Figura 11.12 perché il paniere di beni $x_1^*$ non è positivo. (La Figura 11.12 rappresenta una situazione ove $u_1 = x_{11} + \sqrt{x_{12}}$ e $u_2 = \min\{x_{21}, x_{22}/2\}$, con $x_1^* = (1/2, 0)$ e $x_2^* = (1/2, 1)$ ).

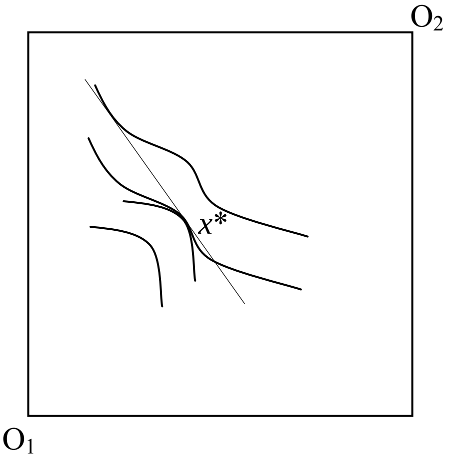

Figura 11.11

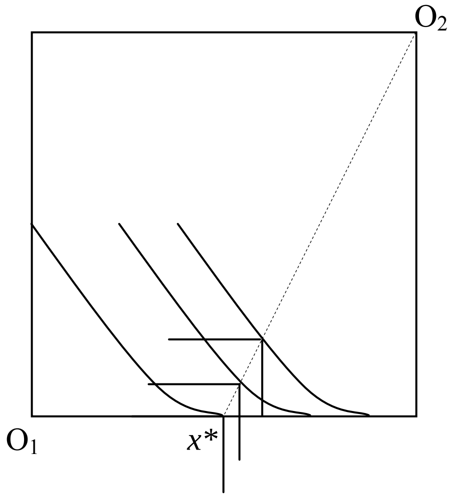

Figura 11.12

Il secondo teorema dell'economia del benessere mostra come si possa ottenere ogni allocazione efficiente (e, quindi, l'allocazione di massimo benessere sociale) con una opportuna distribuzione delle risorse. Questa possibilità è uno dei fondamenti della politica di riduzione delle disuguaglianze tra i consumatori. Mentre l'introduzione di imposte sugli scambi è distorsiva, poiché l'introduzione di un cuneo tra il prezzo di acquisto e quello di vendita impedisce l'uguaglianza tra il saggio marginale di sostituzione del compratore e quello del compratore, che è condizione per l'efficienza, l'introduzione di trasferimenti di ricchezza tra i consumatori in presenza di un'economia concorrenziale non presenta questo problema. Tuttavia, il raggiungimento di una specifica allocazione efficiente richiede l'introduzione di trasferimenti che determinino dotazioni in grado di generare, con l'equilibrio concorrenziale, l'allocazione prescelta e il calcolo di questi trasferimenti richiede la conoscenza di tutti i "dati" dell'economia, cioè di $\mathcal{E} = (\langle X_i, \succsim_i \rangle, \omega_i, i = 1,\dots, n)$, da parte dell'autorità che opera i trasferimenti. La mancanza di una sufficiente conoscenza di questi "dati" è uno dei maggiori limiti alla politica redistributiva.

## 11.7 Equilibrio concorrenziale e massimo benessere sociale

Dopo avere esaminato le relazioni tra equilibrio concorrenziale ed efficienza, espresse dai due teoremi dell'economia del benessere, conviene esaminare quelle tra equilibrio concorrenziale e massimo benessere sociale. A questo fine, si terrà conto delle relazioni tra efficienza e massimo benessere sociale esaminate nel Paragrafo 8.5, secondo cui ogni allocazione che massimizza una funzione di benessere sociale è efficiente (Proposizione 8.9) e ogni allocazione efficiente massimizza almeno una funzione di benessere sociale. (Proposizione 8.10). Si tratta di esaminare se le allocazioni di massimo benessere sociale sono ottenibili con l'equilibrio concorrenziale e se vi è, e quale sia, una funzione di benessere sociale che viene massimizzata dalla allocazione ottenuta con un equilibrio concorrenziale.

**Proposizione 11.9** Con riferimento ad un'economia (priva di esternalità) $(\langle X_i, \succsim_i\rangle, \Omega, i = 1,\dots, n)$, sia $x^* = (x_i^*)_{i=1}^n$ un'allocazione che massimizza la funzione di benessere sociale $W(u_1(x_1),\dots, u_n(x_n))$ sull'insieme delle allocazioni realizzabili $C_{FD} = \{(x_i)_{i=1}^n : x_i \in X_i, \sum_{i=1}^n x_i \le \Omega\}$. Se, per ogni $i = 1,\dots, n$, il sistema di preferenza $\langle X_i, \succsim_i\rangle$, ove $X_i = \mathbb{R}_+^k$, è regolare (cioè, completo e transitivo), continuo, fortemente monotono e convesso e $x_i^* >> 0$, allora esiste un vettore $p^* \in S^{k-1}$ per cui $(x^*, p^*)$ è un equilibrio concorrenziale per l'economia $\mathcal{E} = (\langle X_i, \succsim_i\rangle, \omega_i, i = 1,\dots, n)$, ove le dotazioni $\omega_i$ sono tali che $\Sigma_{i=1}^n \omega_i = \Omega$ e $p^* \omega_i = p^* x_i^*$ per ogni $i = 1,\dots, n$ (ad esempio, se $\omega_i = x_i^*$ per ogni $i = 1,\dots, n$ ).

**Dimostrazione.** Questa proposizione è diretta conseguenza delle Proposizioni 8.9 e 11.8. □

**Proposizione 11.10** Se $(x^*, p^*)$ è un equilibrio concorrenziale con *free disposal* per l'economia (priva di esternalità) $\mathcal{E} = (\langle X_i, \succsim_i\rangle, \omega_i, i =1,\dots, n)$, allora l'allocazione $x^*$ massimizza almeno una funzione di benessere sociale. In particolare, se le preferenze dei consumatori sono rappresentabili con funzioni di utilità $u_i(x_i)$ concave e monotone per ogni $i = 1,\dots, n$, l'allocazione concorrenziale massimizza la funzione $\Sigma_{i=1}^n \frac{1}{\lambda_i} u_i(x_i)$ sull'insieme $C_{FD} = \{(x_i)_{i=1}^n : x_i \in X_i,\ \sum_{i=1}^n x_i \le \sum_{i=1}^n \omega_i\}$, ove $\lambda_i$ è l'utilità marginale indiretta della capacità di spesa del consumatore $i$-esimo, cioè $\lambda_i = \mathrm{D}_{m_i} u_i^*(p^*, p^*\omega_i)$, per ogni $i = 1,\dots, n$.

**Dimostrazione.** La prima parte della proposizione è diretta conseguenza delle Proposizioni 8.10 e 11.6. La seconda parte risulta mostrando come la massimizzazione della funzione di benessere sociale proposta conduca proprio all'allocazione di equilibrio concorrenziale. Infatti, introducendo, per il problema $\max_{x \in C_{FD}} \Sigma_{i=1}^{n} \frac{1}{\lambda_i} u_i(x_i)$ , la funzione lagrangiana

$$L(x_1,\ldots, x_n, \mu_1,\ldots, \mu_k) = \Sigma_{i=1}^{n} \frac{1}{\lambda_i} u_i(x_i) + \Sigma_{h=1}^{k} \mu_h (\Sigma_{i=1}^{n} \omega_{ih} - \Sigma_{i=1}^{n} x_{ih})$$

Risultano le condizioni del primo ordine

$$\frac{1}{\lambda_i} D_{x_{ih}} u_i(x_i) = \mu_h \quad \text{per ogni } i = 1,\ldots, n \text{ e ogni } h = 1,\ldots, k$$

$$\Sigma_{i=1}^{n} \omega_{ih} - \Sigma_{i=1}^{n} x_{ih} = 0 \quad \text{per ogni } h = 1,\ldots, k$$

La loro soluzione $(x, \mu)$ coincide con l'equilibrio concorrenziale $(x^*, p^*)$ , poiché, essendo $\lambda_i = D_{m_i} u_i^*(p^*, p^*\omega_i)$ per ogni $i = 1,\ldots, n$, esse coincidono con le condizioni del primo ordine dell'equilibrio concorrenziale. Infatti, quest'ultime, che sono composte, oltre che dalle relazioni $D_{x_{ih}} u_i(x_i) = \lambda_i p_h$ e $\Sigma_{i=1}^{n} \omega_{ih} - \Sigma_{i=1}^{n} x_{ih} = 0$ per ogni $i = 1,\ldots, n$ e $h = 1,\ldots, k$, anche dai vincoli di bilancio $p\, x_i = p\, \omega_i$ per ogni $i = 1,\ldots, n$, richiedono che sia proprio $\lambda_i = D_{m_i} u_i^*(p^*, p^*\omega_i)$ per ogni $i = 1,\ldots, n$. L'ipotesi che le funzioni di utilità siano concave, da un lato, implica che le condizioni del secondo ordine sono soddisfatte e, dall'altro lato, che le condizioni del primo ordine determinano il massimo globale di benessere sociale. □

La funzione di benessere sociale introdotta dalla proposizione precedente è una media ponderata delle utilità dei consumatori. Essendo le funzioni di utilità concave, il peso $\frac{1}{\lambda_i}$ associato al generico consumatore $i$-esimo è tanto maggiore quanto maggiore è la sua capacità di spesa.[8] In tal modo, la funzione di benessere sociale tiene conto della diversa capacità di spesa dei consumatori al fine di generare, con la sua massimizzazione, un'allocazione in cui i consumatori con capacità di spesa maggiore conseguono panieri più ricchi.

---

[8] Infatti, la concavità implica che $\frac{\partial \lambda_i}{\partial m_i} = D^2_{m_i m_i} u_i^*(p^*, p^*\omega_i) > 0$ . Questa disuguaglianza risulta da una relazione ottenuta nel corso della dimostrazione della Proposizione 3.13, cioè $d\lambda^* = -\frac{p^T (D^2u)^{-1}}{p^T (D^2u)^{-1} p} \lambda^* dp - \frac{1}{p^T (D^2u)^{-1} p} (x^{*T} dp - dm)$ , da cui $\frac{\partial \lambda^*}{\partial m} = \frac{1}{p^T (D^2u)^{-1} p}$ , che è positivo se la funzione di utilità è concava. Si noti come qui si richieda che la funzione indiretta di utilità sia convessa rispetto alla capacità di spesa e non soltanto quasi-convessa, proprietà questa garantita dalla Proposizione 3.10.

### 11.8 L'esistenza dell'equilibrio concorrenziale di produzione in presenza di *free disposal*

Come indicato nel Paragrafo 11.1, un'economia di proprietà privata di produzione è rappresentata da $\mathcal{E} = (\langle X_i, \succsim_i\rangle, Y_j, \omega_i, \theta_{ij}, i=1,\ldots, n, j = 1,\ldots, m)$. Avendo i consumatori la proprietà delle imprese compete loro anche la rispettiva quota di profitto (o valore) delle imprese, per cui il vincolo di bilancio dell'*i*-esimo consumatore, essendovi *free disposal*, è

$$B_i(p,(\pi_j)_{j=1}^m) = \{x_i \in X_i : x_i \le x_i' \text{ per qualche } x_i' \text{ tale che } px_i' = p\omega_i + \textstyle\sum_{j=1}^m \theta_{ij}\pi_j\}$$

Questo insieme è funzione non decrescente del profitto delle imprese (ossia, $\pi_j' \le \pi_j$ per $j = 1,\ldots, m$ implica $B_i(p,(\pi_j')_{j=1}^m) \subseteq B_i(p,(\pi_j)_{j=1}^m)$ ). Allora, nessun agente risulta contrario alla massimizzazione del profitto d'impresa, poiché poter scegliere in un insieme più grande non conduce mai ad una scelta meno preferita. Questo giustifica l'ipotesi che le imprese massimizzano il profitto.

La Proposizione 11.2, che vale anche per le economie di produzione (se $0\in Y_j$ per ogni $j = 1,\ldots, m$ , come si può facilmente dimostrare), implica che l'analisi dell'equilibrio concorrenziale con *free disposal* può limitarsi a considerare vettori semipositivi per i prezzi. Questa implicazione può essere ottenuta anche in base alla condizione di *free disposal* per gli insiemi di produzione. Valga la condizione di *free disposal* per almeno un'impresa, vi sia, cioè, un $j$ per cui $Y_j - \mathbb{R}^k_+ \subset Y_j$ , per cui, se è $0\in Y_j$ , allora è $-\mathbb{R}^k_+ \subset Y_j$ . Allora, la massimizzazione del profitto di questa impresa, se vi fosse qualche bene con prezzo negativo, condurrebbe ad una domanda infinita di questo bene e ad un profitto infinito, escludendo così l'esistenza di un equilibrio. (Si noti come questo ragionamento richieda che l'insieme $Y_j$ non sia limitato).

Con $p > 0$ , l'insieme di bilancio del consumatore *i*-esimo suindicato diviene

$$B_i(p,(\pi_j)_{j=1}^m) = \{x_i \in X_i :\ px_i \le p\omega_i + \textstyle\sum_{j=1}^m \theta_{ij}\pi_j\}$$

Allora, la scelta di ogni impresa risulta dalla massimizzazione del suo profitto sul suo insieme di produzione ed è rappresentata dalla funzione di offerta $s_j(p)$ . La scelta di ogni consumatore risulta dalla massimizzazione della sua utilità sul suo insieme di bilancio. La condizione di realizzabilità, in presenza di *free disposal* richiede che $\sum_{i=1}^n x_i \le \sum_{j=1}^m y_j + \sum_{i=1}^n \omega_i$ . Quindi, l'equilibrio è descritto da un'allocazione e da un vettore di prezzi, cioè, da $((x_i^*)_{i=1}^n, (y_j^*)_{j=1}^m, p^*)$ , tali che

$$y_j^* \in \{y_j \in Y_j : p^* y_j \ge p^* y_j' \text{ per ogni } y_j' \in Y_j\}, \qquad j = 1,\ldots, m$$

$$x_i^* \in \{x_i \in B_i(p^*,(p^* y_j^*)_{j=1}^m) : x_i \succsim_i x_i' \text{ per ogni } x_i' \in B_i(p^*,(p^* y_j^*)_{j=1}^m)\}, \quad i = 1,\ldots, n$$

$$\textstyle\sum_{i=1}^n x_i^* \le \sum_{j=1}^m y_j^* + \sum_{i=1}^n \omega_i$$

Se la funzione aggregata di eccesso di domanda

$$E(p) = \textstyle\sum_{i=1}^n (d_i(p) - \omega_i) - \sum_{j=1}^m s_j(p)$$

ove $p \in S^{k-1}$ e, per ogni $j = 1,\ldots, m$ e $i = 1,\ldots, n$ ,

$$s_j(p) = \{y_j \in Y_j : py_j \ge py_j' \text{ per ogni } y_j' \in Y_j\}$$

$$\pi_j(p) = \max_{y_j \in Y_j} py_j$$

$$d_i(p) = \{x_i \in B_i(p,(\pi_j(p))_{j=1}^m) : x_i \succsim_i x_i' \text{ per ogni } x_i' \in B_i(p,(\pi_j(p))_{j=1}^m)\}$$

soddisfa le condizioni della Proposizione 11.4, allora quest'ultima assicura l'esistenza dell'equilibrio.

Delle condizioni richieste dalla Proposizione 11.4 sono sicuramente soddisfatte quella che richiede la omogeneità di grado zero della funzione aggregata di eccesso di domanda e quella indicata come *legge di Walras*. Infatti, ove definite, le funzioni di offerta sono omogenee di grado zero (Proposizione 5.3), quelle di profitto sono omogenee di grado uno (Proposizione 5.3) e quelle di domanda sono, conseguentemente, omogenee di grado zero (si applica la Proposizione 3.8). Vale, poi, con le condizioni richieste da essa, la Proposizione 11.3, cioè, la *legge di Walras*. La condizione della Proposizione 11.4 più problematica, soprattutto se vi è produzione, è quella che richiede che le funzioni aggregate di eccesso di domanda siano ad un solo valore, cioè, vere e proprie funzioni (e non corrispondenze), inoltre continue. Infatti, tra le condizioni sufficienti perché la funzione di offerta sia ad un solo valore e continua vi è la stretta convessità dell'insieme di produzione (Proposizione 5.2). Ora, la condizione di stretta convessità esclude i rendimenti di scala costanti (consente solo rendimenti di scala decrescenti, ossia, se è anche $0 \in Y_j$, si ha che $\lambda y_j$ è un punto interno di $Y_j$ se $y_j \in Y_j$ e $\lambda \in (0,1)$ ).

Se si desidera dimostrare l'esistenza dell'equilibrio per economie in cui vi sono produzioni con rendimenti di scala non crescenti (cioè, anche costanti oltre che decrescenti), allora il teorema di Brouwer (impiegato dalla dimostrazione della Proposizione 11.4) non può essere utilizzato, occorre il teorema di Kakutani.

La dimostrazione dell'esistenza dell'equilibrio concorrenziale di produzione può essere fornita (come avviene nella successiva Proposizione 11.11) se la corrispondenza aggregata di eccesso di domanda $E : S^{k-1} \to Z$, ove $Z = \sum_{i=1}^{n} X_i - \sum_{j=1}^{m} Y_j - \{\Omega\}$ è un sottoinsieme compatto e convesso di $\mathbb{R}^k$, è emicontinua superiormente e tale che l'insieme $E(p)$ è non vuoto, convesso e soddisfa la legge di Walras $p\,E(p) = 0$ per ogni $p \in S^{k-1}$ (con la notazione $p\,E(p) = 0$ si indica che $p\,z = 0$ per ogni $z \in E(p)$ ).

L'insieme $Z$ è compatto se sono compatti gli insiemi $X_i$, per $i = 1,\ldots, n$, e $Y_j$, per $j = 1,\ldots, m$. (L'esistenza dell'equilibrio può essere dimostrata anche se questi insiemi non sono limitati. E' solo più complessa: il lettore interessato trova la dimostrazione in Debreu, 1959, pp.83-88. Peraltro, la limitatezza degli insiemi può essere giustificata, tenendo presente che la quantità di beni è in ogni caso limitata, assumendo che gli agenti lo sappiano e riflettano questa considerazione nei rispettivi insiemi di consumo e di produzione).

Essendo $E(p) = \sum_{i=1}^{n}(d_i(p) - \omega_i) - \sum_{j=1}^{m} s_j(p)$, la corrispondenza $E : S^{k-1} \to Z$ è emicontinua superiormente con l'insieme $E(p)$ non vuoto e convesso per ogni $p \in S^{k-1}$ se sono tali le corrispondenze $d_i : S^{k-1} \to X_i$, per ogni $i = 1,\ldots, n$, e $s : S^{k-1} \to Y$ (per la corrispondenza di offerta delle imprese ci si può riferire direttamente a quella aggregata per quanto indicato nel Paragrafo 5.7). Ora, per ogni $i = 1,\ldots, n$, la corrispondenza $d_i : S^{k-1} \to X_i$ è emicontinua superiormente con l'insieme $d_i(p)$ non vuoto e convesso per ogni $p \in S^{k-1}$ se l'insieme $X_i$ è non vuoto, compatto e convesso, $p\omega_i + \sum_{j=1}^{m} \theta_{ij}\pi_j > \min_{x_i \in X_i} px_i$ per ogni $p \in S^{k-1}$ (questa condizione è soddisfatta se $\omega_i$ è un punto interno di $X_i$ e $0 \in Y_j$ per ogni $j = 1,\ldots, m$ ) e il sistema di preferenza $\langle X_i, \succsim_i \rangle$ è regolare, continuo e debolmente convesso (come si può indurre dalle Proposizioni 3.3, 3.5 e 3.7). La corrispondenza $s : S^{k-1} \to Y$ è emicontinua superiormente con l'insieme $s(p)$ non vuoto e convesso per ogni $p \in S^{k-1}$ se l'insieme $Y$ è non vuoto, compatto e convesso (come si può indurre dalla Proposizione 5.2, tenendo conto che queste condizioni consentono la determinazione dell'offerta $s(p)$ per ogni $p \in S^{k-1}$). Infine, per ogni $i = 1,\ldots, n$, se il sistema di preferenza è monotono (per cui, se è debolmente convesso, è anche convesso), allora, per la Proposizione 3.4, si ha $pd_i(p) = p\omega_i + \sum_{j=1}^{m} \theta_{ij}\pi_j = p\omega_i + \sum_{j=1}^{m} \theta_{ij}ps_j(p)$ per ogni $p \in S^{k-1}$, da cui, sommando per $i = 1,\dots, n$, si ottiene $p\sum_{i=1}^{n} d_i(p) = p\Omega + ps(p)$, cioè, $p\,E(p) = 0$, che è la legge di Walras.

Le ipotesi prese in considerazione, sufficienti perché la corrispondenza aggregata di eccesso di domanda $E : S^{k-1} \to Z$ sia emicontinua superiormente con l'insieme $E(p)$ non vuoto, convesso e tale che $p\,E(p) = 0$ per ogni $p \in S^{k-1}$, sono, allora: [9]

*a*) per i consumatori, $X_i$ non vuoto, compatto e convesso, il sistema di preferenza $\langle X_i, \succsim_i\rangle$ regolare, continuo, convesso e monotono e $\omega_i$ punto interno di $X_i$ per ogni $i = 1,\dots, n$;

*b*) per i produttori, $Y$ non vuoto, compatto e convesso, tale che $Y \cap \mathbb{R}^k_+ = \{0\}$, con $0 \in Y_j$ per ogni $j = 1,\dots, m$.

E' possibile, ora, introdurre la Proposizione 11.11, che dimostra l'esistenza dell'equilibrio concorrenziale di produzione con *free disposal*.

**Proposizione 11.11** (*Esistenza dell'equilibrio concorrenziale di produzione con free disposal*) Esiste un $p^* \in S^{k-1}$ per cui $E(p^*) \cap (-\mathbb{R}^k_+) \neq \varnothing$ se la corrispondenza aggregata di eccesso di domanda $E : S^{k-1} \to Z$, ove $Z = \sum_{i=1}^{n} X_i - \sum_{j=1}^{m} Y_j - \{\Omega\}$ è un sottoinsieme compatto e convesso di $\mathbb{R}^k$, è emicontinua superiormente e tale che l'insieme $E(p)$ è non vuoto, convesso e soddisfa la legge di Walras $p\,E(p) = 0$ per ogni $p \in S^{k-1}$.

**Dimostrazione.** Per ogni $z \in Z$ sia $P(z) = \arg\max_{p \in S^{k-1}} pz$. Poiché l'insieme $S^{k-1}$ è non vuoto e compatto, $P(z)$ è non vuoto e convesso e la corrispondenza $P$: $Z \to S^{k-1}$ è emicontinua superiormente (sostanzialmente, per i teoremi di Weirstrass e del "massimo", indicati a proposito delle Proposizione 3.6 e 3.7 e del commento ad esse). Si consideri ora la corrispondenza $\phi$: $S^{k-1} \times Z \to Z \times S^{k-1}$ definita da $\phi(p, z) = E(p) \times P(z)$. L'insieme $S^{k-1} \times Z$ (che coincide con l'insieme $Z \times S^{k-1}$) è non vuoto, compatto e convesso poiché sono tali $Z$ e $S^{k-1}$. L'insieme $\phi(p, z)$ è non vuoto e convesso per ogni $(p, z) \in S^{k-1} \times Z$ poiché sono tali l'insieme $E(p)$ per ogni $p \in S^{k-1}$ e l'insieme $P(z)$ per ogni $z \in Z$. La corrispondenza $\phi$: $S^{k-1} \times Z \to Z \times S^{k-1}$ è emicontinua superiormente poiché sono tali le corrispondenze $E$: $S^{k-1} \to Z$ e $P$: $Z \to S^{k-1}$. Si può, allora, applicare il teorema di Kakutani, che indica l'esistenza di un punto fisso, cioè, di una coppia $(p^*, z^*)$ tale che $(p^*, z^*) \in \phi(p^*, z^*)$ e, quindi, $p^* \in P(z^*)$ e $z^* \in E(p^*)$. La prima condizione implica $p\,z^* \leq p^*\,z^*$ per ogni $p \in S^{k-1}$. La seconda condizione implica, per la legge di Walras, $p^*\,z^* = 0$. Si ha, allora, $p\,z^* \leq 0$ per ogni $p \in S^{k-1}$. Prendendo in considerazione i vertici del simplesso, cioè, i punti con $p_h = 1$ e $p_r = 0$ per ogni $r = 1,\dots, k$ con $r \neq h$, e questo per ogni $h = 1,\dots, k$, si trova che $z_h^* \leq 0$ per ogni $h = 1,\dots, k$. E', allora, $z^* \in -\mathbb{R}^k_+$ ed, essendo $z^* \in E(p^*)$, risulta che esiste un $p^* \in S^{k-1}$ per cui $E(p^*) \cap (-\mathbb{R}^k_+) \neq \varnothing$. □

Il calcolo dell'equilibrio concorrenziale di produzione può essere eseguito determinando, dapprima, le scelte delle imprese (come indicato nel Paragrafo 5.4) e quelle

[9] Debreu (1959, pp.82-88) dimostra l'esistenza dell'equilibrio assumendo che gli insiemi di consumo e di produzione non siano limitati. Le ipotesi sono, in tal caso, per i consumatori, $X_i$ non vuoto, chiuso, limitato inferiormente e convesso, $\langle X_i, \succsim_i\rangle$ regolare, continuo, convesso e senza sazietà globale, e $\omega_i$ punto interno di $X_i$ per ogni $i = 1,\dots, n$; per i produttori, $Y$ non vuoto, chiuso e convesso, tale che $Y \cap (-Y) = \{0\}$ e $-\mathbb{R}^k_+ \subset Y$, con $0 \in Y_j$ per ogni $j = 1,\dots, m$.

dei consumatori (come indicato nel Paragrafo 3.8, con $m_i = p\omega_i + \sum_{j=1}^{m} \theta_{ij}\pi_j$, ove $\pi_j = p$ $s_j(p) = \max_{y_j \in Y_j} py_j$ per ogni $j = 1,\ldots, m$) e imponendo, poi, la condizione di realizzabilità $\sum_{i=1}^{n} x_i^* \leq \sum_{j=1}^{m} y_j^* + \sum_{i=1}^{n} \omega_i$ .

### 11.9 Una rappresentazione grafica dell'equilibrio di produzione

Un'economia di produzione composta da un solo consumatore, da un solo produttore e da due beni può essere rappresentata graficamente. (Un'economia con un solo consumatore richiama il caso di *Robinson Crusoe* e viene spesso indicata con questo nome). Si tratta, come già per l'economia di puro scambio con due consumatori e due beni (raffigurata con il diagramma di Edgeworth-Pareto), di un'economia poco rilevante per la teoria dell'equilibrio generale concorrenziale. Infatti, oltre alle ragioni indicate nel Paragrafo 11.5, vi è ora un solo individuo, che è, da un lato, consumatore e, dall'altro lato, produttore, e si assume che egli venda, come consumatore, un bene alla sua impresa e che compri, come consumatore, il bene prodotto dalla sua impresa. Il tutto, comportandosi da *price-taker*, in equilibrio concorrenziale. Tuttavia, anche questa volta, il diagramma che verrà presentato è uno strumento utilissimo per la comprensione di molti aspetti dell'equilibrio generale con produzione.

L'economia in esame è, allora, $\mathcal{E} = (\langle X, \succsim \rangle, Y, \omega)$ . Si noti come sia necessariamente $\theta = 1$ . Si assuma $X = \mathbb{R}_{+}^{2}$ , $\omega \in \mathbb{R}_{+}^{2}$ e $Y \subset \mathbb{R}^2$ non vuoto, chiuso e, inoltre, con $0 \in Y$ (possibilità di inazione), $Y - \mathbb{R}_{+}^{2} \subset Y$ (*free disposal*) e $Y \cap (-Y) = \{0\}$ (irreversibilità). (Si veda, per queste ipotesi, il Paragrafo 5.1. Si noti come la presenza di *free disposal* e la condizione di irreversibilità implichino l'assenza in $Y$ di vettori semipositivi).

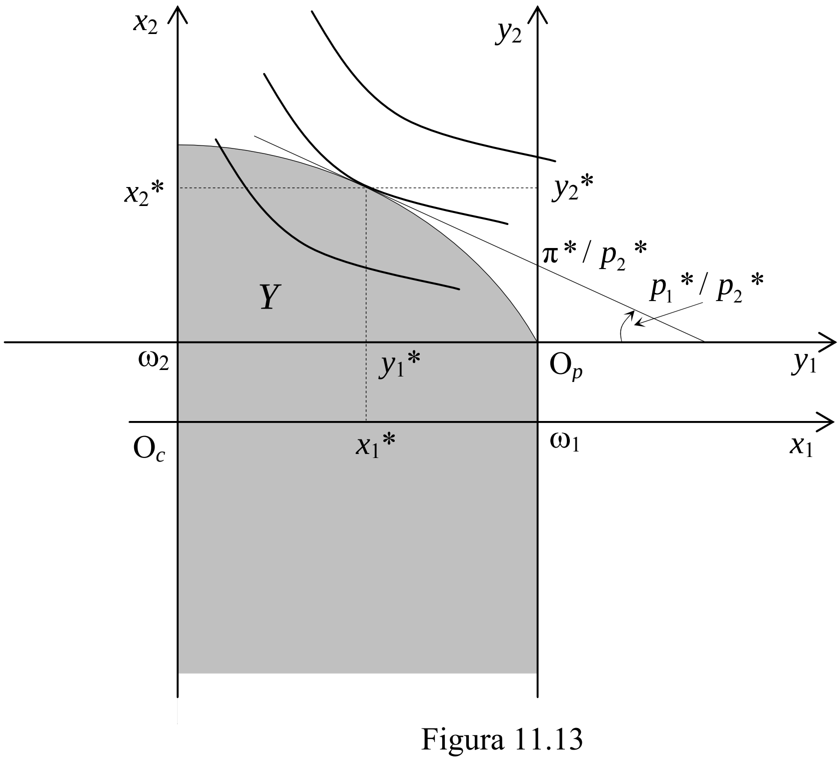


Figura 11.13

La Figura 11.13 rappresenta il diagramma proposto. Vi sono due sistemi di assi cartesiani, uno, per il consumatore, di origine $O_c$ e l'altro, per il produttore, di origine $O_p$. Questo punto rappresenta, nel sistema di assi del consumatore, la dotazione $\omega$. Relativamente alle rispettive origini, l'asse delle ascisse indica quantità del primo bene, sia per il consumatore (con la variabile $x_1$) sia per il produttore (con la variabile $y_1$, che è negativa se il primo bene è un input, come in figura). L'asse delle ordinate indica, analogamente, quantità del secondo bene. La figura riporta tutti i dati dell'economia: una mappa di curve di indifferenza indica, relativamente agli assi di origine $O_c$, le preferenze del consumatore (nella figura, queste sono regolari, continue e fortemente monotone) e la sua dotazione (nella figura, la dotazione è composta da una quantità positiva di entrambi i beni) e, relativamente agli assi di origine $O_p$, l'insieme di produzione (nella figura, questo è strettamente convesso nella parte rilevante per la scelta di produzione, per cui vi sono rendimenti di scala decrescenti).

L'impresa sceglie la produzione in modo da massimizzare il profitto (come nella Figura 5.14) e il profitto $\pi$ realizzato da essa è di competenza del consumatore. Allora, per ogni rapporto di scambio $p_1/p_2$, la retta di bilancio del consumatore, di equazione $x_1 \dfrac{p_1}{p_2} + x_2 = \omega_1 \dfrac{p_1}{p_2} + \omega_2 + \dfrac{\pi}{p_2}$, passa per il punto $(\omega_1, \omega_2 + \dfrac{\pi}{p_2})$ e ha pendenza $-p_1/p_2$. Si ha equilibrio se il rapporto di scambio $p_1{*}/p_2{*}$ determina una scelta del produttore $y^* \in \arg\max_{y \in Y} p^* y$ (cui corrisponde il profitto $\pi^* = p^*y^*$) e una scelta del consumatore $x^* \in \arg \max_{x \in B(p^*, y^*)} u(x)$ che soddisfano la condizione di realizzabilità $x^* \leq y^* + \omega$ (nel caso in figura, con preferenze fortemente monotone per cui non vi sono beni liberi, questa condizione è equivalente a $x^* = y^* + \omega$). Per come è costruita la figura, le allocazioni $(x, y)$ che soddisfano la condizione di eseguibilità $x = y + \omega$ sono rappresentate da uno stesso punto (ovviamente, $x$ e $\omega$ misurati relativamente a $O_c$ e $y$ relativamente a $O_p$). Nella Figura 11.13 è rappresentato anche l'equilibrio concorrenziale dell'economia raffigurata.

Si noti come l'equilibrio concorrenziale determini, nella Figura 11.13, la stessa allocazione cui l'individuo perviene se, anziché dividersi in consumatore e produttore, sceglie direttamente l'allocazione. Questa scelta è soluzione del problema $\max_{x,y} u(x)$ con i vincoli $x \in X$, $y \in Y$ e $x \leq y + \omega$ ed è, quindi, l'allocazione efficiente.

Il lettore può provare a rappresentare il caso in cui l'insieme di produzione presenta rendimenti di scala costanti (come nella Figura 5.1).

Se i rendimenti di scala sono prima crescenti e poi decrescenti (come nella Figura 5.8) può risultare, come nella Figura 11.14, che non esiste l'equilibrio concorrenziale, pur esistendo un'allocazione efficiente, che è la soluzione del problema $\max_{x,y} u(x)$ con i vincoli $x \in X$, $y \in Y$ e $x \leq y + \omega$. Nella Figura 11.14, l'allocazione efficiente è indicata dal consumo $x^*$ e dalla produzione $y^*$ (rappresentati da uno stesso punto poiché questa allocazione è realizzabile). Però, in corrispondenza al rapporto di scambio implicito in questa allocazione (pari alla comune pendenza della frontiera dell'insieme di produzione in $y^*$ e della curva di indifferenza in $x^*$) la scelta dell'impresa è l'inazione, cioè, $\hat{y} = 0$ (si noti come, con questo rapporto di scambio, sia negativo il profitto in $y^*$) e quella del consumatore è indicata da $\hat{x}$, senza che questa allocazione risulti realizzabile (infatti, in figura, i punti $\hat{x}$ e $\hat{y}$ non coincidono). L'impresa sceglie di produrre solo se il rapporto di scambio $p_1/p_2$ è sufficientemente basso, almeno pari alla pendenza della linea (tracciata in figura) che determina la produzione $\tilde{y}$. Però, con questo rapporto di scambio, la scelta di consumo è $\tilde{x}$ e anche l'allocazione $\tilde{x}, \tilde{y}$ risulta irrealizzabile. Con rapporti di scambio inferiori, la scelta dell'impresa si sposta verso sinistra, ove però i saggi marginali di sostituzione del consumatore sono più elevati (a sinistra di $\tilde{y}$ le curve di indifferenza intersecano la frontiera dell'insieme di produzione, non sono mai tangenti a questa), per cui non può determinarsi un'allocazione concorrenziale realizzabile. Non vi è, quindi, nel caso rappresentato dalla Figura 11.14, alcun equilibrio concorrenziale.

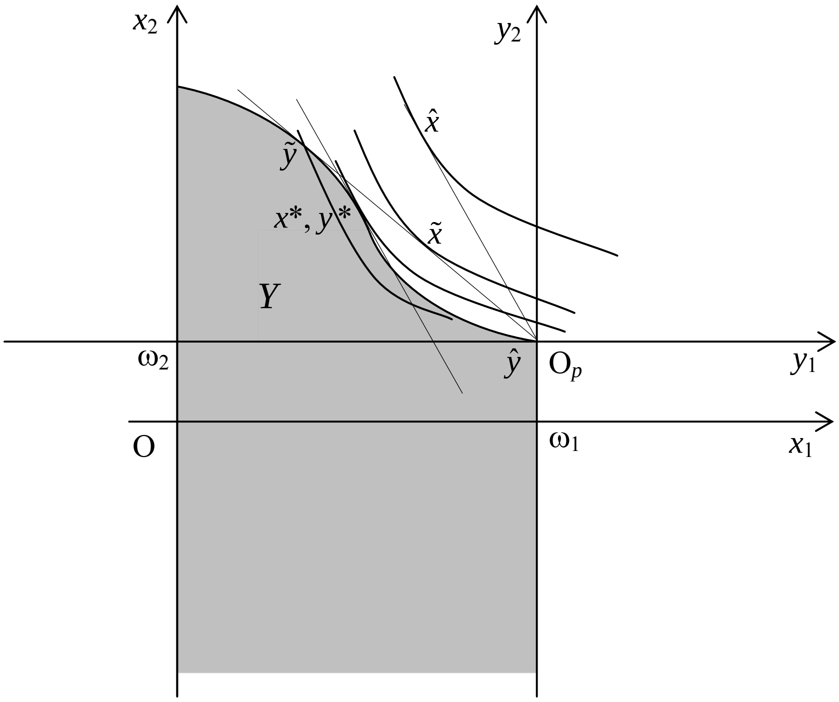


Figura 11.14

### 11.10 Equilibrio concorrenziale di produzione ed efficienza

Tutte le considerazioni esposte nei Paragrafi 11.6 e 11.7 in relazione all'equilibrio di puro scambio possono essere estese all'equilibrio di produzione. Occorre, naturalmente, tenere conto degli insiemi di produzione. Le proposizioni introdotte nei Paragrafi 11.6 e 11.7 per un'economia di puro scambio divengono, per un'economia di produzione, le seguenti.

**Proposizione 11.12** (*Primo teorema dell'economia del benessere*) Se $(x^*, y^*, p^*)$, ove $x^* = (x_i^*)_{i=1}^n$ e $y^* = (y_j^*)_{j=1}^m$, è un equilibrio concorrenziale con *free disposal* per l'economia (priva di esternalità) $\mathcal{E} = (\langle X_i, \succsim_i \rangle, Y_j, \omega_i, \theta_{ij}, i = 1,\ldots, n, j = 1,\ldots, m)$, allora l'allocazione $(x^*, y^*)$ è debolmente efficiente.

**Dimostrazione.** Si consideri la proposizione equivalente secondo cui se un'allocazione non è debolmente efficiente, allora non può appartenere ad un equilibrio concorrenziale. Se $(\tilde{x}, \tilde{y})$ non è un'allocazione debolmente efficiente, allora esiste un'altra allocazione $(x', y')$ realizzabile, cioè con $\Sigma_{i=1}^n x_i' \leq \Sigma_{i=1}^n \omega_i + \Sigma_{j=1}^m y_j'$, tale che $x_i' \succ_i \tilde{x}_i$ per ogni $i = 1,\ldots, n$. Ne consegue che per ogni $p \in S^{k-1}$ si ha $\Sigma_{i=1}^n px_i' \leq$ $\Sigma_{i=1}^n p\omega_i + \Sigma_{j=1}^m py_j'$ e, a maggior ragione, $\Sigma_{i=1}^n px_i' \leq \Sigma_{i=1}^n p\omega_i + \Sigma_{j=1}^m py_j^*$, ove $py_j^* = \max_{y_j \in Y_j} py_j$. Quindi, vi è almeno un $i = 1,\ldots, n$ per cui $px_i' \leq p\omega_i + \Sigma_{j=1}^m \theta_{ij} py_j^*$. Ma se vi è, per ogni $p \in S^{k-1}$, qualche $i = 1,\dots, n$ per cui $px_i' \le p\omega_i + \Sigma_{j=1}^m \theta_{ij} \max_{y_j \in Y_j} py_j$ e $x_i' \succ_i \tilde{x}_i$, allora $\tilde{x}_i \notin d_i(p)$ ed è, quindi, escluso che l'allocazione $(\tilde{x}, \tilde{y})$ possa appartenere ad un equilibrio concorrenziale. □

**Proposizione 11.13** Se $(x^*, y^*, p^*)$ è un equilibrio concorrenziale (con *free disposal*) per l'economia (priva di esternalità) $\mathcal{E} = (\langle X_i, \succsim_i\rangle, Y_j, \omega_i, \theta_{ij}, i =1,\dots, n, j = 1,\dots, m)$, con preferenze di tutti i consumatori regolari (cioè, complete e transitive) e localmente non saziate, allora l'allocazione $(x^*, y^*)$ è fortemente efficiente.

**Dimostrazione.** Si assuma, per assurdo, che, pur essendo $(x^*, y^*, p^*)$ un equilibrio concorrenziale, l'allocazione $(x^*, y^*)$ non sia fortemente efficiente. Allora esiste un'allocazione $(x, y)$ realizzabile, cioè con $\Sigma_{i=1}^n x_i \le \Sigma_{i=1}^n \omega_i + \Sigma_{j=1}^m y_j$, tale che $x_i \succsim_i x_i^*$ per ogni $i = 1,\dots, n$ e $x_s \succ_s x_s^*$ per almeno un $s = 1,\dots, n$. Ne consegue, essendo $x_s^* \in d_s(p^*)$, che deve essere per questo consumatore $p^* x_s > p^* \omega_s + \Sigma_{j=1}^m \theta_{sj} p^* y_j^*$, mentre per tutti gli altri consumatori deve essere $p^* x_i \ge p^* \omega_i + \Sigma_{j=1}^m \theta_{ij} p^* y_j^*$ (altrimenti, se cioè fosse $p^* x_i < p^* \omega_i + \Sigma_{j=1}^m \theta_{ij} p^* y_j^*$, essendo le preferenze localmente non saziate, esisterebbe nell'intorno di $x_i$ un $x_i' \succ_i x_i \succsim_i x_i^*$ tale che $p^* x_i' < p^* \omega_i + \Sigma_{j=1}^m \theta_{ij} p^* y_j^*$, che è incompatibile con l'assunto $x_i^* \in d_i(p^*)$ ). Risulta, quindi, che $\Sigma_{i=1}^n p^* x_i > \Sigma_{i=1}^n p^* \omega_i + \Sigma_{j=1}^m p^* y_j^*$, ossia $\Sigma_{i=1}^n p^* \omega_i + \Sigma_{j=1}^m p^* y_j^* < \Sigma_{i=1}^n p^* x_i \le \Sigma_{i=1}^n p^* \omega_i + \Sigma_{j=1}^m p^* y_j$, in contrasto con la condizione $\Sigma_{j=1}^m p^* y_j^* \ge \Sigma_{j=1}^m p^* y_j$ richiesta dalla massimizzazione del profitto delle imprese nell'equilibrio concorrenziale. □

**Proposizione 11.14** (*Secondo teorema dell'economia del benessere*) Sia $(x^*, y^*)$ un'allocazione efficiente per l'economia (priva di esternalità) $\mathcal{E} = (\langle X_i, \succsim_i\rangle, Y_j, \Omega, i = 1,\dots, n, j = 1,\dots, m)$. Se l'insieme aggregato di produzione $Y = \Sigma_{j=1}^m Y_j$ è convesso e, per ogni $i = 1,\dots, n$, l'insieme di consumo $X_i$ è convesso e limitato inferiormente, il sistema di preferenza $\langle X_i, \succsim_i\rangle$ è regolare (cioè, completo e transitivo), continuo, fortemente monotono[10] e convesso, e $x_i^*$ è un punto interno di $X_i$, allora esiste un vettore $p^* \in S^{k-1}$ per cui $(x^*, y^*, p^*)$ è un equilibrio concorrenziale per l'economia $\mathcal{E} = (\langle X_i, \succsim_i\rangle, Y_j, \omega_i, \theta_{ij}, i = 1,\dots, n, j = 1,\dots, m)$, ove le dotazioni $\omega_i$ e $\theta_{ij}$ sono tali che $\Sigma_{i=1}^n \omega_i = \Omega$ e $p^*(\omega_i + \Sigma_{j=1}^m \theta_{ij} y_j^*) = p^* x_i^*$ per ogni $i = 1,\dots, n$.

**Dimostrazione.** La dimostrazione è analoga a quella della Proposizione 11.8, di cui ne verrà seguito il procedimento per quanto possibile.

*a*) Si considerino, per ogni consumatore, gli insiemi dei panieri di beni preferiti a $x_i^*$, cioè $P_i(x_i^*) = \{x_i \in X_i: x_i \succ_i x_i^*\}$, e si consideri l'insieme somma $P(x^*) = \Sigma_{i=1}^n P_i(x_i^*) = \{X \in \Sigma_{i=1}^n X_i : \Sigma_{i=1}^n x_i = X$ e $x_i \succ_i x_i^*$ per ogni $i = 1,\dots, n\}$. Tutti questi insiemi sono convessi, poiché le preferenze dei consumatori sono convesse e la somma di insiemi convessi è un insieme convesso.

*b*) Essendo l'allocazione $(x^*, y^*)$ efficiente, allora non solo si ha che $X^* \notin P(x^*)$, ove $X^* = \Sigma_{i=1}^n x_i^*$, ma risulta anche che sono disgiunti gli insiemi $P(x^*)$ e $G = Y + \{\Omega\}$.

[10] L'ipotesi che richiede preferenze fortemente monotone può essere sostituita dalla più debole ipotesi che le preferenze siano localmente non saziate. In tale caso, la dimostrazione va leggermente modificata.

Quindi, si può applicare il teorema dell'iperpiano di separazione,[11] secondo cui esistono un vettore $a \neq 0$ e uno scalare $r$ tali che $a\,X \geq r \geq a\,g$ per ogni $X \in P(x^*)$ e ogni $g \in G$.

*c*) Essendo, per ogni $i = 1,\ldots, n$, $x_i^*$ punto interno di $X_i$ e le preferenze continue e monotone, vi è un $x_i \succ_i x_i^*$ in ogni palla con centro $x_i^*$. Perciò, per ciascuno di questi $(x_i)_{i=1}^{n}$, essendo $\Sigma_{i=1}^{n} x_i \in P(x^*)$, è $a\,\Sigma_{i=1}^{n} x_i \geq r$. Considerando palle con raggio sempre più piccolo, tendente a zero, si ricava, per continuità, che $a\,\Sigma_{i=1}^{n} x_i^* \geq r$. D'altra parte, essendo le preferenze fortemente monotone, l'allocazione efficiente $(x^*, y^*)$ soddisfa la condizione $\Sigma_{i=1}^{n} x_i^* = \Omega + \Sigma_{j=1}^{m} y_j^*$. Allora, essendo $\Omega + \Sigma_{j=1}^{m} y_j^* \in G$, deve essere $r \geq a\,(\Omega + \Sigma_{j=1}^{m} y_j^*)$ $= a\,\Sigma_{i=1}^{n} x_i^*$. Ne consegue che $a\,X^* = a\,\Sigma_{i=1}^{n} x_i^* = r$.

*d*) Si consideri l'allocazione $(x_i^* + \frac{1}{n} e_h)_{i=1}^{n}$, ove $e_h$ è il vettore con elementi tutti uguali a zero tranne l'elemento *h*-esimo che è pari a 1. Poiché le preferenze di tutti i consumatori sono fortemente monotone, allora si ha $(x_i^* + \frac{1}{n} e_h) \succ_i x_i^*$ per ogni $i = 1,\ldots, n$ e, quindi, essendo $(X^* + e_h) = \Sigma_{i=1}^{n} (x_i^* + \frac{1}{n} e_h)$, si ha $(X^* + e_h) \in P(x^*)$ per ogni $h = 1,\ldots, k$. Risulta, allora, tenendo conto che $a\,X^* = r$ e applicando la disuguaglianza del teorema dell'iperpiano di separazione, che $a(X^* + e_h) \geq r = a\,X^*$, cioè, $a_h \geq 0$ per ogni $h = 1,\ldots, k$. Si definisca, a questo punto, $p^* = a\,\frac{1}{\Sigma_{h=1}^{k} a_h}$. Si ha, allora, che $p^* \in S^{k-1}$ e $p^*\,X \geq r\,\frac{1}{\Sigma_{h=1}^{k} a_h}$ $\geq p^*\,g$ per ogni $X \in P(x^*)$ e ogni $g \in G$, con $r\,\frac{1}{\Sigma_{h=1}^{k} a_h} = p^*\,X^*$.

*e*) Le relazioni $p^*\,X^* \geq p^*\,g$ per ogni $g \in G$, ove $G = Y + \{\Omega\}$, e $X^* = \Sigma_{i=1}^{n} x_i^* =$ $\Omega + \Sigma_{j=1}^{m} y_j^*$ implicano che $p^* \Sigma_{j=1}^{m} y_j^* \geq p^* \Sigma_{j=1}^{m} y_j$ per ogni $\Sigma_{j=1}^{m} y_j \in Y$. Questo significa

[11] Esistono diversi enunciati del teorema dell'iperpiano di separazione. L'enunciato rilevante per la proposizione in esame asserisce che, se $P$, $G \subset \mathbb{R}^k$ sono due insiemi convessi disgiunti, allora esiste un vettore $a \neq 0$ tale che $a\,x \geq a\,g$ per ogni coppia $x$, $g$ con $x \in P$ e $g \in G$. Nella Figura 11.15 è raffigurato quanto appena enunciato, per il caso in cui $P$ è un insieme convesso aperto e $G$ è un insieme chiuso.

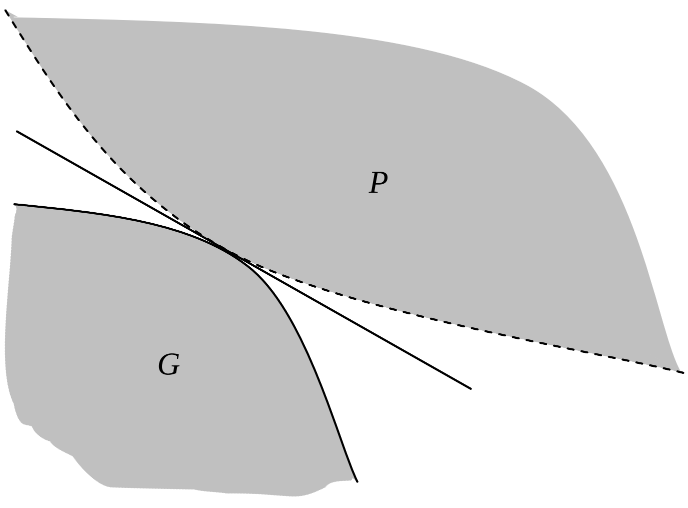


Figura 11.15

che $p^*\Sigma_{j=1}^m y_j^* = \max_{\Sigma_{j=1}^m y_j \in Y} p^*\Sigma_{j=1}^m y_j$, cioè, tenendo conto della Proposizione 5.15, che $p^* y_j^* = \max_{y_j \in Y_j} p^* y_j$, cioè che $y_j^* \in s_j(p^*)$ per ogni $j = 1,\dots, m$.

*f*) Si dimostra, ora, per ogni $i = 1,\dots, n$, che, se $x_i \succ_i x_i^*$, allora $p^* x_i \geq p^* x_i^*$. Se $x_i \succ_i x_i^*$, essendo le preferenze convesse, si ha che $x_i' \succ_i x_i^*$ per ogni $x_i' = \lambda\, x_i + (1-\lambda)\, x_i^*$ con $\lambda \in (0, 1]$. Si prenda un $x_i'$ sufficientemente vicino a $x_i^*$ perché risulti un punto interno di $X_i$ (per ipotesi, $x_i^*$ è punto interno di $X_i$). Allora, essendo le preferenze continue, esiste nell'intorno di $x_i'$ in $X_i$ un $x_i'' << x_i'$ tale che $x_i'' \succ_i x_i^*$. Si prenda in considerazione l'allocazione di consumo $x''$, ove $x_i''$ è già stato introdotto e $x_b'' = x_b^* + \frac{1}{n-1}(x_i' - x_i'')$ per ogni $b \neq i$ e $b = 1,\dots, n$. Essendo le preferenze monotone, si ha $x_i'' \succ_i x_i^*$ per ogni $i = 1,\dots, n$. Allora, si ha $X'' = \Sigma_{i=1}^n x_i'' \in P(x^*)$ e, quindi, per il teorema dell'iperpiano di separazione, $p^* X'' \geq r = p^*X^*$, cioè $p^* \Sigma_{i=1}^n x_i'' \geq p^* \Sigma_{i=1}^n x_i^*$. Tenendo conto della definizione dell'allocazione $x''$, si ottiene, perciò,

$$p^* x_i'' + p^* \Sigma_{b=1, b\neq i}^n \left( x_b^* + \frac{1}{n-1}(x_i' - x_i'')\right) \geq p^* \Sigma_{b=1}^n x_b^*$$

da cui risulta che $p^* x_i' \geq p^* x_i^*$. Allora, tenendo conto che $x_i' = \lambda\, x_i + (1-\lambda)\, x_i^*$, si ha $\lambda\, p^* x_i \geq \lambda\, p^* x_i^*$, cioè, essendo $\lambda \in (0, 1]$, $p^* x_i \geq p^* x_i^*$.

*g*) Si può rafforzare la relazione precedente dimostrando, per ogni $i = 1,\dots, n$, che, se $x_i \succ_i x_i^*$, allora non è soltanto $p^* x_i \geq p^* x_i^*$ ma $p^* x_i > p^* x_i^*$. Infatti, come già indicato, se $x_i \succ_i x_i^*$, essendo le preferenze convesse e continue e $x_i^*$ punto interno di $X_i$, esiste un $x_i'' << x_i'$, ove $x_i' = \lambda\, x_i + (1-\lambda)\, x_i^*$ con $\lambda \in (0, 1]$, tale che $x_i'' \succ_i x_i^*$. Allora, applicando la relazione individuata nel passo precedente, si ha $p^* x_i'' \geq p^* x_i^*$ e, quindi, $p^* x_i' > p^* x_i'' \geq p^* x_i^*$. Essendo $x_i' = \lambda\, x_i + (1-\lambda)\, x_i^*$ con $\lambda \in (0, 1]$, la disuguaglianza $p^* x_i' > p^* x_i^*$ è equivalente alla disuguaglianza $p^* x_i > p^* x_i^*$.

*h*) Dai passi precedenti risulta, per ogni $i = 1,\dots, n$, che, se $x_i \succ_i x_i^*$, allora $p^* x_i > p^* x_i^*$. Ciò implica che, se $p^* x_i \leq p^* x_i^*$, allora $x_i \precsim_i x_i^*$ e, quindi, che $x_i^* \succsim_i x_i$ per ogni $x_i \in \{x_i \in X_i\colon p^* x_i \leq p^* x_i^*\}$. Ne consegue, poiché per la definizione delle dotazioni $\omega_i$ e $\theta_{ij}$ si ha $p^* x_i^* = p^*(\omega_i + \Sigma_{j=1}^m \theta_{ij} y_j^*)$, che $x_i^* \in d_i(p^*, p^*(\omega_i + \Sigma_{j=1}^m \theta_{ij} y_j^*))$ per ogni $i = 1,\dots, n$.

*i*) I risultati ottenuti ai passi *e*) e *h*), cioè che $y_j^* \in s_j(p^*)$ per ogni $j = 1,\dots, m$ e $x_i^* \in d_i(p^*, p^*(\omega_i + \Sigma_{j=1}^m \theta_{ij} y_j^*))$ per ogni $i = 1,\dots, n$, dimostrano, tenendo conto che l'allocazione efficiente soddisfa la condizione di realizzabilità, che $(x^*, y^*, p^*)$ è un equilibrio concorrenziale. (Si noti, infine, come questo risultato e l'ipotesi che le preferenze siano fortemente monotone implichino anche che $p^* >> 0$). □

Le proposizioni seguenti riguardano le relazioni tra le allocazioni di massimo benessere sociale e quelle di equilibrio concorrenziale con produzione.

**Proposizione 11.15** Con riferimento ad un'economia (priva di esternalità) $(\langle X_i, \succsim_i\rangle, Y_j, \Omega, i = 1,\dots, n, j = 1,\dots, m)$, sia $(x^*, y^*)$, ove $x^* = (x_i^*)_{i=1}^n$ e $y^* = (y_j^*)_{j=1}^m$, un'allocazione che massimizza la funzione di benessere sociale $W(u_1(x_1),\dots, u_n(x_n))$ sull'insieme delle allocazioni realizzabili $C_{FD} = \{((x_i)_{i=1}^n, (y_j)_{i=1}^m) : x_i \in X_i, y_j \in Y_j, \sum_{i=1}^n x_i \leq \sum_{j=1}^m y_j + \Omega\}$. Se l'insieme aggregato di produzione $Y = \Sigma_{j=1}^m Y_j$ è convesso e, per ogni $i = 1,\dots, n$, l'insieme di consumo $X_i$ è convesso e limitato inferiormente, il sistema di preferenza $\langle X_i, \succsim_i\rangle$ è regolare (cioè, completo e transitivo), continuo, fortemente monotono e convesso e $x_i^*$ è un punto interno di $X_i$, allora esiste un vettore $p^* \in S^{k-1}$ per cui $(x^*, y^*, p^*)$ è un equilibrio concorrenziale con *free disposal* per l'economia $\mathcal{E} = (\langle X_i, \succsim_i \rangle, Y_j, \omega_i, \theta_{ij}, i = 1,\ldots, n, j = 1,\ldots, m)$, ove le dotazioni $\omega_i$ e $\theta_{ij}$ sono tali che $\Sigma_{i=1}^{n} \omega_i = \Omega$ e $p^*(\omega_i + \Sigma_{j=1}^{m} \theta_{ij} y_j^*) = p^* x_i^*$ per ogni $i = 1,\ldots, n$.

**Dimostrazione.** Questa proposizione è diretta conseguenza delle Proposizioni 8.9 e 11.14. □

**Proposizione 11.16** Se $(x^*, y^*, p^*)$ è un equilibrio concorrenziale con *free disposal* per l'economia (priva di esternalità) $\mathcal{E} = (\langle X_i, \succsim_i \rangle, Y_j, \omega_i, \theta_{ij}, i = 1,\ldots, n, j = 1,\ldots, m)$, allora l'allocazione $(x^*, y^*)$ massimizza almeno una funzione di benessere sociale. In particolare, se le preferenze dei consumatori sono rappresentabili con funzioni di utilità concave e monotone e l'insieme aggregato di produzione è convesso, questa allocazione massimizza la funzione $\Sigma_{i=1}^{n} \dfrac{1}{\lambda_i} u_i(x_i)$ sull'insieme

$$C_{FD} = \{((x_i)_{i=1}^{n}, (y_j)_{i=1}^{m}) : x_i \in X_i,\ \ y_j \in Y_j,\ \Sigma_{i=1}^{n} x_i \leq \Sigma_{j=1}^{m} y_j + \Omega\},$$

ove $\lambda_i$ è l'utilità marginale indiretta della capacità di spesa del consumatore $i$-esimo, cioè $\lambda_i = \mathrm{D}_{m_i} u_i^*(p^*, p^*\omega_i + \Sigma_{j=1}^{m} \theta_{ij} p^* y_j^*)$, per ogni $i = 1,\ldots, n$.

**Dimostrazione.** La dimostrazione è del tutto analoga a quella della Proposizione 11.10. La prima parte della proposizione è diretta conseguenza delle Proposizioni 8.10 e 11.12. La seconda parte risulta mostrando come la massimizzazione della funzione di benessere sociale proposta conduca proprio all'allocazione di equilibrio concorrenziale. Infatti, introducendo, per il problema $\max\limits_{(x,y)\in C_{FD}} \Sigma_{i=1}^{n} \dfrac{1}{\lambda_i} u_i(x_i)$, la funzione lagrangiana

$\mathrm{L}(x_1,\ldots, x_n, y_1,\ldots, y_m, \mu_1,\ldots, \mu_k, \nu_1,\ldots, \nu_m) =$

$$\Sigma_{i=1}^{n} \frac{1}{\lambda_i} u_i(x_i) + \Sigma_{h=1}^{k} \mu_h (\Sigma_{i=1}^{n} \omega_{ih} + \Sigma_{j=1}^{m} y_{jh} - \Sigma_{i=1}^{n} x_{ih}) - \Sigma_{j=1}^{m} \nu_j F_j(y_j)$$

Risultano le condizioni del primo ordine

$$\frac{1}{\lambda_i} \mathrm{D}_{x_{ih}} u_i(x_i) = \mu_h \quad \text{per ogni } i = 1,\ldots, n \text{ e ogni } h = 1,\ldots, k$$

$$\mu_h = \nu_j \mathrm{D}_{y_{jh}} F_j(y_j) \quad \text{per ogni } j = 1,\ldots, m \text{ e ogni } h = 1,\ldots, k$$

$$\Sigma_{i=1}^{n} \omega_{ih} + \Sigma_{j=1}^{m} y_{jh} - \Sigma_{i=1}^{n} x_{ih} = 0 \quad \text{per ogni } h = 1,\ldots, k$$

$$F_j(y_j) = 0 \quad \text{per ogni } j = 1,\ldots, m$$

La loro soluzione $(x, y, \mu, \nu)$ è coerente con l'equilibrio concorrenziale $(x^*, y^*, p^*)$, poiché, essendo $\lambda_i = \mathrm{D}_{m_i} u_i^*(p^*, p^*\omega_i + \Sigma_{j=1}^{m} \theta_{ij} p^* y_j^*)$ per ogni $i = 1,\ldots, n$, esse coincidono con le condizioni del primo ordine dell'equilibrio concorrenziale. Infatti, quest'ultime, che sono composte, oltre che dalle relazioni $\mathrm{D}_{x_{ih}} u_i(x_i) = \lambda_i p_h$, $p_h = \nu_j \mathrm{D}_{y_{jh}} F_j(y_j)$ e $\Sigma_{i=1}^{n} \omega_{ih} + \Sigma_{j=1}^{m} y_{jh} - \Sigma_{i=1}^{n} x_{ih} = 0$ per ogni $i = 1,\ldots, n$, $j = 1,\ldots, m$ e $h = 1,\ldots, k$, anche dai vincoli di bilancio $p\, x_i = p\, \omega_i + \Sigma_{j=1}^{m} \theta_{ij} p y_j$ per ogni $i = 1,\ldots, n$, richiedono che sia proprio $\lambda_i = \mathrm{D}_{m_i} u_i^*(p^*, p^*\omega_i + \Sigma_{j=1}^{m} \theta_{ij} p^* y_j^*)$ per ogni $i = 1,\ldots, n$. L'ipotesi che le funzioni di utilità siano concave e l'insieme aggregato di produzione convesso, da un lato, implica che le condizioni del secondo ordine sono soddisfatte e, dall'altro lato, che le condizioni del primo ordine determinano il massimo globale di benessere sociale. □

### 11.11 L'equilibrio di produzione con libertà di entrata e il teorema di non sostituzione

Lo scopo principale dell'analisi di questo paragrafo è la determinazione di condizioni che rendono i prezzi indipendenti dalle preferenze e dalle dotazioni dei consumatori, ossia dipendenti soltanto dagli insiemi di produzione. In questo modo sarà possibile stabilire condizioni che rendono, da un lato, accettabile la teoria classica dei prezzi (secondo cui i prezzi non sono solo uguali ai costi di produzione, ma sono determinati unicamente da questi, che sono a loro volta determinati unicamente dalla tecnologia) e, dall'altro lato, proponibile il modello input-output proposto da Leontief, che usa coefficienti di produzione costanti (come indicato nella nota 15 del Capitolo 5). Questo scopo può essere raggiunto assumendo, insieme ad altre ipotesi, che gli insiemi di produzione di industria presentino rendimenti costanti di scala, proprietà questa che è soddisfatta se vi è libertà di entrata. Infatti, nel § 5.8 (con la Definizione 5.6) è stato introdotto l'*insieme di produzione di industria con libertà di entrata* e si è dimostrato (con la Proposizione 5.16) che esso presenta rendimenti costanti di scala.

Ad esempio, in un'economia con un'industria che ha un solo input ed un solo output e un insieme di produzione del tipo rappresentato nella Figura 5.1, l'equilibrio concorrenziale, se esiste e richiede che l'industria in esame sia attiva, presenta necessariamente un rapporto di scambio tra i due beni (input e output dell'industria) determinato unicamente dalla funzione di trasformazione (che è del tipo $y_2 + a\, y_1 = 0$ e rappresenta il tratto rilevante della frontiera dell'insieme di produzione): si ha $p_1^*/p_2^* = a$ indipendentemente dalle funzioni di domanda e offerta dei consumatori.

Si tratta, quindi, di esaminare le proprietà dell'equilibrio concorrenziale di un'economia senza produzioni congiunte (ossia, con un solo bene prodotto da ogni industria) che presenti libertà di entrata in tutte le industrie. Per questa economia, poiché le produzioni presentano rendimenti costanti di scala e risultano nulli tutti i profitti, i prezzi dei beni prodotti (in quantità positiva) sono uguali ai loro costi medi di produzione. La successiva Proposizione 11.17 introduce condizioni che rendono queste uguaglianze sufficienti per determinare i prezzi.

Si esamina, allora, un equilibrio concorrenziale $(x^*, y^*, p^*)$ con *free disposal* per l'economia di produzione con libertà di entrata $\mathcal{E} = (\langle X_i, \succsim_i\rangle, \hat{Y}_j, \omega_i, \theta_{ij}, i = 1,\ldots, n, j = 1,\ldots, m)$, ove ogni insieme di produzione $\hat{Y}_j \subset \mathbb{R}^k$ ha un solo output (e ciascun insieme un output diverso) e presenta rendimenti costanti di scala. In questo equilibrio il ricavo di ogni industria è uguale al suo costo (minimo) di produzione, che è proporzionale (essendo costanti i rendimenti di scala) alla quantità prodotta. Ossia, elencando i beni in modo che i primi $m$ beni siano i beni prodotti, per ogni $j = 1,\ldots, m$, si ha $y_j^* = (q_j^*, \xi_j^*)$, con $q_j^* \in \mathbb{R}_{++}$ e $\xi_j^* \in \mathbb{R}_+^{k-1}$, e $p_j^* q_j^* = c_j^*(p_{\xi_j}^*, q_j^*) = AC_j^*(p_{\xi_j}^*)\, q_j^*$, per cui $p_j^* = AC_j^*(p_{\xi_j}^*)$ se $q_j^* > 0$, ove $p_j^*$ è il prezzo dell'output dell'industria $j$-esima, $p_{\xi_j}^*$ è il vettore dei prezzi dei suoi input e $AC_j^*$ è il suo costo medio, che è funzione fortemente monotona dei prezzi degli input impiegati in quantità positiva.

**Proposizione 11.17** (*Teorema di non sostituzione*) Se non vi sono produzioni congiunte, se gli insiemi di produzione hanno rendimenti costanti di scala, se vi è un solo input di produzione che non è un bene prodotto e se in ogni produzione questo input è necessario (ne è, cioè, impiegata una quantità positiva), allora i prezzi dei beni prodotti sono determinati unicamente dal costo di produzione. Ossia, elencando i beni in modo che i primi $m$ beni siano i beni prodotti (in quantità positiva) e l'$(m+1)$-esimo l'input non prodotto, il sistema di equazioni $p_j = AC_j*(p_1,..., p_m, p_{m+1})$, con $j = 1,…, m$, ammette un'unica soluzione.

**Dimostrazione.** Innanzi tutto, per l'ipotesi che vi è un input di produzione non prodotto impiegato in ogni produzione, che può perciò essere scelto come numerario, cioè con prezzo pari a 1, tutti i costi medi di produzione sono positivi, per cui $p_j > 0$ per $j = 1,…, m$. Si assuma ora, per assurdo, che il sistema $p_j = AC_j*(p_1,..., p_m, p_{m+1})$, con $j = 1,…, m$, ammetta due soluzioni, entrambe con $p_{m+1} = 1$: la soluzione dell'equilibrio concorrenziale in esame $p^*$ e un'altra soluzione $p'$. Si consideri il numero $\alpha = \max_j \left\{ \frac{p_j'}{p_j^*} \right\}$. Se $\alpha > 1$, allora vi è un bene $h$ per cui è $p_h' = \alpha p_h^* > p_h^*$, ove $h\in\{1,…, m\}$, mentre per gli altri prodotti è $p_j' \leq \alpha p_j^*$. Se $\alpha \leq 1$, allora, essendo $p^* \neq p'$, vi è un bene $h$ per cui si ha $p_h' = \beta p_h^* < p_h^*$, con $\beta = \min_j \left\{ \frac{p_j'}{p_j^*} \right\} < 1$, e $p_j' \geq \beta p_j^*$ per gli altri prodotti. La dimostrazione seguente, condotta per il caso $\alpha > 1$, si applica in entrambi i casi, con le opportune modificazioni. Tenendo conto che deve essere $p_h^* = AC_j*(p_1^*,..., p_m^*, p_{m+1})$ e $p_h' = AC_j*(p_1',..., p_m', p_{m+1})$, che la funzione di costo è omogenea di grado 1, per cui $\alpha p_h^* = AC_j*(\alpha p_1^*,..., \alpha p_m^*, \alpha p_{m+1})$, e che essa è funzione fortemente monotona dei prezzi degli input (impiegati in quantità positiva), per cui $AC_j*(\alpha p_1^*,..., \alpha p_m^*, \alpha p_{m+1}) > AC_j*(p_1',..., p_m', p_{m+1})$ poiché $\alpha p_j^* \geq p_j'$, per $j = 1,…, m$, e $\alpha p_{m+1} > p_{m+1}$, risultano le relazioni $p_h' = \alpha p_h^* = \alpha AC_j*(p_1^*,..., p_m^*, p_{m+1}) = AC_j*(\alpha p_1^*,..., \alpha p_m^*, \alpha p_{m+1}) > AC_j*(p_1',..., p_m', p_{m+1}) = p_h'$, che rivelano la presenza di una contraddizione. (Se $\alpha \leq 1$, allora, essendo $\beta < 1$, si ottiene $p_h' = \beta p_h^* = \beta AC_j*(p_1^*,..., p_m^*, p_{m+1}) = AC_j*(\beta p_1^*,..., \beta p_m^*, \beta p_{m+1}) < AC_j*(p_1',..., p_m', p_{m+1}) = p_h'$). Ne consegue che non possono esservi due soluzioni per il sistema di equazioni $p_j = AC_j*(p_1,..., p_m, p_{m+1})$, con $j = 1,…, m$, che quindi ha una sola soluzione. □

La proposizione precedente richiede ipotesi molto restrittive, tra le quali quella che vi sia un solo input non prodotto. Normalmente, questo input rappresenta il lavoro. Questa ipotesi, allora, richiede che vi sia nell'economia un solo tipo di lavoro e che non si impieghino risorse naturali. Ciononostante, è rilevante il risultato che i prezzi dei beni prodotti dipendano, se le ipotesi indicate sono soddisfatte, solo dal costo di produzione, risultino, perciò, indipendenti dalle preferenze e dalle dotazioni dei consumatori. Quindi, possono essere considerati approssimativamente tali se le ipotesi sono soddisfatte approssimativamente,

Inoltre, in tale caso, in base alla relazione di Shephard (introdotta dalla Proposizione 5.22), si trova che sono indipendenti dalla domanda dei consumatori anche i coefficienti di produzione $a_{jh}$ (che indicano, per ogni $j = 1,…, m$ e $h = 1,…, m+1$, la quantità di input $h$ necessaria per produrre un'unità di output $j$). Infatti, la relazione di Shephard richiede che $x_{jh} = \frac{\partial c_j*(p_1,..., p_m, p_{m+1}, q_j)}{\partial p_h}$, per ogni $j = 1,…, m$ e $h = 1,…, m+1$, e, quindi, essendo costanti i rendimenti di scala, si ha $a_{jh} = \frac{x_{jh}}{q_j} = \frac{\partial AC_j^*(p_1,\ldots,p_m,p_{m+1})}{\partial p_h}$ per $j = 1,\ldots, m$ e $h = 1,\ldots, m+1$. Essendo la funzione di costo medio indipendente dal comportamento dei consumatori, ne sono indipendenti anche i coefficienti di produzione $a_{jh}$. Allora, anche se la tecnologia non è del tipo a coefficienti costanti (cioè, con perfetta complementarità degli input, oltre che con rendimenti costanti di scala), la loro scelta risulta indipendente dal comportamento dei consumatori. In altre parole, un mutamento della domanda di consumo non genera sostituzioni tra input, pur consentite dalla tecnologia.

### 11.12 L'equilibrio generale concorrenziale senza *free disposal*

Nel Paragrafo 11.3 è stato introdotto l'equilibrio concorrenziale di puro scambio distinguendo tra economie con *free disposal* e senza *free disposal*. E' poi stato esaminato l'equilibrio per il primo caso. Si tratta ora di esaminare l'altro caso. Nel seguito viene analizzato soltanto l'equilibrio di puro scambio. L'estensione all'equilibrio con produzione, peraltro, non è problematica e non introduce elementi diversi da quelli già presenti nell'equilibrio di puro scambio.

Secondo la Definizione 11.4, l'equilibrio concorrenziale, per un'economia di puro scambio $\mathcal{E} = (\langle X_i, \succsim_i\rangle, \omega_i, i = 1,\ldots, n)$ senza *free disposal*, è rappresentato da un vettore di prezzi $p^*\in\mathbb{R}^k$ e da un'allocazione $x^* = (x_1^*,\ldots, x_n^*)$ tali che $\Sigma_{i=1}^n x_i^* = \Sigma_{i=1}^n \omega_i$ e $x_i^*\in \overline{d}_i(p^*)$ per ogni $i = 1,\ldots, n$, ove $\overline{d}_i(p) = \{x_i \in \overline{B}_i(p) : x_i \succsim_i x_i' \text{ per ogni } x_i' \in \overline{B}_i(p)\}$ e $\overline{B}_i(p) = \{x_i \in X_i : px_i = p\omega_i\}$. (Con *free disposal*, $\Sigma_{i=1}^n x_i^* \le \Sigma_{i=1}^n \omega_i$ e $x_i^*\in d_i(p^*)$, con $d_i(p) = \{x_i \in B_i(p) : x_i \succsim_i x_i' \text{ per ogni } x_i' \in B_i(p)\}$ e $B_i(p) = \{x_i \in X_i : px_i \le p\omega_i\}$ ).[12]

[12] Normalmente, nella letteratura economica (ad esempio, Debreu, 1982), l'equilibrio senza *free disposal* è definito dalle condizioni $\Sigma_{i=1}^n x_i^* = \Sigma_{i=1}^n \omega_i$ e $x_i^*\in d_i(p^*)$ per ogni $i = 1,\ldots, n$, perciò in modo intermedio rispetto alle due definizioni di equilibrio senza *free disposal* e con *free disposal* indicate nel testo. Nel seguito vengono illustrate in nota alcune caratteristiche di questo equilibrio intermedio, denominato anche "equilibrio forte" in contrapposizione a quello del testo, denominato "equilibrio debole", poiché ogni equilibrio $(x^*, p^*)$ che soddisfa le condizioni dell'equilibrio "forte", cioè $\Sigma_{i=1}^n x_i^* = \Sigma_{i=1}^n \omega_i$ e $x_i^*\in d_i(p^*)$ per ogni $i = 1,\ldots, n$, soddisfa anche quelle dell'equilibrio "debole", cioè $\Sigma_{i=1}^n x_i^* = \Sigma_{i=1}^n \omega_i$ e $x_i^*\in \overline{d}_i(p^*)$ per ogni $i = 1,\ldots, n$. Infatti, le condizioni $\Sigma_{i=1}^n x_i^* = \Sigma_{i=1}^n \omega_i$ e $p^* x_i^* \le p^* \omega_i$ per ogni $i = 1,\ldots, n$ implicano $p^* x_i^* = p^* \omega_i$ per ogni $i = 1,\ldots, n$, cioè $x_i^*\in \overline{B}_i(p^*)$ e, quindi, $x_i^*\in \overline{d}_i(p^*)$. Non vale, invece, la proprietà inversa, come si vedrà con esempi (Figure 11.16 e 11.17). Le ragioni che rendono preferibile porre l'equilibrio "debole" (ossia, con i vincoli di bilancio $\overline{B}_i(p) \subseteq B_i(p^*)$ invece che $B_i(p)$) come l'equilibrio di una economia senza *free disposal* riposano su tre considerazioni convergenti.

*a*) La prima considerazione risulta dall'esame dei pagamenti generati dagli scambi. Questi possono essere compiuti in regime di baratto, con l'impiego di carta moneta o con un sistema di credito. Se in regime di baratto, la condizione $p\, x_i < p\, \omega_i$ richiede che venga eliminata la quantità di qualche bene, possibilità esclusa dall'assenza di *free disposal*. Se con l'impiego di carta moneta, si ha una situazione equivalente alla descrizione seguente: gli agenti depositano in un magazzino comune le loro dotazioni in cambio, a prezzi dati, di carta moneta, che usano per ritirare dallo stesso magazzino e agli stessi prezzi le merci

La dimostrazione dell'esistenza dell'equilibrio concorrenziale richiede ipotesi più deboli che nel caso con *free disposal*. Con riferimento alle condizioni richieste per introdurre la Proposizione 11.11, che richiedono l'insieme $X_i$ non vuoto, compatto e convesso, il sistema di preferenza $\langle X_i, \succsim_i\rangle$ regolare, continuo, convesso e monotono e $\omega_i$ punto interno di $X_i$ per ogni $i = 1,\dots, n$, possono essere indebolite le condizioni sulle preferenze. E' sufficiente assumere che il sistema di preferenza $\langle X_i, \succsim_i\rangle$ sia regolare, continuo e debolmente convesso. Non occorre, perciò, che le curve di indifferenza siano sottili e che non vi siano, all'interno degli insiemi di consumo, panieri di beni di sazietà (tali, cioè, che nessun altro paniere di beni è preferito). La Proposizione 11.18 introduce le condizioni di continuità richieste dal teorema utilizzato dalla Proposizione 11.19 per la dimostrazione dell'equilibrio concorrenziale.

**Proposizione 11.18** Per ogni agente dell'economia $\mathcal{E} = (\langle X_i, \succsim_i\rangle, \omega_i, i = 1,\dots, n)$ , se l'insieme di consumo $X_i$ è non vuoto, compatto e convesso, il sistema di preferenza $\langle X_i, \succsim_i\rangle$ è regolare, continuo e debolmente convesso e la dotazione $\omega_i$ è punto interno di $X_i$ , allora gli insiemi di bilancio $\overline{B}_i(p) = \{x_i \in X_i : px_i = p\omega_i\}$ e di domanda $\overline{d}_i(p) = \{x_i \in \overline{B}_i(p):$ $x_i \succsim_i x_i'$ per ogni $x_i' \in \overline{B}_i(p)\}$ sono non vuoti, compatti e convessi per ogni $p\in\mathbb{R}^k$ , la corrispondenza di bilancio $\overline{B}_i : \mathbb{R}^k \setminus \{0\} \to X_i$ è continua e omogenea di grado zero e la corrispondenza di domanda $\overline{d}_i : \mathbb{R}^k \setminus \{0\} \to X_i$ è emicontinua superiormente e omogenea di grado zero.

**Dimostrazione.** E' immediata la dimostrazione che gli insiemi $\overline{B}_i(p)$ e $\overline{d}_i(p)$ sono non vuoti, compatti e convessi e che le corrispondenze di bilancio e di domanda sono omogenee di grado zero (ossia $\overline{B}_i(tp) = \overline{B}_i(p)$ e $\overline{d}_i(tp) = \overline{d}_i(p)$ per ogni $t \neq 0$). La continuità della corrispondenza di bilancio può essere dimostrata provando che è sia emicontinua superiormente (cioè, le successioni $p^q \to p°$ e $x_i^q \to x_i°$, con $x_i^q\in \overline{B}_i(p^q)$, implicano $x_i°\in \overline{B}_i(p°)$), sia emicontinua inferiormente (cioè, se $p^q \to p°$ e $x_i°\in \overline{B}_i(p°)$, allora esiste una successione $(x_i^q)$ tale che $x_i^q\in \overline{B}_i(p^q)$ e $x_i^q \to x_i°$). E' emicontinua superiormente poiché è chiuso l'insieme $\{(p, x_i)\in P\times X_i: x_i\in \overline{B}_i(p)\}$, ove $P \subset \mathbb{R}^k \setminus \{0\}$ è un

desiderate. Se fosse $p\, x_i \leq p\, \omega_i$ per ogni $i = 1,\dots, n$ e $p\, x_i < p\, \omega_i$ per qualche $i$ , allora rimarrebbe presso il magazzino della merce, ossia vi sarebbe *free disposal*. Se, infine, i pagamenti vengono effettuati a credito, vi è per ogni agente un conto su cui vengono segnati a credito le vendite e a debito gli acquisti. Perciò ogni scambio prevede una scrittura a debito per l'agente che acquista e una scrittura a credito per l'agente che vende, cosicché la somma di tutti i conti è identicamente nulla. Allora, non può il conto di un agente essere in credito, come si ha se $p\, x_i < p\, \omega_i$ per qualche $i$, senza che sia in debito il conto di un altro agente, cioè $p\, x_i > p\, \omega_i$ per qualche altro $i$, possibilità esclusa dal vincolo di bilancio.

*b*) La seconda considerazione risulta dal fatto che nel vincolo di bilancio contano i rapporti di scambio, non i prezzi contabili. Allora, con prezzi non necessariamente non negativi, il vincolo di bilancio non deve modificarsi se si pone $t\,p$ al posto di $p$, con $t \neq 0$. Deve, allora, essere $B_i(-p) = B_i(p)$ , condizione questa che non è soddisfatta se il vincolo di bilancio è una disuguaglianza.

*c*) Come già indicato, le condizioni $\Sigma_{i=1}^n x_i^* = \Sigma_{i=1}^n \omega_i$ e $p^*\, x_i^* \leq p^*\, \omega_i$ per ogni $i = 1,\dots, n$ implicano $p^*\, x_i^* = p^*\, \omega_i$ per ogni $i = 1,\dots, n$. Allora gli agenti, poiché conoscono le condizioni di equilibrio e sanno, quindi, che non potrà realizzarsi nessuna scelta con $p\, x_i < p\, \omega_i$ , scelgono panieri di beni per cui $p\, x_i = p\, \omega_i$ , limitano cioè la loro scelta ai punti di $\overline{B}_i(p)$ anche se il loro vincolo di bilancio è $B_i(p)$ . Risultano, perciò, le funzioni di domanda $\overline{d}_i(p^*)$ , proprio quelle generate dai vincoli di bilancio $\overline{B}_i(p)$ .

insieme chiuso contenente la successione $(p^q)$. E' emicontinua inferiormente poiché, essendo $\omega_i$ punto interno di $X_i$, vi è una coppia $x_i^a, x_i^b \in X_i$ con $p° x_i^a < p° \omega_i < p° x_i^b$. Allora, per ogni successione $(p^q)$ con $p^q \to p°$ e $x_i° \in \overline{B}_i(p°)$, è possibile introdurre le successioni $(x_i^{aq})$ e $(x_i^{bq})$ ove $x_i^{aq} = t^{aq} x_i° + (1-t^{aq}) x_i^a$ e $x_i^{bq} = t^{bq} x_i° + (1-t^{bq}) x_i^b$, con $t^{aq} = \dfrac{p^q(\omega_i - x_i^a)}{p^q(x_i^° - x_i^a)}$ e $t^{bq} = \dfrac{p^q(x_i^b - \omega_i)}{p^q(x_i^b - x_i^°)}$. Si trova che $p^q x_i^{aq} = p^q x_i^{bq} = p^q \omega_i$ e, per $q$ sufficientemente grandi, $t^{aq}, t^{bq} > 0$, poiché $p^q x_i^a \to p° x_i^a$, $p^q x_i^b \to p° x_i^b$ e $p^q x_i° \to p° x_i° = p°\omega_i$. Inoltre, sempre per $q$ sufficientemente grandi, si trova che se $t^{aq} > 1$ allora $t^{bq} < 1$, poiché è $t^{aq} > 1$ solo se $p^q \omega_i > p^q x_i°$, che implica $t^{bq} < 1$. Conseguentemente, per $q$ sufficientemente grandi, la successione $(x_i^q)$, ove $x_i^q = x_i^{aq}$ se $t^{aq} \leq 1$ e $x_i^q = x_i^{bq}$ se $t^{aq} > 1$, è composta di vettori $x_i^q \in \overline{B}_i(p^q)$ poiché $p^q x_i^q = p^q \omega_i$, l'insieme $X_i$ è convesso e $x_i^q = t^{aq} x_i° + (1-t^{aq}) x_i^a$ con $0 < t^{aq} \leq 1$ oppure $x_i^q = t^{bq} x_i° + (1-t^{bq}) x_i^b$ con $0 < t^{bq} < 1$. Quindi, $x_i^q \to x_i°$ poiché sia $t^{aq} \to 1$ sia $t^{bq} \to 1$ per $p^q \to p°$. Infine, la corrispondenza $\overline{d}_i : \mathbb{R}^k \setminus \{0\} \to X_i$ è emicontinua superiormente perché le successioni $p^q \to p°$ e $x_i^q \to x_i°$, con $x_i^q \in \overline{d}_i(p^q)$, implicano $x_i° \in \overline{d}_i(p°)$ per le ragioni seguenti. Da un lato, essendo $x_i^q \in \overline{d}_i(p^q) \subset \overline{B}_i(p^q)$, si ha $x_i° \in \overline{B}_i(p°)$ poiché $\overline{B}_i(p^q)$ è una corrispondenza emicontinua superiormente. Dall'altro lato, per ogni punto $z \in \overline{B}_i(p°)$, essendo $\overline{B}_i(p^q)$ una corrispondenza emicontinua anche inferiormente, vi è una successione $(z^q)$ tale che $z^q \in \overline{B}_i(p^q)$ e $z^q \to z$. Allora, essendo $x_i^q \succsim_i z^q$ poiché $x_i^q \in \overline{d}_i(p^q)$ ed essendo il sistema di preferenza continuo, si ha $x_i° \succsim_i z$. Poiché questa relazione vale per ogni $z \in \overline{B}_i(p°)$, risulta $x_i° \in \overline{d}_i(p°)$. □

La omogeneità delle corrispondenze di bilancio e di domanda consente di standardizzare i prezzi, che possono anche essere negativi per l'assenza dell'ipotesi *free disposal*. Non può, allora, essere preso in considerazione il simplesso. La standardizzazione che qui viene utilizzata pone pari a 1 la norma del vettore dei prezzi,[13] considera, cioè, come insieme dei prezzi la sfera di raggio 1, ossia

$$S = \{p \in \mathbb{R}^k : \| p \| = 1\}$$

Si noti come l'insieme $S$ non sia convesso e come, quindi, non possa essere utilizzato il teorema di Kakutani. Si può, però, utilizzare il seguente teorema.

**Teorema:**[14] Sia $S = \{p \in \mathbb{R}^k : \| p \| = 1\}$ e sia $Z \subset \mathbb{R}^k$ un insieme compatto. Se $\phi: S \to Z$ è una corrispondenza emicontinua superiormente con insiemi $\phi(p)$ non vuoti e convessi per ogni $p \in S$, allora si verifica *almeno* una delle tre alternative seguenti:

*a*) esiste un $p^* \in S$ tale che $0 \in \phi(p^*)$;

*b*) esiste una coppia $(p^*, z^*)$ con $p^* \in S$ e $z^* \in \phi(p^*)$ tale che $z^* \neq 0$ e $\dfrac{z^*}{\| z^* \|} = p^*$;

*c*) esiste una terna $(p^*, z^*, \hat{z})$ con $p^* \in S$, $z^* \in \phi(p^*)$ e $\hat{z} \in \phi(-p^*)$ tale che $z^*, \hat{z} \neq 0$ e $\dfrac{\hat{z}}{\| \hat{z} \|} = -\dfrac{z^*}{\| z^* \|}$.

[13] Inoltre, l'insieme $S$ esclude il vettore $p = 0$. Questo caso, peraltro, è irrilevante dal punto di vista economico. Infatti, se $p = 0$, allora $\overline{B}_i(0) = X_i$ per ogni $i = 1,\ldots, n$ e ogni agente può scegliere il consumo di sazietà. L'equilibrio allora esisterebbe soltanto se le dotazioni consentissero a tutti gli agenti i loro consumi di sazietà, caso che può essere riferito alle economie paradisiache, non a quelle terrestri.

[14] Questo teorema è indicato da Hart e Kuhn, 1975, p. 336.

Si consideri ora la corrispondenza aggregata di eccesso di domanda $\overline{E} : S \to Z$ , ove $\overline{E}(p) = \sum_{i=1}^{n} (\overline{d}_i(p) - \omega_i)$ . L'insieme $Z = \sum_{i=1}^{n} X_i - \{\sum_{i=1}^{n} \omega_i\}$ è un sottoinsieme non vuoto e compatto di $\mathbb{R}^k$ se sono tali gli insiemi di consumo $X_i$ per $i = 1,\ldots, n$. La corrispondenza $\overline{E} : S \to Z$ è, sotto le ipotesi della Proposizione 11.18, emicontinua superiormente, con insiemi $E(p)$ non vuoti, compatti e convessi per ogni $p \in S$ . Inoltre, essendo $\overline{d}_i(p) \subseteq \overline{B}_i(p)$ , vale la legge di Walras, cioè è $p\,\overline{E}(p) = 0$ per ogni $p \in S$ (con la notazione $p\,\overline{E}(p) = 0$ si indica che $p\, z = 0$ per ogni $z \in \overline{E}(p)$ ). Si può, allora, introdurre il teorema di esistenza dell'equilibrio.

**Proposizione 11.19.** (*Esistenza dell'equilibrio concorrenziale di puro scambio senza free disposal*) Esiste un $p^* \in S$ per cui $0 \in \overline{E}(p^*)$ se la corrispondenza aggregata di eccesso di domanda $\overline{E} : S \to Z$ , ove $Z$ è un sottoinsieme compatto di $\mathbb{R}^k$ , è emicontinua superiormente, omogenea di grado zero ed è tale che l'insieme $\overline{E}(p)$ è non vuoto, convesso e soddisfa la legge di Walras per ogni $p \in S$ .

**Dimostrazione.** Si applica il teorema enunciato precedentemente poiché la corrispondenza $\overline{E} : S \to Z$ ne soddisfa le ipotesi. Si trova che la seconda delle tre alternative indicate dal teorema è esclusa mentre le altre due implicano entrambe $0 \in \overline{E}(p^*)$ . La prima alternativa indica proprio $0 \in \overline{E}(p^*)$ . La seconda alternativa non può verificarsi perché la legge di Walras richiede $p^*\, z = 0$ per ogni $z \in \overline{E}(p^*)$ , mentre essa richiede $p^* z^* = \| z^* \| \neq 0$ . La condizione $\dfrac{\hat{z}}{\| \hat{z} \|} = -\dfrac{z^*}{\| z^* \|}$ richiesta dalla terza alternativa può essere rappresentata nella forma $\lambda z^* + (1-\lambda)\hat{z} = 0$ con $\lambda = \dfrac{\| \hat{z} \|}{\| z^* \| + \| \hat{z} \|}$ . Essendo la corrispondenza $\overline{E} : S \to Z$ omogenea di grado zero si ha che $z^*,\ \hat{z} \in \overline{E}(p^*)$ poiché $\overline{E}(p^*) = \overline{E}(-p^*)$ . Allora, poiché $\overline{E}(p^*)$ è un insieme convesso e $z^*,\ \hat{z} \in \overline{E}(p^*)$ , si ha che $\lambda z^* + (1-\lambda)\hat{z} \in \overline{E}(p^*)$ per ogni $\lambda \in (0, 1)$, quindi, anche per $\lambda = \dfrac{\| \hat{z} \|}{\| z^* \| + \| \hat{z} \|}$ , per cui risulta che $0 \in \overline{E}(p^*)$ . □

Una prima osservazione mostra che se $(x^*, p^*)$ è un equilibrio concorrenziale, allora anche $(x^*, -p^*)$ è un equilibrio concorrenziale. Sono, tuttavia, equilibri solo apparentemente diversi: i vettori di prezzi contabili $p^*$ e $-p^*$ inducono gli stessi rapporti di scambio.[15]

---

[15] Viene qui indicata un'economia per la quale esiste un equilibrio "debole", ma nessun equilibrio "forte" (questa distinzione è indicata nella precedente nota 12). Si consideri l'economia con due consumatori e due beni, definita dagli insiemi di consumo $X_1 = X_2 = [0,\ 2]^2$ , dalle funzioni di utilità $u_1 = \begin{cases} -x_{11}^2 - x_{12}^2 & \text{per } x_{11} + x_{12} \le 2 \\ -(x_{11} - 2)^2 - (x_{12} - 2)^2 & \text{per } x_{11} + x_{12} \ge 2 \end{cases}$ e $u_2 = -|x_{21} + x_{22} - 2|$ , e dalle dotazioni $\omega_1 = \omega_2 = (1,\ 1)$ . Questa economia presenta, anche se le preferenze non sono debolmente convesse, l'unico equilibrio "debole" $x_1^* = x_2^* = (1,\ 1)$ , $p^* = \pm(\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ \dfrac{1}{\sqrt{2}})$ , che è, inoltre, fortemente efficiente. Non presenta nessun equilibrio "forte". Presenta, invece, una molteplicità di equilibri con *free disposal* (tutti i prezzi del simplesso producono un equilibrio). Nelle Figure 11.16 e 11.17 sono

L'osservazione più rilevante riguarda l'efficienza dell'equilibrio. Al contrario che nel caso delle economie con *free disposal*, il primo teorema dell'economia del benessere richiede una condizione (implicita nelle economie con *free disposal*[16]) sulle preferenze degli agenti, che devono presentare un elemento comune: tutti devono non essere svantaggiati da un incremento (o da una diminuzione) del valore nominale della loro dotazione.

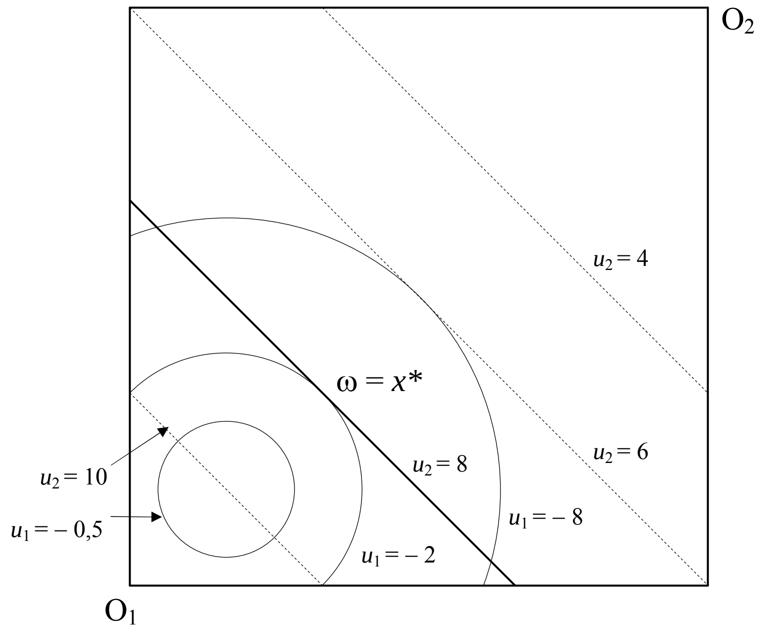


Figura 11.18

Nella Figura 11.18 è indicato il diagramma di Edgeworth-Pareto di una economia che ha un unico equilibrio concorrenziale, che risulta inefficiente (questa economia, con

rappresentate le mappe delle curve di indifferenza dei due consumatori, sulle quali è semplice vedere l'equilibrio "debole" concorrenziale.

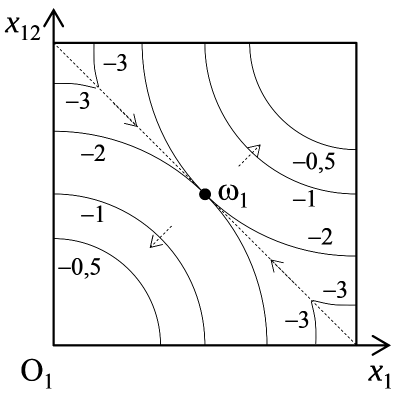


Figura 11.16

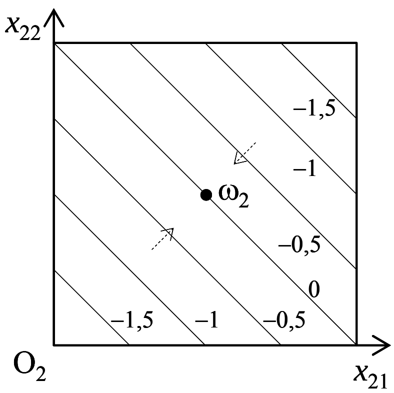


Figura 11.17

[16] Ed anche nelle analisi dell'equilibrio "forte".

due consumatori e due beni, è caratterizzata dagli insiemi di consumo $X_1 = X_2 = [0,\ 6]^2$ dalle funzioni di utilità $u_1 = -(x_{11} - 1)^2 - (x_{12} - 1)^2$, $u_2 = x_{21} + x_{22}$ e dalle dotazioni $\omega_1$ = (2, 2), $\omega_2$ = (4, 4). Si ha l'equilibrio $x_1$* = (2, 2), $x_2$* = (4, 4), $p^* = \pm(\frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{2}})$ ).[17]

La dimostrazione del primo teorema dell'economia del benessere per l'equilibrio senza *free disposal* richiede l'ipotesi introdotta dalla definizione seguente e la proposizione che ne consegue.

**Definizione 11.6** (*Svantaggiosità di un decremento del valore nominale della dotazione*) Un decremento del valore nominale della dotazione è debolmente svantaggioso per il consumatore $i$-esimo rispetto alla coppia $(p, \omega_i)$ se è $x_i' \precsim_i \overline{d}_i(p)$ (cioè $x_i' \precsim_i x_i$ per ogni $x_i \in \overline{d}_i(p)$ ) per ogni $x_i' \in X_i$ con $p\, x_i' < p\, \omega_i$ . E' fortemente svantaggioso se $x_i' \prec_i \overline{d}_i(p)$. Un incremento del valore nominale della dotazione è debolmente (fortemente) svantaggioso se è $x_i' \precsim_i \overline{d}_i(p)$ ($x_i' \prec_i \overline{d}_i(p)$) per ogni $x_i' \in X_i$ con $p\, x_i' > p\, \omega_i$ .[18]

**Proposizione 11.20** Il consumatore $i$-esimo è, per ogni coppia $(p, \omega_i)$ con $\omega_i$ punto interno di $X_i$, debolmente svantaggiato da un decremento del valore nominale della dotazione oppure da un suo incremento se l'insieme di consumo $X_i$ è non vuoto, chiuso e convesso e il sistema di preferenza $\langle X_i, \succsim_i \rangle$ è regolare, continuo e debolmente convesso. (In altri termini, con le ipotesi indicate, non può accadere che non sia $x_i' \precsim_i \overline{d}_i(p)$ per ogni $x_i' \in X_i$ con $p\, x_i' < p\, \omega_i$ oppure per ogni $x_i' \in X_i$ con $p\, x_i' > p\, \omega_i$ ). E' fortemente svantaggiato se le preferenze sono localmente non saziate (come indicato nel Paragrafo 3.2).

**Dimostrazione.** Si prenda in considerazione una qualsiasi quaterna $(p, \omega_i, x_i', x_i'')$ ove $p \in S$ , $\omega_i$ è punto interno di $X_i$ e $x_i', x_i'' \in X_i$ con $px_i' < p\omega_i$ e $px_i'' > p\omega_i$ . La proposizione è dimostrata se si trova che non è possibile che si abbia insieme $x_i' \succ_i \overline{d}_i(p)$ e $x_i'' \succ_i \overline{d}_i(p)$. Sia $x_i^* = \lambda x_i' + (1-\lambda) x_i''$ con $\lambda = \frac{p(x_i'' - \omega_i)}{p(x_i'' - x_i')}$, cosicché $px_i^* = p\omega_i$ . E' anche $x_i^* \in X_i$ poiché $X_i$ è convesso e $\lambda \in (0, 1)$. Si ha, quindi, che $x_i^* \precsim_i \overline{d}_i(p)$. Allora, essendo le preferenze debolmente convesse, se è $x_i' \succsim_i x_i''$, è anche $x_i^* \succsim_i x_i''$, per cui (essendo $x_i^* \precsim_i \overline{d}_i(p)$ ) si ha che $x_i'' \precsim_i \overline{d}_i(p)$; se è $x_i'' \succsim_i x_i'$, è anche $x_i^* \succsim_i x_i'$, per cui si ha che $x_i' \precsim_i \overline{d}_i(p)$. Perciò, deve valere almeno una delle due relazioni $x_i'' \precsim_i \overline{d}_i(p)$ e $x_i' \precsim_i \overline{d}_i(p)$. Si tratta ora di dimostrare che non è possibile che si abbia insieme $x_i' \succsim_i \overline{d}_i(p)$ e $x_i'' \succsim_i \overline{d}_i(p)$ se le preferenze sono localmente non saziate.

---

[17] Questo equilibrio "debole" non è un equilibrio "forte", per cui questa economia non ammette nessun equilibrio forte. Se si introduce l'ipotesi *free disposal*, si trova che esiste l'unico equilibrio $x_1$* = (1, 1), $x_2$* = (4, 4), $p^* = \pm(\frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{2}})$, che è debolmente (ma non fortemente) efficiente.

[18] Si noti come sia sempre debolmente svantaggioso un decremento del valore nominale della dotazione per le funzioni di domanda $d_i(p)$ prese in considerazione dall'analisi dell'equilibrio "forte", in cui $p$ > 0. E' fortemente svantaggioso se le preferenze non sono saziate localmente.

Questa ipotesi implica che vi sia, nell'intorno di $x_i'$, un punto $\tilde{x}_i'$ tale che $p\tilde{x}_i' < p\omega_i$ e $\tilde{x}_i' \succ_i x_i'$, e, nell'intorno di $x_i''$, un punto $\tilde{x}_i''$ tale che $p\tilde{x}_i'' > p\omega_i$ e $\tilde{x}_i'' \succ_i x_i''$. Procedendo come nella parte precedente della dimostrazione, ossia introducendo il punto $\tilde{x}_i^* = \tilde{\lambda}\tilde{x}_i' + (1-\tilde{\lambda})\tilde{x}_i''$ con $\tilde{\lambda} = \dfrac{p(\tilde{x}_i'' - \omega_i)}{p(\tilde{x}_i'' - \tilde{x}_i')}$, si trova che se è $\tilde{x}_i' \succsim_i \tilde{x}_i''$, è anche $\tilde{x}_i^* \succsim_i \tilde{x}_i''$, per cui (essendo $\tilde{x}_i^* \precsim_i \overline{d}_i(p)$ ) si ha che $x_i'' \prec_i \tilde{x}_i'' \precsim_i \overline{d}_i(p)$; se è $\tilde{x}_i'' \succsim_i \tilde{x}_i'$, è anche $\tilde{x}_i^* \succsim_i \tilde{x}_i'$, per cui si ha che $x_i' \prec_i \tilde{x}_i' \precsim_i \overline{d}_i(p)$. Conseguentemente, deve valere almeno una delle due relazioni $x_i'' \prec_i \overline{d}_i(p)$ e $x_i' \prec_i \overline{d}_i(p)$. □

E' possibile ora introdurre il primo teorema dell'economia del benessere per una economia di puro scambio senza *free disposal*.

**Proposizione 11.21** (*Primo teorema dell'economia del benessere*) Un equilibrio concorrenziale $(x^*, p^*)$ senza *free disposal* dell'economia $\mathcal{E} = (\langle X_i, \succsim_i\rangle, \omega_i, i = 1,\ldots, n)$ è debolmente (fortemente) efficiente se un decremento o un incremento del valore nominale della dotazione è debolmente (fortemente) svantaggioso per ogni consumatore rispetto a $(p^*, \omega_i)$. (In altre parole, è richiesto che i consumatori abbiano un caratteristica di similarità, nel senso che un decremento del valore nominale della dotazione è ritenuto da tutti svantaggioso, oppure è ritenuto svantaggioso da tutti un suo incremento).

**Dimostrazione.** Si consideri la proposizione equivalente secondo cui se un'allocazione non è debolmente efficiente, allora non può appartenere, con le ipotesi della proposizione, ad un equilibrio concorrenziale con prezzi $p^*$. Se $x$ non è un'allocazione debolmente efficiente, allora esiste un'allocazione $x'$ realizzabile, cioè con $\Sigma_{i=1}^n x_i' = \Sigma_{i=1}^n \omega_i$, tale che $x_i' \succ_i x_i$ per ogni $i = 1,\ldots, n$. Ne consegue che $\Sigma_{i=1}^n p^* x_i' = \Sigma_{i=1}^n p^* \omega_i$. Se fosse $p^* x_i' = p^* \omega_i$ per qualche $i = 1,\ldots, n$, allora $x_i \notin \overline{d}_i(p^*)$, poiché $x_i' \succ_i x_i$ e $x_i' \in \overline{B}_i(p^*)$. Quindi, $(x, p^*)$ può essere un equilibrio concorrenziale solo se $p^* x_i' \neq p^* \omega_i$ per ogni $i = 1,\ldots, n$. Però, se è $p^* x_i' \neq p^* \omega_i$ per ogni $i = 1,\ldots, n$, dovendo essere $\Sigma_{i=1}^n p^* x_i' = \Sigma_{i=1}^n p^* \omega_i$, vi è almeno un consumatore (il consumatore $j$-esimo) per cui è $p^* x_j' > p^* \omega_j$ e un consumatore (il consumatore $h$-esimo) per cui è $p^* x_h' < p^* \omega_h$. Essendo un decremento (o un incremento) del reddito nominale debolmente svantaggioso per ogni consumatore, si ha che deve valere almeno una delle due relazioni $x_j' \precsim_j \overline{d}_j(p^*)$ e $x_h' \precsim_h \overline{d}_h(p^*)$, per cui, essendo $x_j \prec_j x_j'$ e $x_h \prec_h x_h'$, si ha che deve valere almeno una delle due relazioni $x_j \prec_j \overline{d}_j(p^*)$ e $x_h \prec_h \overline{d}_h(p^*)$. Ne consegue che $(x, p^*)$ non è un equilibrio concorrenziale.

La dimostrazione per l'efficienza forte è del tutto analoga. Se $x$ non è un'allocazione fortemente efficiente, allora esiste un'allocazione $x'$ realizzabile tale che $x_i' \succsim_i x_i$ per ogni $i = 1,\ldots, n$ e $x_i' \succ_i x_i$ per almeno un $i$. Ne consegue che $\Sigma_{i=1}^n p^* x_i' = \Sigma_{i=1}^n p^* \omega_i$. Se fosse $p^* x_i' = p^* \omega_i$ per ogni $i = 1,\ldots, n$, perciò anche per quel consumatore per cui è $x_i' \succ_i x_i$, allora per questo consumatore sarebbe $x_i \notin \overline{d}_i(p^*)$ poiché $x_i' \succ_i x_i$ e $x_i' \in \overline{B}_i(p^*)$. Quindi, $(x, p^*)$ può essere un equilibrio concorrenziale solo se non è $p^* x_i' = p^* \omega_i$ per ogni $i = 1,\ldots, n$. Allora, dovendo essere $\Sigma_{i=1}^n p^* x_i' = \Sigma_{i=1}^n p^* \omega_i$, vi è almeno un consumatore (il consumatore $j$-esimo) per cui è $p^* x_j' > p^* \omega_j$ e un consumatore (il consumatore $h$-esimo) per cui è $p^* x_h' < p^* \omega_h$. Essendo un decremento (o un incremento) del reddito nominale fortemente svantaggioso per ogni consumatore, si ha che deve valere almeno una delle due relazioni $x_j' \prec_j \overline{d}_j(p^*)$ e $x_h' \prec_h \overline{d}_h(p^*)$, per cui, essendo $x_j \precsim_j x_j'$ e $x_h \precsim_h x_h'$ si ha che deve valere almeno una delle due relazioni $x_j \prec_j \overline{d}_j(p^*)$ e $x_h \prec_h \overline{d}_h(p^*)$. Ne consegue, nuovamente, che $(x, p^*)$ non è un equilibrio concorrenziale. □

La condizione indicata nella Proposizione 11.21 è sufficiente perché valga il primo teorema dell'economia del benessere, non è però necessaria. E' possibile, infatti, trovare esempi nei quali l'equilibrio concorrenziale è efficiente senza che tutti i consumatori siano svantaggiati da un decremento (o un incremento) del valore nominale della dotazione.[19]

Non vi è una relazione incondizionata tra gli equilibri *free disposal* e quelli *non free disposal*.[20] Vi sono economie che presentano un equilibrio *non free disposal* (inoltre fortemente efficiente) e nessun equilibrio *free disposal*. Vi sono anche economie che presentano un equilibrio *free disposal* (inoltre fortemente efficiente) e nessun equilibrio *non free disposal*.

Nelle Figure 11.24 e 11.25 sono rappresentati i diagrammi di Edgeworth-Pareto di due economie con due consumatori e due beni. L'economia rappresentata nella Figura 11.24 ha due consumatori le cui curve di indifferenza sono rappresentate rispettivamente nelle Figure 11.22 e 11.23 (i numeri accanto alle curve di indifferenza indicano l'utilità). I due consumatori hanno insieme di consumo $X_i = [0, 4]^2$ e dotazione $\omega_i = (2, 2)$ per $i=1, 2$. L'equilibrio concorrenziale senza *free disposal* è rappresentato da $x_i^* = \omega_i$ per $i = 1, 2$ e $p^* = \pm(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$. Non vi è un equilibrio con *free disposal*, come si può vedere in base alle curve prezzo-consumo, descritte (per il caso con *free disposal*) con linee a tratti e punti nelle Figure 11,22 e 11.23 e riportate nel diagramma di Edgeworth-Pareto della Figura 11.24. Infatti, nella Figura 11.24, nessun punto della curva prezzo-consumo del consumatore 1 si trova a sud-ovest di un qualche punto della curva prezzo-consumo del consumatore 2, come è necessario perché vi sia un equilibrio con *free-disposal*.

---

19 Nelle Figure 11.19, 20 e 21 sono rappresentate, per una economia con due agenti e due beni, rispettivamente, le preferenze e le dotazioni dei due consumatori e il diagramma di Edgeworth-Pareto. Viene presentato un equilibrio concorrenziale che è fortemente efficiente anche se uno dei consumatori è svantaggiato da un decremento del valore nominale della dotazione e l'altro da un incremento.

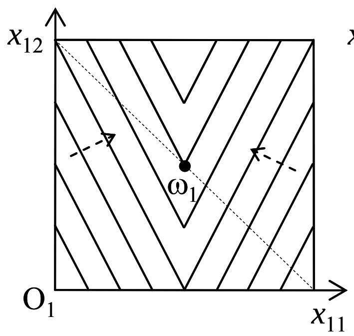

Figura 11.19

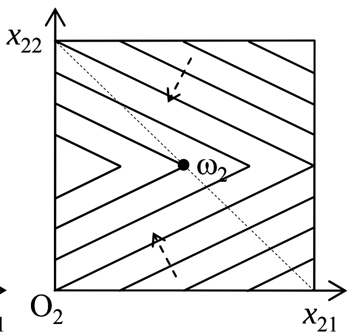

Figura 11.20

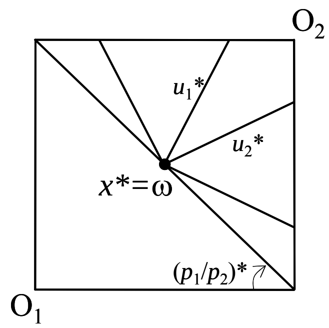

Figura 11.21

20 Invece, come già indicato, un equilibrio "forte" è anche un equilibrio "debole". Inoltre, l'equilibrio "forte" è debolmente efficiente, mentre quello "debole" può non esserlo, come nel caso rappresentato dalla Figura 11.18. Tuttavia, può accadere che l'equilibrio "debole" esista e sia efficiente per una economia in cui l'equilibrio "forte" non esiste, come nel caso dell'economia rappresentata dalle Figure 11.16 e 11.17.

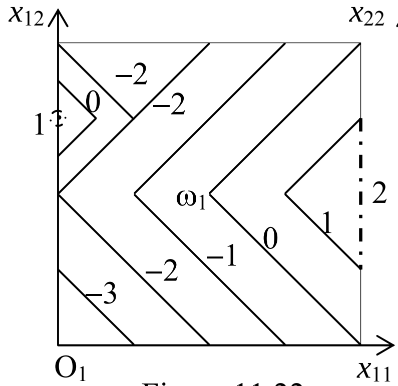


Figura 11.22

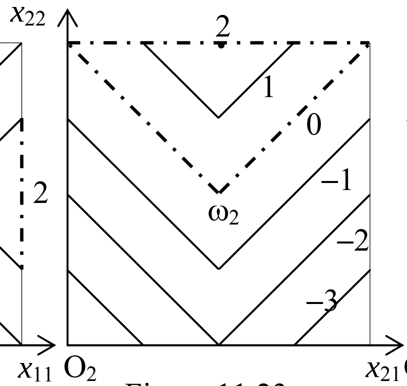


Figura 11.23

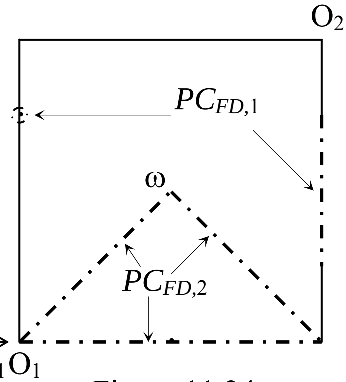


Figura 11.24

L'economia rappresentata nella Figura 11.25 ha, per il primo consumatore, le preferenze indicate in figura dalle curve di indifferenza, per il secondo consumatore la funzione di utilità $u_2 = \min\{x_{21}, x_{22}\}$ e $X_i = [0, 4]^2$ e $\omega_i = (2, 2)$ per $i=1, 2$. Un equilibrio *free disposal* è rappresentato da $x_1^* = (0, 0)$, $x_2^* = (2, 2)$ e $(p_1/p_2)^* = 1$. Non vi è nessun equilibrio senza *free disposal* come evidenziato dalle corrispondenti curve prezzo-consumo.

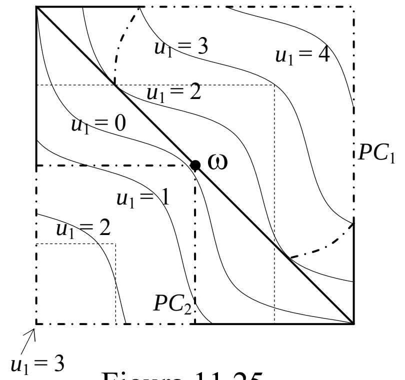


Figura 11.25

Si noti come l'ipotesi che le preferenze non siano saziate localmente sia un elemento cruciale perché l'equilibrio concorrenziale risulti fortemente efficiente, sia per l'equilibrio con *free disposal*, sia per quello senza *free disposal*.[21]

L'analisi del secondo teorema dell'economia del benessere e quella di un'economia di produzione senza *free disposal* non introducono particolari novità rispetto al caso con *free disposal*.[22]

[21] In quest'ultimo caso, sia per l'equilibrio "forte" sia per l'equilibrio "debole".
[22] Per queste ulteriori analisi si può vedere Montesano, 2001.

### 11.13 L'equilibrio concorrenziale per economie con continuità di agenti e l'ipotesi di convessità delle preferenze

L'ipotesi che le funzioni aggregate di eccesso di domanda siano continue rispetto ai prezzi (o, più in generale, che le corrispondenze di eccesso di domanda siano a valori convessi, cioè associno un insieme convesso di vettori di consumo ad ogni vettore di prezzi, ed emicontinue superiormente) è cruciale per la dimostrazione dell'esistenza dell'equilibrio concorrenziale (come indicato nei paragrafi 11.4 e 11.8). Perché essa sia soddisfatta si assume normalmente (ad esempio nel paragrafo 11.8) che le preferenze dei consumatori e gli insiemi di produzione siano convessi. Infatti, con preferenze non convesse la scelta individuale non soddisfa, in generale, la condizione di continuità suindicata e, quindi, non la soddisfa neppure la domanda aggregata. Così anche l'offerta con insiemi di produzione non convessi. Tuttavia, l'ipotesi di convessità delle preferenze e della produzione è piuttosto forte. Molti consumatori hanno preferenze non convesse (ad esempio, un consumatore può preferire sia un bicchiere di vino rosso a mezzo bicchiere di vino rosso e mezzo bicchiere di vino bianco, sia un bicchiere di vino bianco ancora a mezzo bicchiere di vino rosso e mezzo bicchiere di vino bianco). Analogamente per la produzione: ad esempio, gli insiemi di produzione non sono convessi se i rendimenti di scala non sono non crescenti. Si tratta, allora, di vedere se è possibile evitare l'ipotesi di convessità delle preferenze, accettando quindi che non abbia le caratteristiche richieste (non sia cioè una funzione continua o una corrispondenza a valori convessi ed emicontinua superiormente) la domanda individuale, mentre queste caratteristiche sono presenti per la domanda aggregata. Si può ottenere questo risultato considerando una continuità di consumatori, invece che un loro numero discreto, ossia, ad esempio, ponendo $i \in [0,1]$ invece che $i \in \{1, 2, ..., n\}$. (La continuità di consumatori, ad esempio il caso $i \in [0,1]$, non implica che il numero dei consumatori sia infinito. Una situazione analoga si ha quando si considera una distribuzione continua dei redditi personali rappresentata dalla funzione di densità di frequenza $n(y)$ con $y \in [y_{\min}, y_{\max}]$. Questa non implica popolazione infinita: il numero dei redditieri è $N = \int_{y_{\min}}^{y_{\max}} n(y)dy$ e il reddito totale è $Y = \int_{y_{\min}}^{y_{\max}} yn(y)dy$ ). Analogamente per l'offerta della singola impresa e per quella aggregata.

**Esempio 11.1** Si consideri una economia di puro scambio e siano tutti i consumatori uguali, con dotazione $\omega = (\overline{m}, \overline{x})$ e funzione di utilità (quasi-lineare)

$$\begin{cases} u = m + \ln x & \text{per } x \le 1 \\ u = m + 1 + \ln(x-1) & \text{per } x \ge 2 \\ u = m + (x-1) - (x-1)^2 + 2(x-1)^3 - (x-1)^4 & \text{per } x \in (1,2) \end{cases}$$

ove $x \in \mathbb{R}_+$ indica il consumo del bene in esame e $m \in \mathbb{R}_+$ la spesa negli altri beni. La funzione di domanda individuale del bene in esame risulta essere

$$x = p^{-1} \text{ per } p > 1, \quad x = 1 + p^{-1} \text{ per } p < 1, \quad x \in \{1, 2\} \text{ per } p = 1$$

ove $p$ indica il suo prezzo. Questa funzione è discontinua per $p = 1$ (ove è una corrispondenza con due valori isolati). La domanda aggregata, con $n$ (numero intero), è anch'essa discontinua per $p = 1$. L'equilibrio concorrenziale richiede che sia soddisfatta la condizione $nx = n\overline{x}$ per $p \ne 1$, e la condizione $n_1 + 2n_2 = (n_1 + n_2)\overline{x}$ per $p = 1$, ove $n_1$ è il numero di consumatori con $x = 1$ e $n_2$ quello con $x = 2$. Nel discreto, cioè con $n$, $n_1$ e $n_2$ numeri interi, l'equilibrio concorrenziale può esistere o non esistere: se $n = 2$ e $\overline{x} = 7/4$ non vi è nessun equilibrio; se $n = 4$ e $\overline{x} = 7/4$ vi è un equilibrio con $p = 1$, $n_1 = 1$ e $n_2 = 3$; se $\overline{x} = \sqrt{2}$ non vi è equilibrio qualunque sia il numero $n$ (finito) di consumatori. Nel continuo, l'equilibrio esiste in ogni caso ed è rappresentato da $x = \overline{x}$ se $\overline{x} \in \mathbb{R}_+ \backslash (1,2)$, con $p = \dfrac{1}{\overline{x}}$ se $\overline{x} \in [0,1]$ e $p = \dfrac{1}{\overline{x}-1}$ se $\overline{x} \in [2,\infty]$, e da $p = 1$ se $\overline{x} \in [1,2]$ con $x = 1$ per la quota $\alpha_1 = 2 - \overline{x}$ di consumatori e $x = 2$ per la quota $\alpha_2 = 1 - \alpha_1 = \overline{x} - 1$. Nel continuo, infatti, le quote $\alpha_1$ e $\alpha_2$ sono numeri reali qualsiasi nell'intervallo [0,1], mentre nel discreto devono essere numeri razionali, inoltre pari al rapporto tra un numero intero (non negativo e non superiore a $n$) e il numero $n$ di consumatori. Nella Figura 11.26 è rappresentata la funzione di domanda individuale; nella Figura 11.27 vi sono le funzioni aggregate di domanda e di offerta per $n = 2$ e $\overline{x} = 7/4$; e nella Figura 11.28 le funzioni di domanda e offerta per il caso con continuità di consumatori.

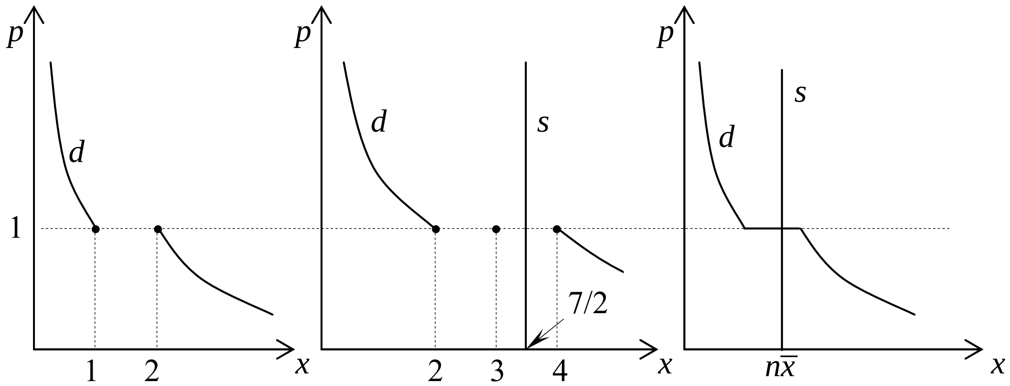


Figura 11.26 Figura 11.27 Figura 11.28

L'analisi dell'equilibrio generale con continuità di agenti è stata introdotta da Aumann (1964 e 1966). Indicando con $I$ l'insieme dei consumatori, l'economia di puro scambio (ossia, del tipo indicato nel paragrafo 11.3) diviene $\mathcal{E} = (\langle X(i), \succsim_i \rangle, \omega(i),\ i \in I)$, cioè presenta l'unica variazione rispetto al caso discreto che si ha $i \in I$ invece che $i \in \{1,...,n\}$ (oltre al mutamento di notazione che pone $i$ come argomento di una funzione anziché come pedice). La scelta individuale di consumo è ancora

$$d(p;i) = \{x(i) \in B(p;i) : x(i) \succsim_i x(i)' \text{ per ogni } x(i)' \in B(p;i)\}$$

ove $B(p;i) = \{x(i) \in X(i) : px(i) \leq p\omega(i)\}$ è il vincolo di bilancio, e continuano a valere tutte le proprietà già note per la domanda individuale. E' invece diversa la condizione di realizzabilità, che ora richiede

$$\int_{i \in I} d(p;i)di = \int_{i \in I} \omega(i)di$$

(ossia, nel continuo, la domanda aggregata è l'integrale, invece che la somma, delle domande individuali).

Le peculiarità dell'analisi dell'equilibrio generale con un continuo di agenti sono connesse a questa condizione, cioè alla presenza di un integrale (invece che di una somma). L'ipotesi cruciale è che l'insieme $I$ dia luogo a spazi di misura (nel senso di Lebesgue) non atomici. Ossia deve essere possibile suddividere ogni sottoinsieme di $I$ di misura positiva (rispetto alla quantità domandata di un bene o alla dotazione) in due sottoinsiemi entrambi di misura positiva. In altri termini, non vi è nessun $i \in I$ che abbia una dotazione finita di beni o consumi quantità finite di beni, può solo avere e consumare quantità infinitesime. Con questa ipotesi, che rappresenta l'assenza di agenti con potere di mercato, è possibile fare a meno dell'ipotesi di convessità delle preferenze individuali. Essa sostituisce l'ipotesi di convessità delle preferenze per dimostrare che la corrispondenza di domanda associa un insieme convesso di consumi ad ogni vettore di prezzi. Con le altre consuete ipotesi si ottiene poi la dimostrazione dell'esistenza dell'equilibrio.[23]

Un caso notevole di non convessità è determinato dalla presenza di beni indivisibili, la cui quantità, cioè, è rappresentata da un numero intero (sono, ad esempio, indivisibili le automobili). In questo caso l'insieme di consumo $X_i$ di ogni consumatore è non convesso (non sono non convesse soltanto le preferenze) e la corrispondenza individuale di domanda di un bene indivisibile ha codominio composto solo da numeri interi. La presenza di beni indivisibili può determinare l'assenza dell'equilibrio concorrenziale, come nell'esempio seguente.

**Esempio 11.2** In una economia di puro scambio vi siano due consumatori, quattro beni indivisibili e un bene infinitamente divisibile, con $X_i = \{0,1\}^4 \times \mathbb{R}_+$ per $i = 1,2$. Siano le dotazioni dei due consumatori rispettivamente pari a $\omega_1 = (1,1,0,0,1)$ e $\omega_2 = (0,0,1,1,1)$ e le loro preferenze rappresentate dalle funzioni di utilità

$$u_1 = 2(x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{11}x_{13} + x_{12}x_{14}) + x_{11}x_{12} + \frac{1}{2}x_{13}x_{14} + \frac{1}{5}(x_{11}x_{14} + x_{12}x_{13}) + \frac{4m_1}{1+m_1}$$

$$u_2 = 2(x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{21}x_{24} + x_{22}x_{23}) + x_{23}x_{24} + \frac{1}{2}x_{21}x_{22} + \frac{1}{5}(x_{21}x_{23} + x_{22}x_{24}) + \frac{4m_2}{1+m_2}$$

ove $x_{ih} \in \{0,1\}$ indica la quantità di un bene indivisibile, per $i = 1,2$ e $h = 1,2,3,4$, e $m_i$ la quantità del bene divisibile, per $i = 1,2$. L'allocazione iniziale $(\omega_1, \omega_2)$ è Pareto efficiente, con $u_1(\omega_1) = u_2(\omega_2) = 7$. Infatti, ogni altra allocazione realizzabile riduce l'utilità di almeno un consumatore (ogni paniere di beni con meno di due unità di beni indivisibili è peggiore della dotazione, determinando una utilità $u_i \le 2 + \frac{8}{3} < 7 = u_i(\omega_i)$; considerando le allocazioni realizzabili con due unità di beni indivisibili per consumatore, si hanno le seguenti utilità per le allocazioni realizzabili

$$u_1(1,1,0,0,m_1) = 5 + \frac{4m_1}{1+m_1}, \qquad u_2(0,0,1,1,m_2) = 5 + \frac{4m_2}{1+m_2}, \qquad \text{con} \quad m_1 + m_2 = 2;$$

$$u_1(1,0,1,0,m_1) = 6 + \frac{4m_1}{1+m_1}, \qquad u_2(0,1,0,1,m_2) = \frac{21}{5} + \frac{4m_2}{1+m_2}, \qquad \text{con} \quad m_1 + m_2 = 2;$$

$$u_1(1,0,0,1,m_1) = \frac{21}{5} + \frac{4m_1}{1+m_1}, \qquad u_2(0,1,1,0,m_2) = 6 + \frac{4m_2}{1+m_2}, \qquad \text{con} \quad m_1 + m_2 = 2;$$

$$u_1(0,1,1,0,m_1) = \frac{21}{5} + \frac{4m_1}{1+m_1}, \qquad u_2(1,0,0,1,m_2) = 6 + \frac{4m_2}{1+m_2}, \qquad \text{con} \quad m_1 + m_2 = 2;$$

$$u_1(0,1,0,1,m_1) = 6 + \frac{4m_1}{1+m_1}, \qquad u_2(1,0,1,0,m_2) = \frac{21}{5} + \frac{4m_2}{1+m_2}, \qquad \text{con} \quad m_1 + m_2 = 2;$$

$$u_1(0,0,1,1,m_1) = \frac{9}{2} + \frac{4m_1}{1+m_1}, \qquad u_2(1,1,0,0,m_2) = \frac{9}{2} + \frac{4m_2}{1+m_2}, \qquad \text{con} \quad m_1 + m_2 = 2;$$

[23] Una descrizione abbastanza approfondita del modello con continuità di agenti è fornita da Ellickson (1993: il modello di Aumann è presentato nel Cap. 3, pp. 99 e ss., e il problema dell'esistenza dell'equilibrio è discusso alle pp. 352-353).

da cui risulta che non vi sono allocazioni realizzabili migliori di quella iniziale per entrambi i consumatori (poiché le disuguaglianze $6+\frac{4m_i}{1+m_i}>7$ e $\frac{21}{5}+\frac{4m_j}{1+m_j}>7$ sono incompatibili tra loro per $m_i+m_j=2$). Ne consegue che soltanto l'allocazione iniziale potrebbe essere l'allocazione di equilibrio concorrenziale. Però non lo è. Infatti, il paniere di beni scelto dal primo consumatore è $\omega_1=(1,1,0,0,1)$ solo se $p_3>p_2$ e $p_4>p_1$ (ove $p_h$, con $h=1,2,3,4$, sono i prezzi dei beni indivisibili) poiché $u_1(1,0,1,0,1)>u_1(\omega_1)$ e $u_1(0,1,0,1,1)>u_1(\omega_1)$. Analogamente, il paniere di beni scelto dal secondo consumatore è $\omega_2=(0,0,1,1,1)$ solo se $p_1>p_3$ e $p_2>p_4$ poiché $u_2(1,0,0,1,1)>u_2(\omega_2)$ e $u_2(1,0,0,1,1)>u_2(\omega_2)$. Però, le disuguaglianze indicate per i prezzi sono incompatibili tra loro, richiedendo le prime $p_3+p_4>p_2+p_1$ e le seconde $p_1+p_2>p_3+p_4$. Non vi sono perciò per l'economia in esame equilibri concorrenziali (ne consegue anche che non si applica il secondo teorema dell'economia del benessere: vi è una allocazione efficiente che non è sostenibile da un equilibrio concorrenziale).

La dimostrazione dell'esistenza dell'equilibrio può essere ottenuta, in presenza di beni indivisibili, assumendo che questi siano trascurabili, nel senso che vi sono beni divisibili così apprezzati dai consumatori (ed esistenti in quantità sufficiente) che un accrescimento della loro quantità nel paniere di consumo è in grado di compensare ogni diminuzione della quantità dei beni indivisibili. Si può ottenere così un equilibrio approssimato (Broome, 1972). L'equilibrio viene poi ottenuto assumendo la presenza di un continuo di individui e che i beni divisibili siano distribuiti diffusamente (Mas-Colell, 1977), sempre che sia finito il numero dei beni indivisibili. Ad esempio, con riferimento all'esempio precedente, si assuma che vi sia una continuità di agenti, con popolazione composta in proporzione $\alpha_1\in[0,1]$ da agenti del tipo 1 (ossia con dotazione e preferenze uguali a quelle del primo consumatore) e $\alpha_2=1-\alpha_1$ da agenti del tipo 2 e sia $\alpha_2\geq\alpha_1$ (con $\alpha_2\leq\alpha_1$ si avrà un equilibrio analogo). Risulta esistere una molteplicità di equilibri concorrenziali. Ad esempio, vi sono gli equilibri concorrenziali con prezzi $p_1=p_2>\frac{7}{3}$ e $p_3=p_4=p_1-\frac{2}{3}$ e allocazione rappresentata dal paniere di beni $(1,0,1,0,\frac{5}{3})$ per una quota di consumatori (tutti del primo tipo) pari a $\frac{1}{2}\alpha_1$, dal paniere $(0,1,0,1,\frac{5}{3})$ per la quota residua, sempre pari a $\frac{1}{2}\alpha_1$, di consumatori del primo tipo, dal paniere $(0,0,1,1,1)$ per la quota $\alpha_2-\alpha_1$ di consumatori del secondo tipo, dal paniere $(0,1,1,0,\frac{1}{3})$ per una quota pari a $\frac{1}{2}\alpha_1$ di consumatori del secondo tipo, e dal paniere $(1,0,0,1,\frac{1}{3})$ per la quota residua, pari a $\frac{1}{2}\alpha_1$, di consumatori (del secondo tipo). I consumatori del primo tipo conseguono in equilibrio l'utilità $u_1=\frac{17}{2}$ e quelli del secondo tipo $u_2=7$.

### 11.14 L'equilibrio concorrenziale con continuità di beni. L'economia dello spazio: localizzazione ed estensione.

La presenza di un continuo di agenti con un numero finito di beni favorisce le possibilità di equilibrio concorrenziale, rendendo più spessi i mercati. Infatti, come si è indicato, la presenza di un continuo di agenti consente di fare a meno dell'ipotesi di convessità delle preferenze. Cosa accade se si introduce, invece, un continuo di beni, lasciando finito il numero di agenti?

Un caso di un continuo di beni è già stato visto esaminando la scelta intertemporale, in cui (nei paragrafi 6.2-3 e 4) il consumo e la produzione sono stati introdotti come funzioni continue del tempo. Peraltro si può avere un continuo di beni con riferimento allo spazio (ossia alla loro localizzazione) o ad altri elementi qualitativi. L'esistenza dell'equilibrio concorrenziale per una economia con continuità di beni (infinitamente divisibili) e con un numero finito di agenti non richiede ipotesi particolari oltre quelle consuete (in particolare di convessità), dal punto di vista economico. Richiede però una strumentazione matematica abbastanza complessa, trattandosi di spazi di beni a infinite dimensioni. Questo tipo di analisi fuoriesce dai limiti di queste lezioni, per cui non viene presentata (chi è interessato trova una eccellente presentazione in Mas-Colell e Zame, 1991).

Un problema molto più complesso è rappresentato dal caso in cui nell'economia vi è la doppia continuità, vi è cioè un continuo di agenti e un continuo di beni. (Queste economie sono indicate come *large-square economies*. Al riguardo, Ostroy, 1984).

Finora si è fatto cenno a beni, che pur costituendo un continuo, sono infinitamente divisibili. Ad esempio, considerando un continuo di beni in funzione del punto dello spazio in cui sono disponibili, la condizione di realizzabilità richiede che la quantità domandata dagli agenti in ciascun punto dello spazio non superi la quantità ivi disponibile. Però l'ipotesi di perfetta divisibilità non sempre può essere introdotta. Si consideri, ad esempio, lo spazio come un bene (serve spazio per un'abitazione, un stabilimento industriale, ecc.). Ora, lo spazio deve essere considerato, in molte economie, localmente indivisibile. E' così se si ipotizza che in ogni localizzazione lo spazio disponibile può essere posseduto/usato da un agente soltanto. Questa indivisibilità è locale, nel senso che un certo spazio può essere suddiviso infinitamente e quindi usato da una numerosità grande quanto si vuole di agenti, però con localizzazioni differenti. In ogni localizzazione usa spazio un solo agente. Quindi, mentre non tutti gli agenti possono avere un quadro di Picasso (i quadri di Picasso sono beni indivisibili), tutti possono avere spazio per abitazione (più o meno esteso, ma non nella stessa precisa localizzazione). Lo spazio disponibile è, allora, rappresentato da un insieme (ad esempio nello spazio fisico a tre dimensioni) e la condizione di realizzabilità richiede che l'allocazione sia una partizione dell'insieme. Ossia, indicando lo spazio complessivamente disponibile con l'insieme $A \subset \mathbb{R}^d$ (ove $d \in \{1,2,3\}$ è la dimensione fisica dello spazio in esame) e con $2^A$ il suo insieme potenza (cioè, l'insieme di tutti i sottoinsiemi di $A$), una allocazione realizzabile tra *n* agenti è rappresentata dal vettore di sottoinsiemi $(E_i)_{i=1}^n$, con $E_i \in 2^A$ per $i = 1,...,n$, $E_i \cap E_j = \varnothing$ per ogni coppia $i, j \in \{1,...,n\}$ con $i \neq j$, e $\bigcup_{i=1}^n E_i = A$ (oppure $\subseteq A$, nel caso con *free disposal*). Se vi è una continuità di agenti, con $i \in [0,1]$, ciascuno dei quali sceglie spazio in una sola localizzazione, allora, indicando con la coppia $(s(i), x(i))$ l'estensione dello spazio e la localizzazione dello spazio di pertinenza dell'agente *i* (perciò, con $s(i) \in \mathbb{R}_+$ e $x(i) \in A$) e con $m(A)$ l'estensione complessiva di *A*, la condizione di realizzabilità richiede che le funzioni $(s(i), x(i))$ soddisfino le condizioni $x(i) \in A$ per ogni $i \in [0,1]$, $x(i) \neq x(j)$ per ogni coppia $i, j \in [0,1]$ con $i \neq j$, e $\int_{i \in [0,1]} s(i) = m(A)$ (oppure $\leq m(A)$).

Il semplice esempio seguente mostra la complessità dell'analisi dell'equilibrio concorrenziale spaziale nel continuo.

**Esempio 11.3** Si consideri una economia in cui l'unico bene è lo spazio e lo spazio totale disponibile sia unidimensionale e rappresentato da un intervallo, ossia $A=[0,1]$. Vi sia una continuità di agenti, tutti con la stessa funzione di utilità (che ha per oggetto l'estensione e la localizzazione dello spazio di pertinenza dell'agente), però con dotazioni diverse. La funzione di utilità per agente è, perciò, del tipo $u:\mathbb{R}_+\times A\to\mathbb{R}$, quindi con $u=u(s,x)$ ove $s\in\mathbb{R}_+$ indica l'estensione dello spazio e $x\in A$ la localizzazione. Nell'esempio si pone $u=-\frac{1}{s}-\ln(1+x)$. La dotazione per agente non è uguale per tutti gli agenti: non può essere la stessa poiché agenti diversi non possono avere nella loro dotazione spazio in una stessa localizzazione. Perciò, $\omega(i)=(\sigma(i),\xi(i))$, con $i\in[0,1]$. Nell'esempio, si pone $\sigma=\frac{1}{2}(1+i)^2$ e $\xi=i$. L'equilibrio è rappresentato dalle funzioni $s(i),x(i),r(x)$ che indicano rispettivamente l'allocazione dello spazio, cioè l'estensione e la localizzazione dello spazio per ogni agente, e il prezzo dello spazio per ogni localizzazione, cioè la distribuzione della rendita. La determinazione dell'equilibrio richiede, come al solito, l'individuazione della scelta degli agenti e l'introduzione della condizione di realizzabilità (che è peculiare per lo spazio per l'ipotesi di indivisibilità locale). La scelta è rappresentata dalla soluzione del problema $\max\limits_{(s(i),x(i))\in B(r(x);i)} u(s(i),x(i))$, ove $B(r(x);i)=\{s(i)\in\mathbb{R}_+,x(i)\in[0,1]:s(i)r(x(i))\le\sigma(i)r(\xi(i))\}$ è il vincolo di bilancio. Introducendo la funzione lagrangiana (sottintendendo la dipendenza della scelta da $i$)

$$\mathrm{L}(\lambda,s,x)=u(s,x)+\lambda(\sigma r(\xi)-sr(x))$$

si ottengono per l'esempio in esame (ove $u=-\frac{1}{s}-\ln(1+x)$) le tre condizioni del primo ordine

$$\sigma r(\xi)-sr(x)=0,\qquad \frac{1}{s^2}-\lambda r(x)=0,\qquad -\frac{1}{1+x}-\lambda sr'(x)=0;$$

e la condizione del secondo ordine

$$\begin{vmatrix} 0 & -r(x) & -sr'(x) \\ -r(x) & -2s^{-3} & -\lambda r'(x) \\ -sr'(x) & -\lambda r'(x) & \frac{1}{(1+x)^2}-\lambda sr''(x) \end{vmatrix}\ge 0$$

Allora, le condizioni del primo ordine richiedono che siano soddisfatte le due equazioni

$$\sigma(i)r(\xi(i))-s(i)r(x(i))=0,\qquad r'(x(i))=-\frac{s(i)}{1+x(i)}r(x(i)),$$

e la condizione del secondo ordine (una volta posto $\lambda=\frac{1}{s^2r(x)}$ e) richiede

$$-\frac{1}{(1+x(i))^2}(r(x(i))^2+\frac{1}{s(i)}r(x(i))r''(x(i))\ge 0$$

La condizione di realizzabilità delle scelte richiede che l'estensione di spazio domandata in una certa localizzazione sia uguale a quella ivi disponibile e che lo stesso si verifichi per la dotazione. Considerando la dotazione, gli agenti di tipo $i$ hanno spazio nella localizzazione

$\xi(i)$, ove posseggono l'estensione $\sigma(i)$. Indicando con $n(i)$ la densità di agenti di tipo $i$, per cui $n(i)di$ è il numero di agenti di tipo compreso tra $i$ e $i+di$ e $\sigma(i)n(i)di$ l'estensione di spazio che essi posseggono, si ha che questa estensione deve coincidere con l'estensione disponibile in quella localizzazione, che è $|d\xi(i)|$. Si ha quindi che $\sigma(i)n(i)di = |d\xi(i)|$, ovvero $n(i) = \frac{1}{\sigma(i)}\left|\frac{d\xi(i)}{di}\right|$. Nell'esempio, essendo $\sigma = \frac{1}{2}(1+i)^2$ e $\xi = i$, risulta $n(i) = \frac{2}{(1+i)^2}$. Considerando ora la domanda, si ha, analogamente, la condizione $s(i)n(i)di = |dx(i)|$, per cui, essendo $n(i) = \frac{1}{\sigma(i)}\left|\frac{d\xi(i)}{di}\right|$, risulta la condizione $\frac{1}{s(i)}\left|\frac{dx(i)}{di}\right| = \frac{1}{\sigma(i)}\left|\frac{d\xi(i)}{di}\right|$. Nell'esempio, essendo $\sigma = \frac{1}{2}(1+i)^2$ e $\xi = i$, risulta la condizione

$$\left|\frac{dx(i)}{di}\right| = \frac{2s(i)}{(1+i)^2}.$$

Tenendo conto anche delle condizioni del primo ordine e ponendo in esse i dati dell'esempio in esame, si ha allora il seguente sistema di tre equazioni

$$\frac{1}{2}(1+i)^2 r(i) - s(i)r(x(i)) = 0,$$

$$r'(x(i)) = -\frac{s(i)}{1+x(i)} r(x(i)),$$

$$\left|\frac{dx(i)}{di}\right| = \frac{2s(i)}{(1+i)^2}$$

nelle tre funzioni incognite $s(i), x(i), r(x)$. Questo sistema differenziale ha la caratteristica di includere le funzioni incognite come funzioni di funzioni. Per l'esempio in esame, questo sistema ammette due soluzioni:

$$s = \frac{1}{2}(1+i)^2, \qquad x = i, \qquad r = r_0 e^{-\frac{1}{4}(2x+x^2)}$$

e

$$s = 1, \qquad x = \frac{1-i}{1+i}, \qquad r = \frac{r_0}{1+x}.$$

Però la prima soluzione non soddisfa la condizione del secondo ordine, che è invece soddisfatta dalla seconda soluzione. Risulta allora esservi un unico equilibrio concorrenziale, rappresentato dalla seconda soluzione, che vede tutti gli agenti con la stessa estensione di spazio (che era invece differente nella dotazione), con localizzazione invertita rispetto a quella della dotazione (l'agente $i = 0$ ha localizzazioni $\xi = 0$ e $x = 1$, l'agente $i = 1$ localizzazioni $\xi = 1$ e $x = 0$, e le funzioni $\xi = i$ e $x = \frac{1-i}{1+i}$ sono l'una crescente e l'altra decrescente) e con distribuzione della rendita decrescente con *x* (come atteso, poiché l'utilità è decrescente rispetto alla localizzazione $x$).[24]

[24] Il tema trattato da questo esempio ricade nell'ambito dell'economia dello spazio, che include l'economia regionale e l'economia urbana. Al riguardo Mills ed., 1987, e Papageorgiou e Pines, 1999. L'esempio è del tipo trattato da Montesano, 1993.