PARTE SECONDA: L'ALLOCAZIONE

Cap. 8 L'ANALISI DELL'EFFICIENZA

La seconda ipotesi fondamentale della teoria economica richiede, come già indicato nel Capitolo 1, che le azioni degli agenti siano *compatibili* (la prima ipotesi richiede che esse siano intenzionali, cioè *scelte*). Si tratta, quindi, di prendere esplicitamente in considerazione l'insieme degli agenti dell'economia, invece che un singolo agente come nella Parte Prima, che analizza la scelta e in cui la presenza degli altri agenti è sullo sfondo (tenendo presente che le loro azioni influiscono sull'insieme delle azioni possibili per l'agente in esame e, talvolta, sulle sue preferenze). Le azioni degli agenti conducono ad un'*allocazione* o *stato dell'economia*, che è costituito dalla distribuzione dei beni presenti nell'economia tra gli agenti. In questo capitolo sono esaminati in particolare due aspetti delle allocazioni, la *realizzabilità* (vengono, cioè, distinte le allocazioni realizzabili da quelle impossibili) e l'*efficienza* (viene, cioè, introdotto un criterio di preferenza sociale che distingue le allocazioni realizzabili efficienti da quelle inefficienti).

Conviene, tuttavia, descrivere dapprima brevemente le cause che possono modificare un'allocazione, per mettere in evidenza quelle studiate con l'analisi economica. Possono modificare un'allocazione forze esogene (cioè, non poste in essere dagli agenti dell'economia al fine di modificare l'allocazione, come eventi naturali fisici –terremoti, uragani, ecc.–, individuali –nascita, morte, malattie, ecc.– e sociali)[1] e le scelte degli agenti. Le azioni che modificano l'allocazione possono essere unilaterali o multilaterali, a seconda che l'azione consegua dalla scelta di un solo agente o di due o più agenti. Consumo e produzione possono essere azioni unilaterali: si pensi, per il consumo, alla distruzione del bene determinata dal suo uso individuale e, per la produzione, all'economia di Robinson Crusoe. Anche gli atti unilaterali possono avere effetti sugli altri agenti, intenzionalmente o non intenzionalmente. Le azioni violente, come il furto e

[1] L'economista che ha più sottolineato l'importanza dell'esogeneità, fornendone una rappresentazione completa e ragionata, è stato Demaria, in particolare 1974.

la rapina, sono azioni unilaterali volte a modificare l'allocazione dei beni. Sono spesso, invece, solo apparentemente unilaterali le azioni coercitive, eseguite dalle autorità pubbliche, attraverso, ad esempio, l'imposizione fiscale, se si ritiene (come decritto dalle dottrine contrattualistiche dello stato) che i cittadini concordino con la presenza del potere coercitivo al fine di ottenere beni pubblici. Sono tipicamente bilaterali o multilaterali gli scambi sul mercato ed anche i trasferimenti di beni sotto forma di doni (se il trasferimento richiede il consenso di chi riceve il dono). L'analisi economica studia tradizionalmente le azioni di produzione e di scambio e l'azione coercitiva fiscale (al riguardo, la scienza delle finanze). Tuttavia gli strumenti dell'analisi economica, in particolare la teoria dei giochi, possono essere utilizzati per esaminare anche altri tipi di azioni, ad esempio quelle violente (al riguardo, Hirschleifer, 2001). In ogni caso, la determinazione degli scambi e delle produzioni tiene conto, esplicitamente o implicitamente (tramite le preferenze individuali e gli insiemi di produzione), di tutto ciò che influisce sulle allocazioni, anche se di molti di questi fattori non ne viene fornita la teoria. Ad esempio, l'analisi economica si occupa delle assicurazioni sui danni provocati da eventi climatici, pur non occupandosi di questi.

8.1 L'insieme delle allocazioni realizzabili

Un'allocazione è *realizzabile* (o *eseguibile*) se richiede quantità di beni compatibili con le risorse disponibili e con le possibilità di produzione. Prima, però, di precisare la condizione di realizzabilità, conviene introdurre alcune definizioni, utili nelle analisi successive.

Definizione 8.1 (*Economia*) Un'economia è composta da consumatori (rappresentati dai loro insiemi di consumo e dai loro sistemi di preferenza), da produttori (rappresentati dai loro insiemi di produzione) e dalle risorse disponibili.

Quindi, un'*economia di puro scambio* (cioè, in assenza di produzione) è rappresentata da $\mathcal{E} = (\langle X_i, \succsim_i \rangle, \Omega, i = 1,\ldots, n)$, ove $\langle X_i, \succsim_i \rangle$ è il sistema di preferenza del consumatore i-esimo sul suo insieme di consumo $X_i \subset \mathbb{R}^k$ (ove k indica il numero dei beni), $\Omega \in \mathbb{R}^k_+$ è il vettore delle risorse dell'economia e n è il numero dei consumatori.

Un'*economia di produzione* è rappresentata da $\mathcal{E} = (\langle X_i, \succsim_i \rangle, Y_j, \Omega, i = 1,\ldots, n, j = 1,\ldots, m)$, ove, oltre ai simboli già indicati, $Y_j \subset \mathbb{R}^k$ è l'insieme di produzione j-esimo e m è il numero dei produttori.

Si noti come un'economia di puro scambio sia un caso particolare di un'economia di produzione. Un'economia di produzione diviene di puro scambio se $Y_j = \{0\}$ per ogni $j = 1,\ldots, m$.

Definizione 8.2 (*Allocazione* o *stato di un'economia*) Un'allocazione z è rappresentata, per un'economia di puro scambio, dai consumi $z=(x_i)_{i=1}^n$, con $x_i \in X_i$ per $i = 1,\ldots, n$, e, per un'economia di produzione, dai consumi e le produzioni $z=((x_i)_{i=1}^n,(y_j)_{j=1}^m)$, con $x_i \in X_i$ per $i = 1,\ldots, n$ e $y_j \in Y_j$ per $j = 1,\ldots, m$.

Definizione 8.3 (*Free disposal*) L'ipotesi di *free disposal* richiede che sia possibile trasformare un paniere di beni in un paniere meno ricco. Per un consumatore ciò significa che può trasformare un paniere $x_i \in \mathbb{R}^k$ in un qualsiasi paniere $x_i' \leq x_i$, con $x_i' \in X_i$ (ove X_i è il suo insieme di consumo). Per un produttore, come indicato nel Paragrafo 5.1, che il suo insieme di produzione soddisfa la condizione $Y_j - \mathbb{R}_+^k \subset Y_j$ (cioè, se $y_j \in Y_j$ e $y_j' \leq y_j$, allora $y_j' \in Y_j$). Questa condizione, se $0 \in Y_j$, implica $-\mathbb{R}_+^k \subset Y_j$ (cioè, l'insieme di produzione contiene l'ortante negativo). Per un'economia l'ipotesi di *free disposal* significa che se è realizzabile l'allocazione $((x_i)_{i=1}^n,(y_j)_{j=1}^m)$, allora è realizzabile ogni allocazione $((x_i')_{i=1}^n,(y_j')_{j=1}^m)$ con $x_i' \leq x_i$ e $y_j' \leq y_j$, ove $x_i' \in X_i$ e $y_j' \in Y_j$ per $i = 1,\ldots, n$ e $j = 1,\ldots, m$.

Definizione 8.4 (*Condizione di realizzabilità delle azioni* e *insieme delle allocazioni realizzabili*) La condizione di realizzabilità delle azioni, in assenza di *free disposal*, richiede che i consumi siano pari alla somma tra produzioni e risorse disponibili, sia cioè soddisfatta la condizione

$$\sum_{i=1}^n x_i = \sum_{j=1}^m y_j + \Omega$$

ove $x_i \in X_i$ e $y_j \in Y_j$ sono le azioni dell'*i*-esimo consumatore e del *j*-esimo produttore e $((x_i)_{i=1}^n,(y_j)_{j=1}^m)$ è una allocazione. Con l'ipotesi di *free disposal*, la condizione di realizzabilità è rappresentata dalla disuguaglianza

$$\sum_{i=1}^n x_i \leq \sum_{j=1}^m y_j + \Omega$$

In assenza di produzione, si ha, rispettivamente, $\sum_{i=1}^n x_i = \Omega$ e $\sum_{i=1}^n x_i \leq \Omega$. L'insieme di tutte le allocazioni che soddisfano la condizione di realizzabilità definisce l'insieme delle allocazioni realizzabili

$$C = \left\{(x_i)_{i=1}^n,(y_j)_{i=1}^m : x_i \in X_i,\ y_j \in Y_j,\ \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{j=1}^m y_j + \Omega\right\}$$

che diviene, con l'ipotesi *free disposal*,

$$C_{FD} = \left\{(x_i)_{i=1}^n,(y_j)_{i=1}^m : x_i \in X_i,\ y_j \in Y_j,\ \sum_{i=1}^n x_i \leq \sum_{j=1}^m y_j + \Omega\right\}$$

Ponendo, in queste definizioni, $y_j = 0$ per ogni $j = 1,\ldots, m$, si hanno i corrispondenti insiemi delle allocazioni realizzabili per una economia di puro scambio. Si noti come $C \subseteq C_{FD}$.

Si introducono ora alcune proprietà dell'insieme delle allocazioni realizzabili.

Proposizione 8.1 Se gli insiemi di consumo X_i e di produzione Y_j sono chiusi, per ogni $i = 1,\ldots, n$ e $j = 1,\ldots, m$, allora anche gli insiemi delle allocazioni realizzabili C e C_{FD} sono chiusi. Se gli insiemi X_i e Y_j sono convessi, per ogni $i = 1,\ldots, n$ e $j = 1,\ldots, m$, allora anche gli insiemi C e C_{FD} sono convessi. Se gli insiemi di consumo X_i sono limitati inferiormente (cioè, esiste un $\overline{x}_i \in \mathbb{R}^k$ per cui $x_i \geq \overline{x}_i$ per ogni $x_i \in X_i$ e $i = 1,\ldots, n$) e l'insieme aggregato di produzione $Y = \Sigma^m_{j=1} Y_j$ non ammette quantità illimitate di output per quantità limitate di input,[2] allora gli insiemi C e C_{FD} sono limitati.

Dimostrazione. Gli insiemi C e C_{FD} sono, rispettivamente, l'intersezione degli insiemi $\{((x_i)^n_{i=1}, (y_j)^m_{i=1}) \in \mathbb{R}^{k(n+m)} : \sum^n_{i=1} x_i = \sum^m_{j=1} y_j + \Omega\}$ e $\{((x_i)^n_{i=1}, (y_j)^m_{i=1}) \in \mathbb{R}^{k(n+m)} : \sum^n_{i=1} x_i \leq \sum^m_{j=1} y_j + \Omega\}$, che sono chiusi e convessi, con l'insieme $\Pi^n_{i=1} X_i \times \Pi^m_{j=1} Y_j$. Allora, essendo l'intersezione di insiemi chiusi un insieme chiuso e l'intersezione di insiemi convessi un insieme convesso, gli insiemi C e C_{FD} sono chiusi se sono chiusi gli insiemi X_i e Y_j per ogni $i = 1,\ldots, n$ e $j = 1,\ldots, m$, e convessi se questi insiemi sono convessi. La limitatezza dell'insieme C_{FD} (e, quindi, dell'insieme $C \subseteq C_{FD}$), per una economia di puro scambio, risulta dalle condizioni $x_i \geq \overline{x}_i$ per ogni $x_i \in X_i$ e $i = 1,\ldots, n$ e $\sum^n_{i=1} x_i \leq \Omega$, che implicano $\overline{x}_i \leq x_i \leq \Omega - \Sigma^n_{s=1, s\neq i} x_s \leq \Omega - \Sigma^n_{s=1, s\neq i} \overline{x}_s$. Per una economia di produzione, gli input di produzione sono limitati per la medesima condizione: ponendo $y = (q, -x)$ per ogni $y \in Y$, ove $q \geq 0$ è il vettore degli output e $x \geq 0$ quello degli input, risulta $0 \leq x_h \leq \Omega_h - \Sigma^n_{i=1} \overline{x}_{ih}$ per ogni input. Infine, la limitatezza degli input implica, per ipotesi, quella degli output. □

Finora si è ipotizzato che gli insiemi di consumo X_i e di produzione Y_j, per $i = 1,\ldots, n$ e $j = 1,\ldots, m$, siano "dati". Non si può, però, escludere che essi dipendano dall'allocazione, che vi siano, cioè, esternalità. Ossia, indicando la generica allocazione con $z = ((x_i)^n_{i=1}, (y_j)^m_{j=1})$, gli insiemi di consumo e di produzione sono, in generale, sue funzioni, cioè, sono "date" le funzioni che determinano gli insiemi di consumo $X_i(z)$ e quelli di produzione $Y_j(z)$, per $i = 1,\ldots, n$, $j = 1,\ldots, m$, per cui l'insieme delle allocazioni (che si suppone non vuoto) è $Z = \{z \in \mathbb{R}^{k(n+m)} : z \in \Pi^n_{i=1} X_i(z) \times \Pi^m_{j=1} Y_j(z)\}$ (senza esternalità, $Z = \Pi^n_{i=1} X_i \times \Pi^m_{j=1} Y_j$).[3]

Le definizioni e la proposizione precedenti possono essere facilmente modificate in modo da includere le esternalità e si ha

$$C = \left\{((x_i)^n_{i=1}, (y_j)^m_{i=1}) \in Z : \sum^n_{i=1} x_i = \sum^m_{j=1} y_j + \Omega\right\}$$

$$C_{FD} = \left\{((x_i)^n_{i=1}, (y_j)^m_{i=1}) \in Z : \sum^n_{i=1} x_i \leq \sum^m_{j=1} y_j + \Omega\right\}$$

Nel seguito C e C_{FD} sono sempre, per ipotesi, non vuoti, chiusi e limitati.

[2] Una condizione alternativa (più restrittiva) richiede che Y sia chiuso, convesso e soddisfi la condizione $Y \cap \mathbb{R}^k_+ = \{0\}$ (cioè, l'inazione sia possibile e non siano possibili vettori semipositivi di produzione). Se si richiede che siano limitate le produzioni delle singole imprese, non soltanto quella aggregata, occorre aggiungere l'ipotesi di irreversibilità, cioè, $Y \cap (-Y) = \{0\}$.

[3] Ad esempio, un'impresa che inquina influenza gli insiemi di consumo e di produzione di molti agenti, per cui questi insiemi risultano dipendere dalla sua produzione.

8.2 L'insieme delle allocazioni efficienti e quello delle utilità massimali

Per ogni economia, rappresentata, in generale, da $\mathcal{E} = (\langle Z, \succsim_i \rangle, Z, \Omega, i = 1,\ldots, n)$, è possibile definire una relazione sociale di preferenza, secondo il criterio di unanimità. Ossia, un'allocazione $z' \in Z$ è *Pareto-superiore* (o *debolmente Pareto-superiore*) all'allocazione $z \in Z$ se $z' \succsim_i z$ per ogni $i = 1,\ldots, n$ e $z' \succ_i z$ per almeno un i ; è *fortemente Pareto-superiore* se $z' \succ_i z$ per ogni $i = 1,\ldots, n$. Il sistema sociale di preferenza che ne consegue è transitivo e continuo se sono tali i sistemi individuali di preferenza $\langle Z, \succsim_i \rangle$, però non è completo (non vi è relazione sociale di preferenza tra z' e z se $z' \succ_i z$ per qualche i e $z' \prec_i z$ per qualche altro i). Le allocazioni realizzabili massimali rispetto a questo sistema sociale di preferenza sono definite *efficienti* o *Pareto-ottimali*. (E' stata implicitamente presa in considerazione la possibilità che vi siano esternalità del tipo più generale possibile, per cui non solo gli insiemi di consumo e di produzione possono dipendere dall'allocazione, ma può anche accadere che le preferenze dei consumatori siano relazioni su allocazioni e non su panieri di beni. Ad esempio, vi è esternalità se la relazione di preferenza di un consumatore dipende anche dal consumo di un altro consumatore. Può, allora, accadere che sia $(x_i, x_s') \succ_i (x_i, x_s)$ ove $s \neq i$. In assenza di questo tipo di esternalità, si ha $z' \succsim_i z$ se e solo se $x_i' \succsim_i x_i$).

Definizione 8.5 (*Insieme delle allocazioni efficienti*) Una allocazione realizzabile è *fortemente* (*debolmente*) *efficiente* se non esiste alcun'altra allocazione realizzabile che le sia debolmente (fortemente) Pareto-superiore. Quindi, l'insieme delle allocazioni fortemente efficienti è

$$PO = \{z \in C : \text{non esiste } z' \in C \text{ tale che } z' \succsim_i z \text{ per ogni } i = 1,\ldots, n \text{ e } z' \succ_i z \text{ per almeno un } i\}$$

e quello delle allocazioni debolmente efficienti è

$$PO_d = \{z \in C : \text{non esiste } z' \in C \text{ tale che } z' \succ_i z \text{ per ogni } i = 1,\ldots, n\}$$

Proposizione 8.2 Se l'insieme delle allocazioni realizzabili è compatto (cioè chiuso e limitato) e il sistema sociale paretiano di preferenza è transitivo e continuo, allora esiste almeno un'allocazione efficiente.

Dimostrazione. La proposizione in esame discende direttamente dalla estensione della Proposizione 3.3, indicata subito dopo di essa, al caso di un sistema di preferenza non completo. □

La definizione e la proposizione precedenti sono riferite alle allocazioni realizzabili in assenza di *free disposal*. Possono, però, essere estese al caso con *free disposal* (basta sostituire C_{FD} a C) e si ottengono gli insiemi PO_{FD} e $PO_{FD,d}$.

Si noti come $PO \subseteq PO_d$ e $PO_{FD} \subseteq PO_{FD,d}$. Inoltre, in generale, $PO \neq PO_{FD}$ e $PO_d \neq PO_{FD,d}$. Tuttavia, questi insiemi coincidono se le preferenze soddisfano alcune condizioni, come indicato dalla proposizione seguente.

Proposizione 8.3 In assenza di esternalità, cioè per l'economia $\mathcal{E} = (\langle X_i, \succsim_i \rangle, Y_j, \Omega, i = 1,\ldots, n, j = 1,\ldots, m)$, se le preferenze dei consumatori sono fortemente monotone, allora $PO = PO_{FD}$ e $PO_d = PO_{FD,d}$. Se sono continue, oltre che fortemente monotone, allora $PO = PO_d$.

Dimostrazione. Se $((x_i)_{i=1}^n, (y_j)_{j=1}^m) \in PO_{FD}$ e le preferenze sono fortemente monotone, allora $((x_i)_{i=1}^n, (y_j)_{j=1}^m) \in C$ dal momento che non può essere efficiente una allocazione per cui $\sum_{i=1}^n x_i - \sum_{j=1}^m y_j < \Omega$, poiché esiste un'allocazione $((x_i')_{i=1}^n, (y_j)_{j=1}^m)$ con $x_i' > x_i$ realizzabile e Pareto-superiore. Quindi, se le preferenze sono fortemente monotone, non esistono allocazioni efficienti in $C_{FD}\backslash C$. Questo implica che per ogni allocazione in $C_{FD}\backslash C$ vi è in C un'allocazione che le è Pareto-superiore. Perciò, se $((x_i)_{i=1}^n, (y_j)_{j=1}^m) \in PO_{FD}$, allora $((x_i)_{i=1}^n, (y_j)_{j=1}^m) \in C$. Inoltre, la condizione secondo cui non esistono in C_{FD} allocazioni Pareto-superiori a $((x_i)_{i=1}^n, (y_j)_{j=1}^m) \in PO_{FD}$ implica che esse non esistano neppure in C , poiché $C \subseteq C_{FD}$. Quindi, se le preferenze sono fortemente monotone e $((x_i)_{i=1}^n, (y_j)_{j=1}^m) \in PO_{FD}$, allora $((x_i)_{i=1}^n, (y_j)_{j=1}^m) \in PO$, cioè, $PO_{FD} \subseteq PO$. Per contro, se $((x_i)_{i=1}^n, (y_j)_{j=1}^m) \in PO$, da un lato $((x_i)_{i=1}^n, (y_j)_{j=1}^m) \in C_{FD}$, poiché $((x_i)_{i=1}^n, (y_j)_{j=1}^m) \in C$ e $C \subseteq C_{FD}$, e, dall'altro lato, non esistendo in C un'allocazione Pareto-superiore a $((x_i)_{i=1}^n, (y_j)_{j=1}^m)$, questa non può neppure esistere in $C_{FD}\backslash C$ (poiché rispetto a questa allocazione $((x_i')_{i=1}^n, (y_j')_{j=1}^m)$, con $\sum_{i=1}^n x_i' - \sum_{j=1}^m y_j' < \Omega$, esisterebbe in C , come già visto, un'allocazione $((x_i'')_{i=1}^n, (y_j'')_{j=1}^m)$ Pareto-superiore e, per transitività, anche Pareto-superiore a $((x_i)_{i=1}^n, (y_j)_{j=1}^m)$, in contrasto con la condizione $((x_i)_{i=1}^n, (y_j)_{j=1}^m) \in PO$). Quindi, se le preferenze sono fortemente monotone e $((x_i)_{i=1}^n, (y_j)_{j=1}^m) \in PO$, allora $((x_i)_{i=1}^n, (y_j)_{j=1}^m) \in PO_{FD}$, cioè, $PO \subseteq PO_{FD}$. In conclusione, $PO_{FD} = PO$. Con lo stesso ragionamento si ottiene che $PO_{FDd} = PO_d$. Poi, se $((x_i)_{i=1}^n, (y_j)_{j=1}^m) \notin PO$, allora esiste un'allocazione $((x_i')_{i=1}^n, (y_j')_{j=1}^m) \in C$ tale che $x_i' \succsim_i x_i$ per ogni $i = 1,\ldots, n$ e $x_s' \succ_s x_s$ per almeno un consumatore. Perciò, se le preferenze sono continue, vi è un $x_s'' < x_s'$ (ossia, con vettore $x_s' - x_s''$ semipositivo) tale che $x_s'' \succ_s x_s$. Allora, ponendo $x_i'' = x_i' + \frac{1}{n-1}(x_s' - x_s'')$ per ogni $i \neq s$,[4] si ha, da un lato, che $((x_i'')_{i=1}^n, (y_j')_{j=1}^m) \in C \subseteq C_{FD}$, e, dall'altro lato, essendo le preferenze fortemente monotone, che $x_i'' \succ_i x_i$ per ogni $i = 1,\ldots, n$. Quindi, se $((x_i)_{i=1}^n, (y_j)_{j=1}^m) \notin PO$, allora $((x_i)_{i=1}^n, (y_j)_{j=1}^m) \notin PO_d$, cioè, $PO_d \subseteq PO$. Essendo anche $PO \subseteq PO_d$, risulta $PO_d = PO$. □

Si assuma che i sistemi individuali di preferenza siano regolari e continui e, quindi, rappresentabili con funzioni (ordinali) continue di utilità. Allora, gli insiemi delle allocazioni realizzabili e delle allocazioni efficienti determinano gli insiemi delle utilità ottenibili e delle utilità massimali.

[4] Si assume implicitamente che gli insiemi di consumo X_i siano tali che $x_i'' \in X_i$.

Definizione 8.6 (*Insiemi delle utilità ottenibili e delle utilità massimali*) Indicando con u_i: $Z \to \mathbb{R}$ la funzione di utilità dell'agente *i*-esimo, per $i = 1,\ldots, n$, e con $u = (u_1,\ldots, u_n)$ il vettore delle utilità di tutti gli agenti, perciò con u: $Z \to \mathbb{R}^n$, l'insieme U delle utilità ottenibili (o realizzabili) è

$$U = \{u \in \mathbb{R}^n : u = u(z) \text{ per } z \in C\}$$

e quello delle utilità massimali è

$$U_{max} = \{u \in U: \text{non esiste } u' \in U \text{ tale che } u' > u\}$$

Tenendo conto della Definizione 8.5, si ha immediatamente che

$$U_{max} = \{u \in U: u = u(z) \text{ per } z \in PO\}$$

La Definizione 8.6 può essere estesa al caso con *free disposal*, così da avere U_{FD} e $U_{FD,max}$, introducendo C_{FD} e PO_{FD} al posto di C e PO. Analogamente, si può definire l'insieme delle utilità debolmente massimali $U_{d,max}$ ponendo nella definizione la più debole condizione "non esiste $u' \in U$ tale che $u' >> u$".

Possono, poi, essere introdotte le proprietà seguenti (che sono connesse, in parte, a quelle indicate dalla Proposizione 8.1).

Proposizione 8.4 Siano le funzioni di utilità dei consumatori continue. Se l'insieme delle allocazioni realizzabili C (oppure C_{FD}) è chiuso e limitato, allora è chiuso e limitato superiormente anche l'insieme delle utilità ottenibili U (rispettivamente U_{FD}). L'insieme delle utilità (fortemente) massimali U_{max} è tale che se $u, u' \in U_{max}$ allora $u \not> u'$. L'insieme delle utilità debolmente massimali $U_{d,max}$ è tale che se $u,\ u' \in U_{d,max}$ allora non può essere $u >> u'$. (Quindi, nel caso con due consumatori, U_{max} è rappresentato da una curva decrescente e $U_{d,max}$ da una curva non crescente). Infine, in assenza di esternalità, se le preferenze sono continue e fortemente monotone, allora $U_{max} = U_{d,max}$.

Dimostrazione. La continuità delle funzioni di utilità implica che gli insiemi delle utilità ottenibili siano chiusi e limitati superiormente se l'insieme delle allocazioni realizzabili è, rispettivamente, chiuso e limitato. Risulta immediatamente dalle definizioni degli insiemi delle utilità massimali e delle utilità debolmente massimali che l'insieme delle utilità (fortemente) massimali sia decrescente e quello delle utilità debolmente massimali sia non crescente. L'ultima affermazione della Proposizione risulta immediatamente tenendo conto della Proposizione 8.3. □

L'introduzione degli insiemi delle utilità ottenibili e delle utilità massimali può essere utilizzata per calcolare l'insieme delle allocazioni efficienti. Si tratta di individuare le allocazioni che determinano le utilità massimali, che possono essere ricavate, come indicato nella prossima Proposizione 8.5, ricercando le allocazioni realizzabili che massimizzano l'utilità di ogni agente sotto il vincolo che le utilità degli altri agenti non vengano diminuite. Questo metodo, introdotto originariamente da Lange (1942), è quello usato correntemente per calcolare le allocazioni efficienti.

Proposizione 8.5 Un'allocazione realizzabile $z^* = ((x_i^*)_{i=1}^n, (y_j^*)_{j=1}^m)$ è efficiente se e solo se è soluzione dei problemi (per ogni $i = 1,\ldots, n$)

$$\max_z u_i(z) \text{ sotto i vincoli } z \in C \text{ e } u_s(z) \geq u_s(z^*) \text{ per } s \neq i \text{ e } s = 1,\ldots, n$$

Dimostrazione. La sufficienza risulta poiché, se un'allocazione $z^* \in C$ non è efficiente, allora esiste un'altra allocazione $z' \in C$ tale che $u_s(z') \geq u_s(z^*)$ per ogni $s = 1,\ldots, n$ e $u_i(z') > u_i(z^*)$ per un consumatore, per cui $z^* \notin \arg\max_z u_i(z)$ sotto i vincoli $z \in C$ e $u_s(z) \geq u_s(z^*)$ per $s \neq i$ e $s = 1,\ldots, n$. La necessità risulta poiché, se una allocazione $z^* \in C$ non risolve uno dei problemi indicati, ad esempio il problema $\max_z u_i(z)$ sotto i vincoli $z \in C$ e $u_s(z) \geq u_s(z^*)$ per $s \neq i$ e $s = 1,\ldots, n$, allora esiste una allocazione $z' \in C$ tale che $u_i(z') > u_i(z^*)$ e $u_s(z') \geq u_s(z^*)$ per ogni $s \neq i$ e $s = 1,\ldots, n$, per cui $z^* \in C$ non è efficiente. □

Vengono ora determinate le relazioni del primo ordine che definiscono le allocazioni efficienti per un'economia senza esternalità, cioè, per l'economia $\mathcal{E} = (\langle X_i, \succsim_i \rangle, Y_j, \Omega, i = 1,\ldots, n, j = 1,\ldots, m)$. Abbia ogni consumatore un insieme di consumo X_i non vuoto, chiuso, convesso e limitato inferiormente e preferenze descritte da una funzione di utilità $u_i(x_i)$ continua e differenziabile. Abbia ogni produttore un insieme di produzione Y_j non vuoto e chiuso, descritto da una funzione di trasformazione $F_j(y_j)$ continua e differenziabile. Si assuma che C sia un insieme non vuoto e compatto e, per semplicità, che le preferenze siano fortemente monotone (cosicché tutte le disuguaglianze presenti nei vincoli sono soddisfatte come uguaglianze). Allora, ogni allocazione efficiente $((x_i^*)_{i=1}^n, (y_j^*)_{j=1}^m)$ interna (cioè, con consumi x_i non appartenenti alla frontiera degli insiemi di consumo X_i) soddisfa le condizioni del primo ordine del problema (ove l'indice i è riferito ad un qualsiasi consumatore)

$$\max_{(x_s)_{s=1}^n, (y_j)_{j=1}^m} u_i(x_i)$$

sotto i vincoli $\sum_{s=1}^n x_s - \sum_{j=1}^m y_j = \Omega$, $F_j(y_j) = 0$ per $j = 1,\ldots, m$ e $u_s(x_s) = u_s(x_s^*)$ per $s \neq i$ e $s = 1,\ldots, n$.

Introducendo la funzione lagrangiana

$$L((x_i)_{i=1}^n, (y_j)_{j=1}^m, (\mu_h)_{h=1}^k, (\lambda_s)_{s=1;s\neq i}^n, (\nu_j)_{j=1}^m) = u_i(x_i) + \sum_{h=1}^k \mu_h(\Omega_h - \sum_{s=1}^n x_{sh} + \sum_{j=1}^m y_{jh}) + \sum_{s=1;s\neq i}^n \lambda_s(u_s(x_s) - u_s(x_s^*)) - \sum_{j=1}^m \nu_j F_j(y_j)$$

si ottengono le condizioni del primo ordine seguenti

$$\frac{\partial u_i(x_i^*)}{\partial x_{ih}} - \mu_h = 0, \qquad -\mu_h + \lambda_s \frac{\partial u_s(x_s^*)}{\partial x_{sh}} = 0, \qquad \mu_h - \nu_j \frac{\partial F_j(y_j^*)}{\partial y_{jh}} = 0,$$

$$\Omega_h - \sum_{s=1}^n x_{sh}^* + \sum_{j=1}^m y_{jh}^* = 0, \qquad F_j(y_j^*) = 0$$

per $h = 1,\ldots, k$, $s \neq i$, $s = 1,\ldots, n$ e $j = 1,\ldots, m$.

Queste condizioni implicano le uguaglianze

$$\frac{\dfrac{\partial u_i(x_i^*)}{\partial x_{ih}}}{\dfrac{\partial u_i(x_i^*)}{\partial x_{ir}}} = \frac{\dfrac{\partial u_s(x_s^*)}{\partial x_{sh}}}{\dfrac{\partial u_s(x_s^*)}{\partial x_{sr}}} = \frac{\dfrac{\partial F_j(y_j^*)}{\partial y_{jh}}}{\dfrac{\partial F_j(y_j^*)}{\partial y_{jr}}}$$

per ogni coppia di beni $h, r = 1,\ldots, k$, con $h \neq r$, ogni consumatore $s = 1,\ldots, n$, con $s \neq i$, e ogni produttore $j = 1,\ldots, m$. Queste uguaglianze richiedono che i saggi marginali di sostituzione siano, per ogni coppia di

beni, uguali tra tutti i consumatori e tutti i produttori. Questi rapporti vengono indicati come *prezzi ombra*. E' facile intuire come queste uguaglianze debbano essere soddisfatte da ogni allocazione efficiente che sia punto interno dell'insieme delle allocazioni realizzabili (in base all'argomento che se non fossero soddisfatte vi sarebbe un'altra allocazione realizzabile preferita da tutti i consumatori).

Se, invece, vi sono esternalità, si ha l'economia $\mathcal{E} = (\langle Z, \succsim_i \rangle, Z, \Omega, i = 1,\ldots, n)$, ove l'insieme delle allocazioni è del tipo $Z = \{z \in \mathbb{R}^{k(n+m)} : z \in \Pi_{i=1}^{n} X_i(z) \times \Pi_{j=1}^{m} Y_j(z)\}$. Assumendo che l'insieme delle allocazioni realizzabili C sia non vuoto e compatto, che gli insiemi di consumo $X_i(z)$, per $i = 1,\ldots, n$, siano non vuoti, chiusi, convessi e limitati inferiormente, che le preferenze siano descrivibili con funzioni di utilità $u_i(z)$ continue e differenziabili e che gli insiemi di produzione siano descrivibili con funzioni di trasformazione $F_j(z)$, per $j = 1,\ldots, m$, continue e differenziabili per ogni $z \in Z$, ogni allocazione efficiente $z^* = ((x_i^*)_{i=1}^{n}, (y_j^*)_{j=1}^{m})$ interna soddisfa le condizioni del primo ordine del problema (ove l'indice i è riferito ad un qualsiasi consumatore)

$$\max_{(x_s)_{s=1}^{n}, (y_j)_{j=1}^{m}} u_i(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m)$$

sotto i vincoli $\sum_{s=1}^{n} x_s - \sum_{j=1}^{m} y_j = \Omega$, $F_j(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) = 0$ per $j = 1,\ldots, m$ e $u_s(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) = u_s(x_1^*, \ldots, x_n^*, y_1^*, \ldots, y_m^*)$ per $s \neq i$ e $s = 1,\ldots, n$.

Si consideri, in particolare, quella particolare esternalità costituita dai beni pubblici (che sono quei beni che possono essere consumati senza che il consumo di essi da parte di un agente ne impedisca il consumo da parte degli altri agenti), allora le condizioni di efficienza assumono una forma particolare, diversa da quella dei beni privati (che sono quelli, finora considerati, il cui consumo è esclusivo di ciascun agente), come indicato nel seguito.

Si assuma che vi sia, come unica esternalità, quella generata da un bene pubblico, prodotto da un'impresa, la cui funzione di trasformazione è $F_p(y, y_p) = 0$, ove $y \in \mathbb{R}^k$ è un vettore di beni privati e $y_p \in \mathbb{R}_+$ è la quantità di bene pubblico prodotta. Si ha, allora, il problema

$$\max_{(x_s)_{s=1}^{n}, (y_j)_{j=1}^{m}, y_p} u_i(x_i, x_p)$$

sotto i vincoli $\sum_{s=1}^{n} x_s - \sum_{j=1}^{m} y_j - y = \Omega$, $x_p - y_p = 0$, $F_j(y_j) = 0$ per $j = 1,\ldots, m$, $F_p(y, y_p) = 0$ e $u_s(x_s, x_p) = u_s(x_s^*, x_p^*)$ per $s \neq i$ e $s = 1,\ldots, n$.

Introducendo la funzione lagrangiana

$$L((x_i)_{i=1}^{n}, x_p, (y_j)_{j=1}^{m}, y, y_p, (\mu_h)_{h=1}^{k}, \mu_p, (\lambda_s)_{s=1;s\neq i}^{n}, (\nu_j)_{j=1}^{m}, \nu_p) = u_i(x_i, x_p) + \sum_{h=1}^{k} \mu_h(\Omega_h - \sum_{s=1}^{n} x_{sh} + \sum_{j=1}^{m} y_{jh} + y) + \mu_p(-x_p + y_p) - \sum_{j=1}^{m} \nu_j F_j(y_j) - \nu_p F_p(y, y_p) + \sum_{s=1;s\neq i}^{n} \lambda_s(u_s(x_s, x_p) - u_s(x_s^*, x_p^*))$$

si ottengono le condizioni del primo ordine seguenti

$$\frac{\partial u_i(x_i^*, x_p^*)}{\partial x_{ih}} - \mu_h = 0\,, \qquad -\mu_h + \lambda_s \frac{\partial u_s(x_s^*, x_p^*)}{\partial x_{sh}} = 0\,,$$

$$\frac{\partial u_i(x_i^*, x_p^*)}{\partial x_p} + \sum_{s=1, s\neq i}^{n} \lambda_s \frac{\partial u_s(x_s^*, x_p^*)}{\partial x_p} - \mu_p = 0\,, \qquad \mu_h - \nu_j \frac{\partial F_j(y_j^*)}{\partial y_{jh}} = 0\,,$$

$$\mu_h - \nu_p \frac{\partial F_p(y^*, y_p^*)}{\partial y_h} = 0\,, \qquad \mu_p - \nu_p \frac{\partial F_p(y^*, y_p^*)}{\partial y_p} = 0\,,$$

$$\Omega_h - \sum_{s=1}^{n} x_{sh}^* + \sum_{j=1}^{m} y_{jh}^* + y^* = 0\,, \quad -x_p^* + y_p^* = 0\,, \quad F_j(y_j^*) = 0\,, \quad F_p(y^*, y_p^*) = 0\,,$$

per $h = 1,\ldots, k$, $s \neq i$, $s = 1,\ldots, n$ e $j = 1,\ldots, m$. Queste condizioni implicano, per i beni privati, le uguaglianze già note

$$\frac{\dfrac{\partial u_i(x_i^*, x_p^*)}{\partial x_{ih}}}{\dfrac{\partial u_i(x_i^*, x_p^*)}{\partial x_{ir}}} = \frac{\dfrac{\partial u_s(x_s^*, x_p^*)}{\partial x_{sh}}}{\dfrac{\partial u_s(x_s^*, x_p^*)}{\partial x_{sr}}} = \frac{\dfrac{\partial F_j(y_j^*)}{\partial y_{jh}}}{\dfrac{\partial F_j(y_j^*)}{\partial y_{jr}}} = \frac{\dfrac{\partial F_p(y^*, y_p^*)}{\partial y_h}}{\dfrac{\partial F_p(y^*, y_p^*)}{\partial y_r}}$$

per ogni coppia di beni $h, r = 1,\ldots, k$, con $h \neq r$, ogni consumatore $s = 1,\ldots, n$, con $s \neq i$, e ogni produttore $j = 1,\ldots, m$, e per il bene pubblico le nuove uguaglianze, per ogni $h = 1,\ldots, k$,

$$\sum_{s=1}^{n} \frac{\dfrac{\partial u_s(x_s^*, x_p^*)}{\partial x_p}}{\dfrac{\partial u_s(x_s^*, x_p^*)}{\partial x_h}} = \frac{\dfrac{\partial F_p(y^*, y_p^*)}{\partial y_p}}{\dfrac{\partial F_p(y^*, y_p^*)}{\partial y_h}}$$

Si noti come, per il bene pubblico, l'efficienza richieda l'uguaglianza non dei saggi marginali di sostituzione individuali tra loro e con il saggio marginale di sostituzione produttiva, ma di quest'ultimo con la somma dei saggi marginali di sostituzione individuali. Infatti, occorre tenere conto che la produzione di una quantità aggiuntiva di bene pubblico non viene consumata da un solo consumatore, ma da tutti.

L'insieme delle allocazioni efficienti è un sottoinsieme non vuoto (per la Proposizione 8.2) dell'insieme delle allocazioni realizzabili. L'insieme C ha, in genere,[5] $k(n + m - 1)$ dimensioni (infatti, ogni allocazione è composta da $n + m$ vettori con k elementi, che sono vincolati da k equazioni, imposte dalla condizione di realizzabilità). (L'insieme C_{FD} ha, invece, in genere, $k(n + m)$ dimensioni, poiché la condizione di realizzabilità è rappresentata da disequazioni). L'insieme delle allocazioni efficienti ha, ovviamente, un numero inferiore di dimensioni (se non altro perché queste allocazioni devono soddisfare le uguaglianze suindicate derivanti dalle condizioni del primo ordine). Nel caso in cui le allocazioni efficienti siano determinabili con l'analisi differenziale, il numero delle dimensioni risulta dalla differenza tra il numero delle variabili della funzione lagrangiana e il numero delle condizioni del primo ordine. Allora, nel caso senza esternalità, essendo il numero delle variabili $(x_i)_{i=1}^{n}, (y_j)_{j=1}^{m}, (\mu_h)_{h=1}^{k}, (\lambda_s)_{s=1;s\neq i}^{n}, (\nu_j)_{j=1}^{m}$ pari a $(n + m)k + k + n - 1 + m$ ed essendo il numero delle condizioni del primo ordine pari a $k + (n - 1)k + mk + k + m$, risultano $n - 1$ gradi di libertà, cioè, l'insieme delle allocazioni efficienti ha $n - 1$ dimensioni. Si può intuire questo risultato (valido anche in assenza della condizione di differenziabilità delle funzioni di utilità e di trasformazione) tenendo conto che è efficiente l'allocazione che massimizza l'utilità di un consumatore per date utilità

[5] La locuzione "in genere", ossia "tranne casi eccezionali", può essere omessa se si assume che gli insiemi di consumo e di produzione contengano punti interni e che vi sia almeno un'allocazione realizzabile composta da vettori di consumo e di produzione che siano punti interni dei rispettivi insiemi di consumo e di produzione.

degli altri consumatori e che queste altre utilità, che sono in numero di $n - 1$, sono arbitrarie (purché appartenenti all'insieme delle utilità ottenibili con le risorse date). Questo risultato è generico (vale, cioè, quasi sempre, con eccezioni, alcune delle quali verranno illustrate nel paragrafo seguente). Si noti, infine, come sia coinvolto soltanto il numero dei consumatori, non quello dei beni o dei produttori. Quindi, se vi sono due soli consumatori, l'insieme delle allocazioni efficienti ha la natura di una linea, qualunque sia il numero dei beni e dei produttori; se vi sono tre consumatori, ha la natura di una superficie, ecc.

8.3 Una rappresentazione grafica delle allocazioni di un'economia di puro scambio con due beni e due agenti

Il diagramma di Edgeworth-Pareto[6] offre la rappresentazione grafica di un'economia di puro scambio composta soltanto da due consumatori che possono scambiarsi soltanto due beni, cioè dell'economia $\mathcal{E} = (\langle X_1, \succsim_1\rangle, \langle X_2, \succsim_2\rangle, \Omega)$, con $X_1, X_2 \subseteq \mathbb{R}^2_+$ e $\Omega \in \mathbb{R}^2_+$. Nel seguito si assume che gli insiemi di consumo coincidano con $\mathbb{R}^2_+$, oppure che siano sufficientemente ampi da includere il rettangolo definito dalla condizione $0 \leq x \leq \Omega$ (cioè, $x \in X_1, X_2$ se $0 \leq x \leq \Omega$).

Per introdurre il diagramma di Edgeworth-Pareto, rappresentato nella Figura 8.1, si consideri un rettangolo i cui lati abbiano lunghezza pari alla quantità complessiva dei due beni, cioè, Ω_1 e Ω_2. I panieri di beni del primo consumatore sono rappresentati prendendo come origine degli assi, O_1, un vertice del rettangolo, quelli del secondo agente prendendo come origine degli assi, O_2, il vertice opposto. Se le preferenze sono monotone, allora le curve di indifferenza di ciascun agente hanno utilità crescente con l'allontanarsi, rispettivamente, da O_1 e da O_2. Un'allocazione, cioè una coppia (x_1, x_2) con $x_1 \in X_1$ e $x_2 \in X_2$, è rappresentata nel diagramma da una coppia di punti. Se è realizzabile, allora i due punti coincidono, pur indicando panieri diversi di beni, dovendo essere $x_1 + x_2 = \Omega$. Se vi è *free disposal*, allora non è richiesto che i due punti coincidano, basta che x_2 si trovi a nord-est di x_1: questo è, infatti, quanto richiede la condizione $x_1 + x_2 \leq \Omega$. Allora, in assenza di *free disposal*, l'insieme delle allocazioni realizzabili C è rappresentato, nel diagramma di Edgeworth-Pareto, dall'intero rettangolo: cioè, ogni punto del rettangolo indica un'allocazione realizzabile, costituita dai due panieri di beni che esso individua relativamente ai due sistemi di riferimento definiti dalle origini degli assi O_1 e O_2. (Invece, in presenza di *free disposal*, l'insieme delle allocazioni realizzabili C_{FD} è costituito da tutte le coppie di punti x_1, x_2 che appaiono nel diagramma con x_2 a nord-est di x_1).

[6] Nella letteratura questo diagramma è indicato con il nome soltanto di Edgeworth (è l'*Edgeworth box*). Il primo a disegnarlo è stato, però, Pareto (1906).

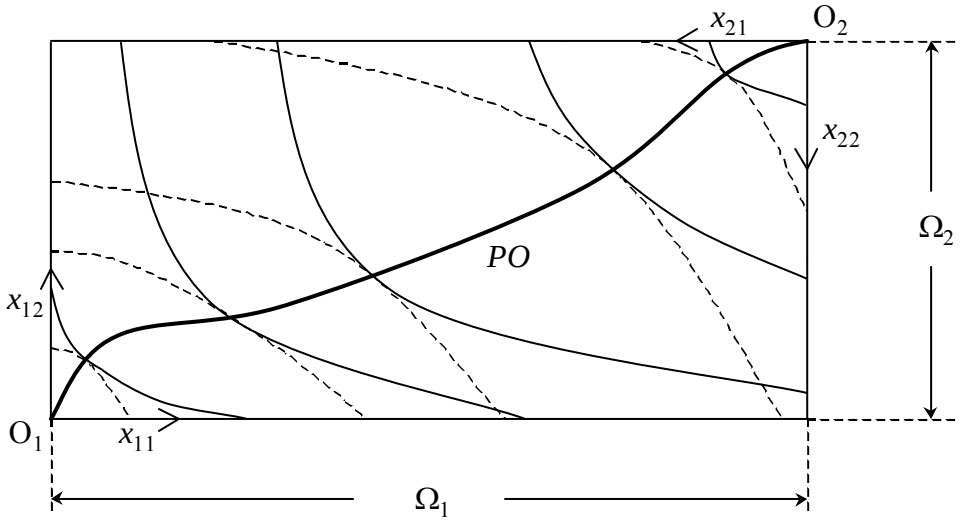

Figura 8.1

Sono efficienti quelle allocazioni realizzabili rispetto a cui ogni altra allocazione realizzabile non è Pareto-superiore (non vi sono, cioè, punti che giacciono su curve di indifferenza più elevate, per l'efficienza debole, o, per l'efficienza forte, punti che giacciono, per un agente, su una curva di indifferenza non meno elevata e, per l'altro agente, su una curva di indifferenza più elevata). L'insieme delle allocazioni efficienti è indicato nella Figura 8.1, in cui sono rappresentate preferenze continue (perciò descrivibili con una mappa di curve di indifferenza) e fortemente monotone, cosicché gli insiemi delle allocazioni fortemente efficienti e delle allocazioni debolmente efficienti coincidono e sono costituiti da punti che giacciono su curve di indifferenza (una per ciascuno dei due agenti) che non si intersecano. Si noti come facciano parte di questi insiemi (necessariamente, se le preferenze sono monotone) i punti O_1 e O_2, fatto questo che denota subito come l'efficienza o Pareto-ottimalità sia nozione distinta dall'equità distributiva.

Nello spazio delle utilità (a due dimensioni, poiché vi sono due soli agenti) è possibile tracciare gli insiemi delle utilità ottenibili e delle utilità massimali. L'insieme delle utilità ottenibili U può essere dedotto dal diagramma di Edgeworth-Pareto individuando in ogni suo punto gli indici delle curve di indifferenza passanti per esso. Ogni coppia u_1, u_2 così individuata è un punto di U e U è l'insieme di tutti questi punti. L'insieme delle utilità massimali U_{max} è costituito dalle coppie u_1, u_2 ottenute individuando in ogni punto di PO (l'insieme delle allocazioni efficienti) gli indici delle curve di indifferenza passanti per esso. L'insieme delle utilità massimali U_{max} giace sulla frontiera nord-est dell'insieme U (a sua volta appartenente all'insieme U_{FD}). Nella Figura 8.2 sono rappresentati gli

insiemi delle utilità ottenibili e delle utilità massimali compatibili con il diagramma della Figura 8.1 (con indici di utilità tali che $u_i(0) = 0$).

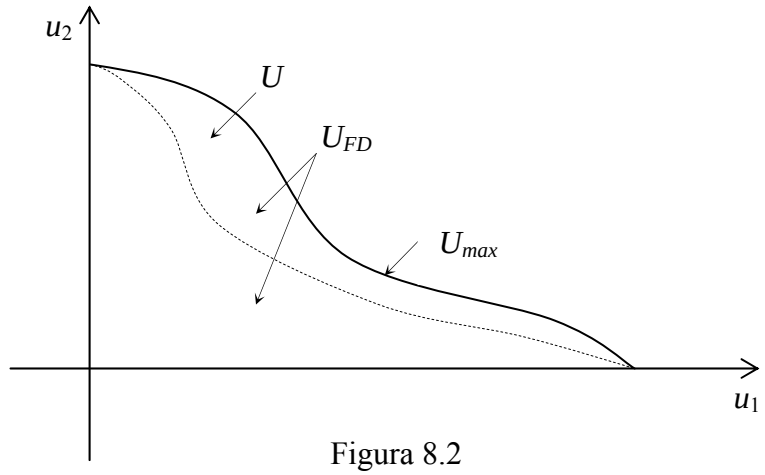

Figura 8.2

Un esempio in cui gli insiemi delle allocazioni fortemente efficienti e delle allocazioni debolmente efficienti non coincidono perché le preferenze non sono fortemente monotone è rappresentato nelle Figure 8.3 e 8.4. I due consumatori hanno preferenze monotone (ma non fortemente) e continue rappresentate dalle funzioni di utilità $u_1 = x_{11}$ e $u_2 = x_{22}$ (ad esempio, il primo bene è cibo e il secondo vino, il primo consumatore è astemio e il secondo alcolista).

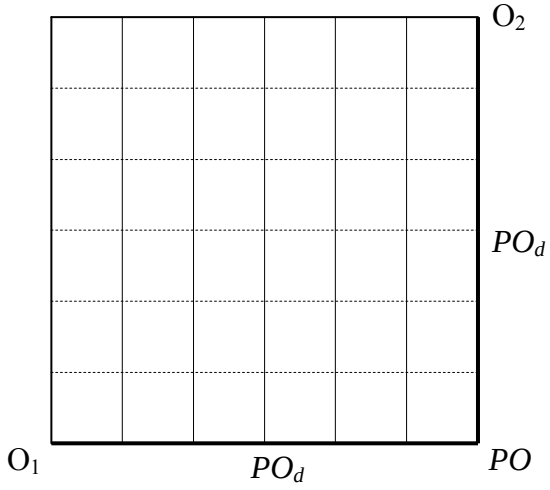

Figura 8.3

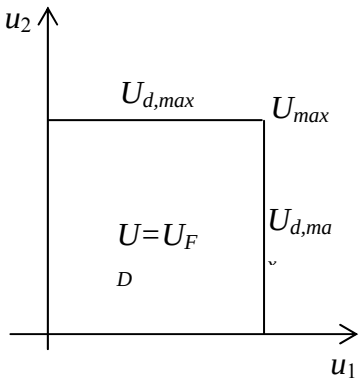

Figura 8.4

Un altro esempio in cui gli insiemi delle allocazioni fortemente efficienti e delle allocazioni debolmente efficienti non coincidono, questa volta perché le preferenze di un consumatore, pur fortemente monotone, non sono continue, è rappresentato nella Figura 8.5 (si noti, inoltre, come in questo caso non sia possibile alcuna descrizione nello spazio delle utilità poiché le preferenze del secondo consumatore, non essendo continue, non sono rappresentabili con una funzione di utilità). Le preferenze del primo consumatore sono rappresentate dalla funzione di utilità $u_1 = x_{11} + x_{12}$. Per il secondo consumatore si ha $x_2 \succ_2 x_2'$ se $x_{21} + x_{22} > x_{21}' + x_{22}'$ oppure se $x_{21} + x_{22} = x_{21}' + x_{22}'$ e $x_{21} > x_{21}'$, mentre è $x_2 \sim_2 x_2'$ se e solo se $x_2 = x_2'$. L'insieme delle allocazioni debolmente efficienti coincide con l'insieme delle allocazioni realizzabili, mentre quello delle allocazioni fortemente efficienti è costituito dal bordo di nord-ovest del diagramma.

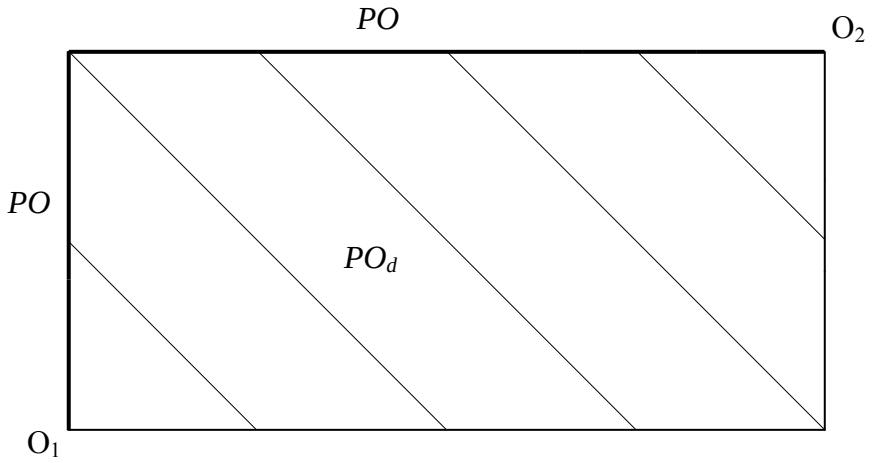

Figura 8.5

8.4 Una definizione alternativa di efficienza (in termini di assenza di spreco di risorse)

La Definizione 8.5 di allocazione efficiente richiede che non vi siano allocazioni realizzabili Pareto-superiori. In altri termini, si ricercano, tra le allocazioni realizzabili con le risorse "date" Ω , quelle che sono massimali rispetto alle preferenze dei consumatori. Una definizione alternativa di efficienza[7] richiede che non vi sia spreco di risorse. Secondo questa definizione, una allocazione realizzabile è efficiente se non esiste nessuna allocazione, indifferente a quella in esame per tutti i consumatori o Pareto-superiore, che richieda meno risorse per essere realizzata.

[7] Anche questa definizione è dovuta sostanzialmente a Pareto. Le imperfezioni della definizione originaria di Pareto sono stata corrette da Allais (1981) che ha indicato queste allocazioni come "allocazioni di massimo surplus distribuibile". Un'analisi più estesa, che mostra anche la dualità tra le due nozioni di efficienza, è in Montesano (1997).

Nel diagramma di Edgeworth-Pareto della Figura 8.6, l'allocazione $x = (x_1, x_2)$ non è efficiente, secondo questa definizione, perché l'allocazione $x' = (x_1', x_2')$ è indifferente per entrambi i consumatori all'allocazione x (cioè, $x_1' \sim_1 x_1$ e $x_2' \sim_2 x_2$) e può essere realizzata con una quantità inferiore di risorse (essendo $x_{11}'+x_{21}' < x_{11}+x_{21} = \Omega_1$ e $x_{12}'+x_{22}' < x_{12}+x_{22} = \Omega_2$), denotando uno spreco di risorse pari al vettore $(x_{11}+x_{21}-x_{11}'-x_{21}', x_{12}+x_{22}-x_{12}'-x_{22}')$.

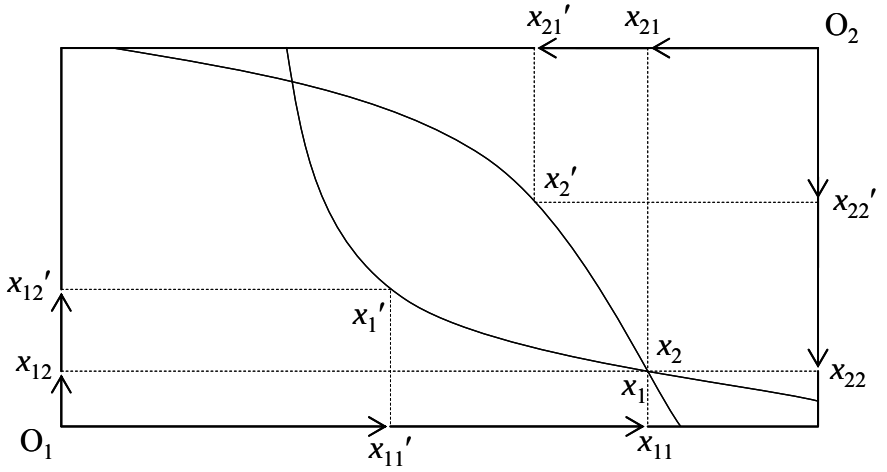

Figura 8.6

E' facile intuire come le due definizioni di efficienza (rispettivamente, allocazioni di utilità massimali per risorse date e allocazioni di risorse minimali per utilità date) conducano alle stesse allocazioni se le preferenze sono continue e fortemente monotone. (Dalla Figura 8.6 si evince come siano efficienti, anche secondo questa definizione alternativa, le allocazioni che giacciono su curve di indifferenza che non si intersecano). Infatti, se vi è spreco di risorse e le preferenze sono fortemente monotone, allora, evitando lo spreco, si può accrescere l'utilità di tutti i consumatori distribuendo loro le risorse risparmiate, per cui un'allocazione inefficiente secondo la definizione alternativa è inefficiente anche secondo la definizione originaria. Inoltre, un'allocazione inefficiente secondo la definizione originaria è inefficiente anche secondo la definizione alternativa. Infatti, se è inefficiente secondo la definizione originaria, è possibile realizzare con le stesse risorse una allocazione Pareto-superiore. Allora, con riferimento a questa allocazione, per l'ipotesi che le preferenze sono continue, è possibile sottrarre una certa quantità di beni a qualche consumatore, ottenendo sempre una allocazione indifferente o Pareto-superiore a quella di partenza. Quindi, con riferimento all'allocazione di partenza, esiste un'allocazione indifferente o Pareto-superiore che richiede una quantità inferiore di risorse.

Quanto indicato finora in modo intuitivo, viene ora presentato formalmente e in un contesto più generale. Occorre, però, introdurre alcune definizioni.

Si consideri un'economia in cui sono possibili esternalità di ogni tipo, così come indicato verso la fine del Paragrafo 8.1 e all'inizio del Paragrafo 8.2. Sia Z un insieme non

vuoto di allocazioni $z = ((x_i)_{i=1}^n, (y_j)_{j=1}^m)$ (introdotto alla fine del Paragrafo 8.1). Siano i consumatori (perciò per $i = 1,\ldots, n$) caratterizzati da sistemi completi, transitivi e continui di preferenza $\langle Z, \succsim_i \rangle$, rappresentabili con funzioni (ordinali) di utilità $u_i: Z \to \mathbb{R}$.

Definizione 8.7 Si introducano:

la *funzione delle risorse* $\omega: Z \to \mathbb{R}^k$, che determina l'ammontare di risorse richieste dall'allocazione $z \in Z$, pari a $\omega(z) = \Sigma_{i=1}^n x_i - \Sigma_{j=1}^m y_j$;

la *funzione delle utilità* $u: Z \to \mathbb{R}^n$, che determina le utilità associate all'allocazione $z \in Z$, costituite dal vettore $u(z) = (u_i(z))_{i=1}^n$;

l'*insieme delle allocazioni realizzabili* con risorse date $C(\Omega) = \{z \in Z : \omega(z) = \Omega\}$;

l'*insieme delle allocazioni indifferenti* rispetto a utilità date $D(u) = \{z \in Z : u(z) = u\}$;

l'*insieme delle utilità ottenibili* con risorse date $U(\Omega) = \{u \in \mathbb{R}^n : C(\Omega) \cap D(u) \neq \varnothing\}$;

l'*insieme delle risorse richieste* per ottenere utilità date $\Omega(u) = \{\Omega \in \mathbb{R}^k : C(\Omega) \cap D(u) \neq \varnothing\}$, per cui $u \in U(\Omega) \Leftrightarrow \Omega \in \Omega(u)$;

l'*insieme delle utilità massimali* rispetto a risorse date $U_{max}(\Omega) = \{u \in U(\Omega) : u' > u \Rightarrow u' \notin U(\Omega)\}$;

l'*insieme delle risorse minimali* rispetto a utilità date $\Omega_{min}(u) = \{\Omega \in \Omega(u) : \Omega' < \Omega \Rightarrow \Omega' \notin \Omega(u)\}$;

l'*insieme delle allocazioni con utilità massimali* per risorse date $PO_{u,max}(\Omega) = \{z \in C(\Omega) : u(z) \in U_{max}(\Omega)\}$;

l'*insieme delle allocazioni con risorse minimali* per utilità date $PO_{\Omega,min}(u) = \{z \in D(u) : \omega(z) \in \Omega_{min}(u)\}$;

l'*insieme delle allocazioni efficienti* (secondo il criterio delle utilità massimali) *per risorse date* $PO_{u,max}(\Omega)$ (coincide, per definizione, con l'insieme delle allocazioni con utilità massimali per risorse date);

l'*insieme delle allocazioni efficienti* (secondo il criterio delle risorse minimali) *per risorse date* $PO_{\Omega,min}(\Omega) = \{z \in C(\Omega) : z \in PO_{\Omega,min}(u(z))\}$.[8]

L'equivalenza tra questi due ultimi insiemi può essere dimostrata introducendo una condizione di monotonicità tra utilità e risorse. Peraltro, ha senso definire efficienza l'assenza di spreco di risorse solo se maggiori risorse possono generare maggiore utilità. Questa condizione di monotonicità è indicata dalla definizione seguente.

Definizione 8.8 (*Monotonicità tra risorse e utilità e tra utilità e risorse*) La definizione qui introdotta prende in considerazione le corrispondenze $U(\Omega)$ e $\Omega(u)$ e assume che siano crescenti, nel senso richiesto dalle condizioni $\Omega' < \Omega \Rightarrow U(\Omega') \cap U_{max}(\Omega) = \varnothing$ e $u' > u \Rightarrow \Omega(u') \cap \Omega_{min}(u) = \varnothing$.

Intuitivamente, con riferimento alla Figura 8.2, ove sono indicati gli insiemi U e U_{max} per date risorse Ω, cioè, gli insiemi $U(\Omega)$ e $U_{max}(\Omega)$, la condizione $\Omega' < \Omega \Rightarrow U(\Omega') \cap U_{max}(\Omega) = \varnothing$ richiede che se si riducono una o più risorse, cioè, per $\Omega' < \Omega$, l'insieme $U(\Omega')$ differisca da $U(\Omega)$ in modo tale da non contenere nessun punto dell'insieme $U_{max}(\Omega)$, ossia, in termini più semplici, in modo tale che l'insieme $U_{max}(\Omega')$ non abbia punti in comune con l'insieme $U_{max}(\Omega)$ e si trovi a sud-ovest di questo. In modo analogo per l'altra condizione, che considera insiemi $\Omega(u)$ situati nello spazio dei beni.

Proposizione 8.6 Per le condizioni di monotonicità introdotte dalla Definizione 8.8, valgono le seguenti equivalenze:

$u \in U_{max}(\Omega) \Rightarrow \Omega \in \Omega_{min}(u)$ se e solo se $\Omega' < \Omega \Rightarrow U(\Omega') \cap U_{max}(\Omega) = \varnothing$;

$\Omega \in \Omega_{min}(u) \Rightarrow u \in U_{max}(\Omega)$ se e solo se $u' > u \Rightarrow \Omega(u') \cap \Omega_{min}(u) = \varnothing$

[8] Sono stati introdotti gli *insiemi delle allocazioni efficienti per risorse date* perché l'economia è definita in relazione a risorse date. Possono, tuttavia, anche essere definiti, in modo analogo, gli *insiemi delle allocazioni efficienti per utilità date*.

Dimostrazione. Se $u \in U_{max}(\Omega)$ non implica $\Omega \in \Omega_{min}(u)$, allora vi è un $u \in U_{max}(\Omega)$ e un $\Omega' < \Omega$ tale che $\Omega' \in \Omega(u)$ e, quindi, $u \in U(\Omega')$. Si ha, allora, $\Omega' < \Omega$ e $u \in U(\Omega') \cap U_{max}(\Omega)$, per cui $\Omega' < \Omega$ non implica $U(\Omega') \cap U_{max}(\Omega) = \varnothing$. Per contro, se $\Omega' < \Omega$ non implica $U(\Omega') \cap U_{max}(\Omega) = \varnothing$, allora vi è una terna Ω, Ω', u tale che $\Omega' < \Omega$ e $u \in U(\Omega') \cap U_{max}(\Omega)$, per cui $u \in U_{max}(\Omega)$ e $u \in U(\Omega')$, cioè, $\Omega' \in \Omega(u)$. Quindi $u \in U_{max}(\Omega)$ non implica $\Omega \in \Omega_{min}(u)$, poiché $\Omega' \in \Omega(u)$ con $\Omega' < \Omega$. Analogamente per la seconda equivalenza. □

Proposizione 8.7 I due insiemi di allocazioni efficienti per risorse date $PO_{u,max}(\Omega)$ (secondo il criterio delle utilità massimali) e $PO_{\Omega,min}(\Omega)$ (secondo il criterio delle risorse minimali) coincidono se e solo se valgono le relazioni di monotonicità introdotte dalla Definizione 8.8. In particolare, $PO_{u,max}(\Omega) \subseteq PO_{\Omega,min}(\Omega)$ se e solo se $\Omega' < \Omega \Rightarrow U(\Omega') \cap U_{max}(\Omega) = \varnothing$ e $PO_{\Omega,min}(\Omega) \subseteq PO_{u,max}(\Omega)$ se e solo se $u' > u \Rightarrow \Omega(u') \cap \Omega_{min}(u) = \varnothing$.

Dimostrazione. Si consideri la prima relazione. Da un lato, l'implicazione $\Omega' < \Omega \Rightarrow U(\Omega') \cap U_{max}(\Omega) = \varnothing$ è equivalente, per la Proposizione 8.6, all'implicazione $u \in U_{max}(\Omega) \Rightarrow \Omega \in \Omega_{min}(u)$. Dall'altro lato, dalla Definizione 8.7, $PO_{u,max}(\Omega) = \{z \in C(\Omega) : u(z) \in U_{max}(\Omega)\}$. Quindi, se $z \in PO_{u,max}(\Omega)$, allora $z \in C(\Omega)$ e $u(z) \in U_{max}(\Omega)$, per cui $\Omega \in \Omega_{min}(u(z))$, oltre che, come è ovvio, $z \in D(u(z))$, cosicché $z \in PO_{\Omega,min}(u(z))$ e, quindi, essendo $z \in C(\Omega)$, anche $z \in PO_{\Omega,min}(\Omega)$. Per converso, se $z \notin PO_{\Omega,min}(\Omega)$, allora $z \notin C(\Omega)$ e/o $z \notin PO_{\Omega,min}(u(z))$, cioè $\omega(z) \notin \Omega_{min}(u(z))$, per cui $u(z) \notin U_{max}(\omega(z))$. Ora, $z \notin PO_{u,max}(\Omega)$ se $z \notin C(\Omega)$ ed è anche $z \notin PO_{u,max}(\Omega)$ se $z \in C(\Omega)$ e $u(z) \notin U_{max}(\omega(z))$, poiché $z \in C(\Omega)$ implica $\omega(z) = \Omega$ per cui $u(z) \notin U_{max}(\omega(z))$ implica $u(z) \notin U_{max}(\Omega)$. Analogamente per la seconda relazione. □

L'insieme delle allocazioni $\hat{z}$ con risorse minimali per utilità date è composto dalle soluzioni dei problemi

$$\min_z \omega_h(z) \text{ sotto i vincoli } z \in D(u) \text{ e } \omega_s(z) \le \omega_s(\hat{z}) \text{ per } s \ne h \text{ e } s = 1,\ldots,k$$

quello delle allocazioni z^* efficienti (secondo il criterio delle risorse minimali) per risorse date dalle soluzioni dei problemi

$$\min_z \omega_h(z) \text{ sotto i vincoli } z \in D(u(z^*)) \text{ e } \omega_s(z) \le \Omega_s \text{ per } s \ne h \text{ e } s = 1,\ldots,k$$

che soddisfano la condizione $z^* \in C(\Omega)$. Vale, cioè, la proposizione seguente che è simile alla Proposizione 8.5.

Proposizione 8.8 Una allocazione $z^* = ((x_i^*)_{i=1}^n, (y_j^*)_{j=1}^m)$ è efficiente secondo il criterio delle risorse minimali se e solo se è soluzione dei problemi (per ogni $h = 1,\ldots,k$)

$$\min_z \omega_h(z) \text{ sotto i vincoli } z \in Z,\ u_i(z) = u_i(z^*) \text{ per } i = 1,\ldots,n \text{ e } \omega_s(z) \le \Omega_s \text{ per } s \ne h \text{ e } s = 1,\ldots,k$$

ed è $\omega(z^*) = \Omega$.

Dimostrazione. La sufficienza risulta poiché, se una allocazione $z^* \in C(\Omega)$ non è efficiente secondo il criterio delle risorse minimali, allora esiste un'altra allocazione $z' \in Z$ tale che $u_i(z') = u_i(z^*)$ per ogni $i = 1,\ldots,n$ e $\omega(z') < \omega(z^*) = \Omega$, ossia $\omega_h(z') < \Omega_h$ per almeno un h e $\omega_s(z') \le \Omega_s$ per $s \ne h$ e $s = 1,\ldots,k$, per cui $z^* \notin \arg\min_z \omega_h(z)$ sotto i vincoli $u_i(z) = u_i(z^*)$ per $i = 1,\ldots,n$ e $\omega_s(z) \le \Omega_s$ per $s \ne h$ e $s = 1,\ldots,k$. La necessità risulta poiché, se una allocazione $z^* \in C(\Omega)$ non risolve uno dei problemi indicati, ad esempio il problema $\min_z \omega_h(z)$ sotto i vincoli $u_i(z) = u_i(z^*)$ per $i = 1,\ldots,n$ e $\omega_s(z) \le \Omega_s$ per $s \ne h$ e $s = 1,\ldots,k$, allora esiste una allocazione z' tale che $u_i(z') = u_i(z^*)$ per $i = 1,\ldots,n$ e $\omega_s(z') \le \Omega_s$ per $s \ne h$ e $s = 1,\ldots,k$, cioè $\omega(z') < \omega(z^*)$ e $u(z') = u(z^*)$, per cui z^* non è efficiente secondo il criterio delle risorse minimali. □

Questa proposizione consente di introdurre la nozione di *perdita sociale*. Essa indica la quantità di risorse sprecate da un'allocazione inefficiente. Si indichi con $g \in \mathbb{R}^k_+$ il paniere di risorse da usare come unità di misura. Ossia, la perdita sociale viene misurata dal numero L di panieri g di risorse sprecate. Se esiste[9] un $L \geq 0$ per cui $(\omega(z) - L\, g) \in \Omega_{min}(u(z))$, allora L è la perdita sociale di risorse determinata dall'allocazione z. Infatti, le stesse utilità fornite dall'allocazione z che richiede le risorse $\omega(z)$ possono essere fornite con la quantità di risorse $\omega(z) - L\, g$, per cui risultano sprecati L panieri g di risorse. Si noti come non possa mai essere $L < 0$ e come sia $L = 0$ se z è efficiente secondo il criterio delle risorse minimali, poiché in tal caso si ha $\omega(z) \in \Omega_{min}(u(z))$.

Esempio. Si consideri un'economia di puro scambio composta di due beni e due consumatori dotati di preferenze rappresentate dalle funzioni di utilità $u_1 = x_{11}\, x_{12}$ e $u_2 = x_{21}\, x_{22}$ e sia l'insieme delle allocazioni $Z = \mathbb{R}^4_+$ con $z = (x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22})$. Con riferimento alla Definizione 8.7 si hanno:

la funzione delle risorse $\omega_1(z) = x_{11} + x_{21}$ e $\omega_2(z) = x_{12} + x_{22}$;

la funzione delle utilità $u_1(z) = x_{11}\, x_{12}$ e $u_2(z) = x_{21}\, x_{22}$;

l'insieme delle allocazioni realizzabili con risorse date $C(\Omega_1, \Omega_2) = \{x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22} \in \mathbb{R}_+ : x_{11} + x_{21} = \Omega_1,\ x_{12} + x_{22} = \Omega_2\}$;

l'insieme delle allocazioni indifferenti rispetto a utilità date $D(u_1, u_2) = \{x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22} \in \mathbb{R}_+ : x_{11}\, x_{12} = u_1,\ x_{21}\, x_{22} = u_2\}$;

l'insieme delle utilità ottenibili con risorse date $U(\Omega_1, \Omega_2) = \{u_1, u_2 \in \mathbb{R}_+ : x_{11}\, x_{12} = u_1,\ x_{21}\, x_{22} = u_2,\ x_{11} + x_{21} = \Omega_1,\ x_{12} + x_{22} = \Omega_2;\ x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22} \in \mathbb{R}_+\}$;

l'insieme delle risorse richieste per ottenere utilità date $\Omega(u_1, u_2) = \{\Omega_1, \Omega_2 \in \mathbb{R}_+ : x_{11}\, x_{12} = u_1,\ x_{21}\, x_{22} = u_2,\ x_{11} + x_{21} = \Omega_1,\ x_{12} + x_{22} = \Omega_2;\ x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22} \in \mathbb{R}_+\}$;

l'insieme delle utilità massimali rispetto a risorse date $U_{max}(\Omega_1, \Omega_2) = \{u_1, u_2 \in \mathbb{R}_+ : u_1^{1/2} + u_2^{1/2} = (\Omega_1\, \Omega_2)^{1/2}\}$;

l'insieme delle risorse minimali rispetto a utilità date $\Omega_{min}(u_1, u_2) = \{\Omega_1, \Omega_2 \in \mathbb{R}_+ : u_1^{1/2} + u_2^{1/2} = (\Omega_1\, \Omega_2)^{1/2}\}$;

l'insieme delle allocazioni con utilità massimali per risorse date $PO_{u,max}(\Omega_1, \Omega_2) = \{x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22} \in \mathbb{R}_+ : x_{12} = x_{11}\frac{\Omega_2}{\Omega_1},\ x_{21} = \Omega_1 - x_{11},\ x_{22} = \Omega_2 - x_{11}\frac{\Omega_2}{\Omega_1};\ x_{11} \in [0, \Omega_1]\}$;

l'insieme delle allocazioni con risorse minimali per utilità date $PO_{\Omega,min}(u_1, u_2) = \{x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22} \in \mathbb{R}_+ : x_{12} = \frac{u_1}{x_{11}},\ x_{21} = x_{11}\frac{u_2^{1/2}}{u_1^{1/2}},\ x_{22} = \frac{(u_1 u_2)^{1/2}}{x_{11}};\ x_{11} \in [0, \Omega_1]\}$;

l'insieme delle allocazioni efficienti (secondo il criterio delle utilità massimali) per risorse date, coincidente per definizione con l'insieme $PO_{u,max}(\Omega_1, \Omega_2)$;

l'insieme delle allocazioni efficienti (secondo il criterio delle risorse minimali) per risorse date $PO_{\Omega,min}((\Omega_1, \Omega_2)$, coincidente anch'esso, per la Proposizione 8.7, con l'insieme $PO_{u,max}(\Omega_1, \Omega_2)$.

L'insieme delle utilità massimali rispetto a risorse date $U_{max}(\Omega_1, \Omega_2)$ può essere ottenuto risolvendo il problema $\max_{x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22}} u_2 = x_{21}\, x_{22}$ sotto i vincoli $x_{11}\, x_{12} = u_1$, $x_{11} + x_{21} = \Omega_1$ e $x_{12} + x_{22} = \Omega_2$. L'insieme delle risorse minimali rispetto a utilità date $\Omega_{min}(u_1, u_2)$ può essere ottenuto risolvendo il problema $\min_{x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22}} \Omega_2 = x_{12} + x_{22}$ sotto i vincoli $x_{11} + x_{21}$

[9] Non sempre esiste un L che soddisfa questa relazione. La definizione di perdita sociale è, in tale caso, un po' più complicata (ad esempio, come proposto in Montesano, 1997). La relazione indicata è sempre soddisfatta, in un'economia di puro scambio senza esternalità, se $X_i = \mathbb{R}^k_+$ per ogni $i = 1, \ldots, n$ e se le preferenze sono continue e fortemente monotone.

$= \Omega_1$, $x_{11}\ x_{12} = u_1$ e $x_{21}\ x_{22} = u_2$. Le soluzioni di questi problemi determinano rispettivamente gli insiemi delle allocazioni con utilità massimali per risorse date $PO_{u,max}(\Omega_1, \Omega_2)$ e delle allocazioni con risorse minimali per utilità date $PO_{\Omega,min}(u_1, u_2)$. Da quest'ultimo insieme si ottiene l'insieme delle allocazioni efficienti (secondo il criterio delle risorse minimali) per risorse date $PO_{\Omega,min}((\Omega_1, \Omega_2)$, imponendo alle utilità di essere ottenibili con le risorse date (imponendo, cioè, la realizzabilità dell'allocazione). Si può verificare come l'insieme così ottenuto coincida, essendo le preferenze fortemente monotone, con l'insieme delle allocazioni efficienti (secondo il criterio delle utilità massimali) per risorse date $PO_{u,max}(\Omega_1, \Omega_2)$.

Quest'esempio consente anche di mostrare la misura della perdita sociale. Sia $g = (1, 0)$, si misuri, cioè, la perdita sociale in unità del primo bene. Si consideri l'allocazione $z = (x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22}) = (1, 4, 9, 1)$, per cui si ha $u(z) = (4, 9)$ e $\omega(z) = (10, 5)$. L'insieme delle risorse minimali rispetto alle utilità $(u_1, u_2) = (4, 9)$ è $\Omega_{min}(4, 9) = \{\Omega_1, \Omega_2 \in \mathbb{R}_+: \Omega_1\Omega_2 = 25\}$. La condizione $(\omega(z) - L\ g) \in \Omega_{min}(u(z))$ richiede $(10 - L, 5) \in \{\Omega_1, \Omega_2 \in \mathbb{R}_+: \Omega_1\Omega_2 = 25\}$, per cui risulta $L = 5$. Ossia, l'allocazione indicata spreca 5 unità del primo bene, essendo possibile pervenire alle stesse utilità con la quantità di risorse $(5, 5)$, tramite l'allocazione $(x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22}) = (2, 2, 3, 3)$.

Quanto indicato nell'esempio è rappresentato nelle Figure 8.7, 8.8 e 8.9, rispettivamente, nel diagramma di Edgeworth-Pareto, nello spazio delle utilità e in quello delle risorse.

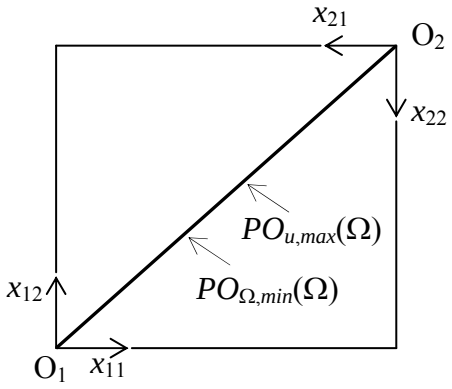

Figura 8.7

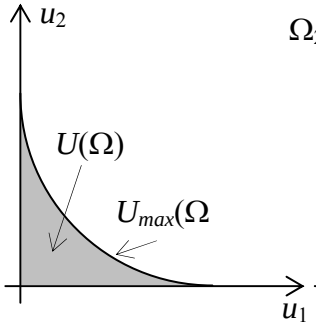

Figura 8.8

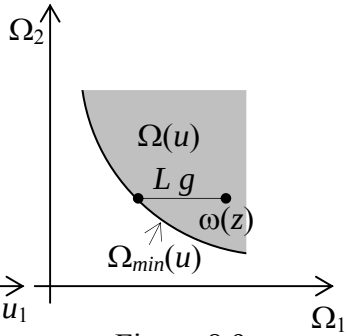

Figura 8.9

8.5 Allocazioni efficienti e funzione di benessere sociale

La funzione di benessere sociale (introdotta dalla seguente Definizione 8.9) è una nozione collegata all'efficienza. In particolare, un'allocazione massimizza il benessere sociale solo se è efficiente e l'insieme delle allocazioni efficienti coincide con l'insieme delle allocazioni che massimizzano almeno una funzione di benessere sociale.

Definizione 8.9 La *funzione di benessere sociale* è una funzione W: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ monotona crescente (o monotona fortemente crescente).[10] Essa

[10] Una funzione monotona crescente richiede $W(u') \geq W(u)$ se $u' \geq u$ (cioè se $u'-u$ è un vettore non negativo) e $W(u') > W(u)$ se $u' >> u$ (cioè $u'-u$ positivo). E'monotona fortemente crescente se $u' > u$ (cioè $u'-u$ semipositivo) implica $W(u') > W(u)$.

associa una valutazione W di benessere sociale al vettore delle utilità dei consumatori $u = (u_1, u_2,\ldots, u_n)$.

Anche se questa funzione implica la cardinalità delle utilità dei consumatori (poiché il valore di W non è invariante rispetto a loro trasformazioni monotone crescenti), le proprietà esaminate nel seguito di questo paragrafo sono indipendenti da essa (sono, cioè, invarianti rispetto a trasformazioni monotone crescenti delle utilità).

Si prenda in considerazione un insieme di allocazioni realizzabili C (oppure C_{FD}) non vuoto e compatto (cioè chiuso e limitato) ed abbiano su di esso i consumatori preferenze regolari e continue, rappresentate da funzioni di utilità $u_i = u_i(z)$ con $z \in C$ (oppure C_{FD}) e $i = 1,\ldots, n$. Valgono le proposizioni seguenti.

Proposizione 8.9 Ogni allocazione che massimizza una funzione di benessere sociale è efficiente. In particolare, è debolmente (fortemente) efficiente se la funzione di benessere sociale è monotona crescente (fortemente crescente).

Dimostrazione. La condizione $z^* \in \arg\max_{z \in C} W(u(z))$ significa che $W(u(z)) \leq W(u(z^*))$ per ogni $z \in C$. Allora, se la funzione di benessere sociale è monotona crescente, è escluso che possa essere $u(z)) >> u(z^*)$. Quindi, l'allocazione z^* è debolmente efficiente. Se la funzione di benessere sociale è fortemente crescente, allora non può essere $u(z)) > u(z^*)$ e l'allocazione z^* risulta fortemente efficiente. □

Proposizione 8.10 Ogni allocazione fortemente efficiente (e, quindi, non necessariamente ogni allocazione debolmente efficiente) massimizza almeno una funzione monotona fortemente crescente di benessere sociale. Ogni allocazione debolmente efficiente (e, quindi, anche ogni allocazione fortemente efficiente) massimizza almeno una funzione (crescente) di benessere sociale.

Dimostrazione. Questa proposizione può essere dimostrata introducendo una funzione di benessere sociale che è massimizzata da ogni allocazione efficiente (e soltanto da loro, per la Proposizione 8.9). Ogni allocazione z^* fortemente efficiente massimizza la funzione di benessere sociale (monotona fortemente crescente) $W(u(z)) = \Sigma_{i=1}^{n} u_i(z) - \max_{z' \in C: u(z') \geq u(z)} \Sigma_{i=1}^{n} u_i(z')$. Infatti, da un lato, è $W(u(z)) \leq 0$ per ogni $z \in C$ e, dall'altro lato, è $W(u(z^*)) = 0$ per ogni allocazione z^* fortemente efficiente (cioè, tale che $u(z') \not\geq u(z)$ per ogni allocazione z' in C diversa da z^*). Poi, ogni allocazione z^* debolmente efficiente massimizza la funzione di benessere sociale (monotona crescente) $W(u(z)) = \min\{u_1(z), u_2(z),\ldots, u_n(z)\} - \max_{z' \in C: u(z') \geq u(z)} \min\{u_1(z'), u_2(z'),\ldots, u_n(z')\}$. Infatti, da un lato, è $W(u(z)) \leq 0$ per ogni $z \in C$ e, dall'altro lato, è $W(u(z^*)) = 0$ per ogni allocazione z^* debolmente efficiente (cioè, tale che non esiste nessuna allocazione z' in C per cui $u(z') >> u(z)$).[11] □

[11] Questa dimostrazione presuppone che esistano i massimi e minimi indicati nelle funzioni di benessere sociale proposte. Vale però anche in assenza di questi sostituendo gli estremi superiori e inferiori ai massimi e minimi.

Queste proposizioni consentono l'introduzione di un ulteriore metodo per il calcolo delle allocazioni efficienti (oltre quelli indicati dalle Proposizioni 8.5 e 8.8). Si ha, infatti, che l'insieme delle allocazioni efficienti (secondo il criterio delle utilità massimali), introdotto dalla Definizione 8.5, coincide con l'insieme

$$PO_{u,max}(\Omega) = \{z^* \in C(\Omega): \text{vi è una funzione di benessere sociale per cui } z^* \in \arg\max_{z \in C(\Omega)} W(u(z))\}$$

o, anche,

$$PO_{u,max}(\Omega) = \{z^* \in C(\Omega): z^* \in \arg\max_{z \in C(\Omega)} (\Sigma_{i=1}^{n} u_i(z) - \max_{z' \in C(\Omega): u(z') \geq u(z)} \Sigma_{i=1}^{n} u_i(z'))\}$$

Infine, introducendo la funzione indiretta di benessere sociale $W^*: \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ definita dalla relazione $W^*(\Omega) = \max_{u \in U(\Omega)} W(u)$, si trova la seguente proposizione.

Proposizione 8.11 Se un vettore di utilità ottenibili con date risorse Ω^* massimizza una funzione di benessere sociale, allora questo vettore di risorse minimizza la corrispondente funzione indiretta di benessere sociale sull'insieme delle risorse richieste per ottenere le utilità che massimizzano la funzione di benessere sociale, ossia

$$u^* \in \arg\max_{u \in U(\Omega^*)} W(u) \Rightarrow \Omega^* \in \arg\min_{\Omega \in \Omega(u^*)} W^*(\Omega)$$

Dimostrazione. Sia $W(u^*) = \max_{u \in U(\Omega^*)} W(u)$. Poiché, per definizione, $W^*(\Omega) = \max_{u \in U(\Omega)} W(u)$, allora $W^*(\Omega) \geq W(u^*)$ se $u^* \in U(\Omega)$. Questa disuguaglianza vale per ogni $\Omega \in \Omega(u^*)$, cosicché $W(u^*) \leq \min_{\Omega \in \Omega(u^*)} W^*(\Omega)$. Inoltre, $\min_{\Omega \in \Omega(u^*)} W^*(\Omega) \leq W^*(\Omega^*)$ se $\Omega^* \in \Omega(u^*)$. Ora, la condizione $u^* \in \arg\max_{u \in U(\Omega^*)} W(u)$ implica $u^* \in U(\Omega^*)$ e questa implica $\Omega^* \in \Omega(u^*)$. Si ha, perciò, $W(u^*) \leq \min_{\Omega \in \Omega(u^*)} W^*(\Omega) \leq W^*(\Omega^*)$. Poiché la definizione di funzione indiretta di benessere sociale richiede $W^*(\Omega^*) = \max_{u \in U(\Omega^*)} W(u) = W(u^*)$, ne consegue che $W^*(\Omega^*) = \min_{\Omega \in \Omega(u^*)} W^*(\Omega)$, cioè $\Omega^* \in \arg\min_{\Omega \in \Omega(u^*)} W^*(\Omega)$. □

Questa proposizione consente di dimostrare il *principio della perdita* di Gossen-Menger, secondo cui, se si massimizza l'utilità (cioè, il benessere sociale), il valore di una risorsa è pari alla diminuzione di benessere sociale determinata da una diminuzione marginale della stessa risorsa. In altri termini, il valore delle risorse è pari al gradiente della funzione indiretta di benessere sociale, cioè a $D_\Omega W^*(\Omega^*)$.[12] Risulta, infatti, che i rapporti tra queste derivate coincidono con i prezzi ombra introdotti, per un'economia senza esternalità, nel Paragrafo 8.2 (si tenga, inoltre, presente che questi prezzi coincidono, come si vedrà nel Capitolo 11, con i prezzi dell'equilibrio concorrenziale). Per la Proposizione 8.11, la condizione $W(u^*) = \max_{u \in U(\Omega^*)} W(u)$ implica la condizione $W^*(\Omega^*) = \min_{\Omega \in \Omega(u^*)} W^*(\Omega)$ e questa, a sua volta, implica $\Omega^* \in \Omega_{min}(u^*)$ e, quindi, $\dfrac{D_{\Omega_h} W^*(\Omega^*)}{D_{\Omega_r} W^*(\Omega^*)} = -\left(\dfrac{d\Omega_r}{d\Omega_h}\right)_{\Omega_{min}(u^*)}$ per ogni coppia $h, r = 1,\ldots, k$, ove $-\left(\dfrac{d\Omega_r}{d\Omega_h}\right)_{\Omega_{min}(u^*)}$ è il saggio marginale di sostituzione tra due risorse sulla curva delle risorse minimali rispetto alle utilità u^*. Questo è uguale ai

[12] In questo ragionamento si assume che le funzioni di utilità e di trasformazione produttiva siano continue e differenziabili e che le soluzioni dei problemi di ottimo siano interne.

saggi marginali di sostituzione (tra gli stessi beni) dei consumatori e delle imprese, che sono tutti uguali tra loro nelle allocazioni efficienti (quali sono, per la Proposizione 8.9, le allocazioni che massimizzano una funzione di benessere sociale).

8.6 L'evoluzione della nozione di efficienza in economia

L'idea che il sistema economico sia vantaggioso per la società, non solo per i singoli agenti, è già presente nell'opera di Adam Smith, dietro la parabola della *mano invisibile*. Per gli economisti classici (e i fisiocrati, ai quali i classici si ispirarono sul tema) il vantaggio sociale è legato alla nozione di surplus produttivo. Per i fisiocrati, che ritengono esservi surplus soltanto nella produzione agricola, composta nel loro schema soltanto di grano, il surplus è la quantità di grano prodotta in più rispetto al suo impiego nella produzione (pari, sostanzialmente, alle sussistenze degli agricoltori). Per i classici è generatrice di surplus (e di profitto, cui il surplus è assimilato) anche l'industria manifatturiera. La determinazione del surplus (e del profitto) generato da produzioni diverse richiede la comparazione dei beni, cioè la teoria dei prezzi. Le insufficienze della teoria classica dei prezzi, fondata sul costo di produzione, quando vi sia una molteplicità di fattori produttivi non prodotti, non permettono però un'analisi adeguata del vantaggio sociale. Non impediscono, però, di ottenere alcuni risultati, come, ad esempio, il rilievo del mutuo vantaggio dello scambio internazionale tra due paesi, illustrato dal teorema dei costi comparati.

Il passo successivo è stato quello di misurare il vantaggio sociale in termini di utilità. Questo è stato un ritorno alla tradizione dell'economia preanalitica settecentesca, soprattutto napoletana (Carafa e successori), milanese (Verri e Beccaria) e inglese (Bentham e gli utilitaristi). L'analisi è stata dapprima compiuta considerando l'equilibrio parziale di mercato (che verrà qui esaminato nel Capitolo 10). Questo passo (dopo il lavoro pionieristico di Dupuit, 1844) è stato compiuto in gran parte da Marshall (1890). Assumendo che le funzioni di utilità siano additive e che l'utilità marginale del bene moneta sia costante, si ottiene che il vantaggio sociale, misurato in unità monetarie, è pari (per un mercato concorrenziale) all'area racchiusa tra la curva di domanda e quella di offerta. Si ottiene anche che la concorrenza determina, per il mercato del bene in esame, il massimo vantaggio sociale, mentre il monopolio determina un vantaggio sociale minore.

L'analisi dell'efficienza nei termini generali presentati in questo capitolo è principalmente opera di Pareto, anche se la nozione era già stata introdotta da Edgeworth (1881). L'analisi di Pareto (in particolare, 1894, 1896-7, 1902 e 1906) è molto estesa e tocca tutti i punti presentati in questo capitolo, sebbene non sempre in modo del tutto chiaro (per questo si è prestata a fraintendimenti). Pareto ha definito l'efficienza sia secondo il criterio delle utilità massimali (così come è poi stata accolta nella letteratura

posteriore), sia secondo il criterio delle risorse minimali (introducendo la condizione differenziale del primo ordine, esposta nel seguito, che contraddistingue le allocazioni efficienti), sia in relazione alla funzione di benessere sociale. Inoltre, ha introdotto i due teoremi dell'economia del benessere (che saranno esaminati nel Capitolo 11), che connettono l'efficienza all'equilibrio concorrenziale. Ha mostrato anche l'inefficienza dei regimi monopolistici e come si possa ottenere l'efficienza, in presenza di produzioni con rendimenti crescenti di scala, per mezzo di prezzi variabili (cioè con pagamenti non proporzionali alla quantità scambiata del bene). L'analisi sull'efficienza economica successiva al contributo di Pareto è consistita soprattutto nella sua precisazione e nell'applicazione alle diverse situazioni prese in considerazione dalla teoria economica.

La condizione differenziale del primo ordine introdotta da Pareto per connotare le allocazioni efficienti (con i simboli qui usati) richiede

$$\mathrm{d}\Omega_1 = \Sigma_{i=1}^{n} \frac{1}{\dfrac{\partial u_i(x_i)}{\partial x_{i1}}} \mathrm{d}u_i = 0$$

Essa nasce dal ragionamento seguente, che viene qui presentato per una economia di puro scambio $\mathcal{E} = (\langle X_i, \succsim_i \rangle, \Omega, i = 1,\ldots, n)$ standard (cioè, senza esternalità e con preferenze continue e fortemente monotone). Un'allocazione è efficiente (secondo il criterio delle risorse minimali) se non esiste un'altra allocazione indifferente ad essa per tutti i consumatori che richieda una quantità inferiore di una risorsa e una quantità uguale di tutte le altre risorse. Ossia, l'allocazione $(x_i^*)_{i=1}^{n}$ è efficiente se, nel confronto con ogni altra allocazione $(x_i)_{i=1}^{n}$ con $\Sigma_{i=1}^{n} x_{ih} = \Sigma_{i=1}^{n} x_{ih}^* = \Omega_h$ per $h = 2,\ldots, k$, la condizione $u_i(x_i^*) = u_i(x_i - \sigma_i e_1)$ per ogni $i = 1,\ldots, n$ (ove e_1 è il vettore con il primo elemento pari a 1 e tutti gli altri elementi pari a 0) implica $\Sigma_{i=1}^{n} \sigma_i \leq 0$. In altri termini, non è possibile togliere all'economia un po' della prima risorsa (come accade se $\Sigma_{i=1}^{n} \sigma_i > 0$) ed avere utilità uguali. Differenziando la relazione $u_i(x_i^*) = u_i(x_i - \sigma_i e_1)$ per ogni $i = 1,\ldots, n$, considerando cioè scostamenti infinitesimi da $(x_i^*)_{i=1}^{n}$, per cui $(x_i)_{i=1}^{n} = (x_i^*)_{i=1}^{n} + (\mathrm{d}x_i)_{i=1}^{n}$, si ottiene il differenziale del primo ordine

$$0 = \Sigma_{h=1}^{k} \frac{\partial u_i(x_i)}{\partial x_{ih}} \mathrm{d}x_{ih} - \frac{\partial u_i(x_i)}{\partial x_{i1}} \mathrm{d}\sigma_i \qquad i = 1,\ldots, n$$

cioè

$$\mathrm{d}\sigma_i = \frac{1}{\dfrac{\partial u_i(x_i)}{\partial x_{i1}}} \Sigma_{h=1}^{k} \frac{\partial u_i(x_i)}{\partial x_{ih}} \mathrm{d}x_{ih} = \frac{1}{\dfrac{\partial u_i(x_i)}{\partial x_{i1}}} \mathrm{d}u_i$$

e, quindi, la condizione $\mathrm{d}\Omega_1 = \Sigma_{i=1}^{n} \mathrm{d}\sigma_i = \Sigma_{i=1}^{n} \dfrac{1}{\dfrac{\partial u_i(x_i)}{\partial x_{i1}}} \mathrm{d}u_i \leq 0$, ove $\mathrm{d}u_i = \Sigma_{h=1}^{k} \dfrac{\partial u_i(x_i)}{\partial x_{ih}} \mathrm{d}x_{ih}$,

per ogni variazione $(\mathrm{d}x_i)_{i=1}^{n}$ con $\Sigma_{h=1}^{k} \mathrm{d}x_{ih} = 0$ per $h = 2,\ldots, k$. (Il segno di disuguaglianza

debole è, poi, un segno di uguaglianza se si tiene conto che questa è la condizione del primo ordine di minimo impiego della prima risorsa per date utilità).[13]

[13] Pareto non ha, tuttavia, considerato la condizione $u_i(x_i^*) = u_i(x_i - \sigma_i\, e_1)$, ma, erroneamente, la condizione $u_i(x_i^* + s_i\, e_1) = u_i(x_i)$, che conduce, imponendo $\Sigma_{i=1}^{n}\, s_i \leq 0$, alla stessa condizione differenziale del primo ordine suindicata, però ad una scorretta condizione del secondo ordine. Allais (1981) ha chiarito il significato dell'analisi di Pareto, rilevato l'errore e indicato la corretta condizione del secondo ordine. Allais chiama la condizione originariamente introdotta da Pareto come condizione di "massimo surplus equivalente" e quella corretta, da lui introdotta e presentata nel testo, come condizione di "massimo surplus distribuibile". Questa nozione coincide con l'efficienza secondo il criterio "delle risorse minimali" presentata nel Paragrafo 8.4.