Aldo Montesano PRINCIPI DI ANALISI ECONOMICA

Cap. 12 L'ANALISI DELL'EQUILIBRIO GENERALE II

12.1 L'equilibrio concorrenziale regolare

L'esistenza dell'equilibrio è condizione di coerenza logica per la teoria dell'equilibrio concorrenziale. Se l'equilibrio non esistesse, la teoria conterrebbe relazioni contraddittorie che la renderebbero logicamente falsa. Alquanto diverso è il problema dell'unicità dell'equilibrio. La possibilità che vi sia una molteplicità di equilibri non infirma la coerenza logica (e, eventualmente, la validità empirica) della teoria. La rende, però, insufficiente per determinare gli atti di scambio e di produzione e i prezzi. Questa determinazione richiede una teoria complementare o più generale che consenta di selezionare tra i diversi equilibri, esaminando le condizioni che conducono all'uno o all'altro equilibrio.[1]

Si consideri, ad esempio, il caso di una economia (con *free disposal*) con due soli beni. Presenti questa economia una funzione aggregata di eccesso di domanda continua e differenziabile che soddisfi la condizione al contorno di desiderabilità (secondo la Definizione 9.7, cioè, con $E_1(p_1, p_2) > 0$ per $p_1 = 0$ e $E_2(p_1, p_2) > 0$ per $p_2 = 0$), per cui i prezzi di equilibrio p_1^*, p_2^* sono positivi e l'equilibrio è espresso dalle condizioni $E_1(p_1^*, p_2^*) = 0$ e $E_2(p_1^*, p_2^*) = 0$. La omogeneità di grado zero delle funzioni di eccesso di domanda implica che esse hanno per argomento il rapporto di scambio p_1/p_2 , per cui i prezzi possono essere normalizzati, ad esempio, ponendo $(p_1, p_2) \in S^1$, cioè, $p_1 + p_2 = 1$. La condizione di desiderabilità richiede, allora, $E_1(0, 1) > 0$ e $E_2(1, 0) > 0$. La legge di Walras, richiedendo $p_1 E_1(p_1, p_2) + p_2 E_2(p_1, p_2) = 0$, implica non solo che l'equilibrio è determinato da una sola condizione, ad esempio, dalla condizione $E_1(p_1^*, p_2^*) = 0$ (poiché l'altra condizione, $E_2(p_1^*, p_2^*) = 0$,

[1] Un'analogia può essere utile. Si consideri l'equilibrio statico di un dado. La meccanica asserisce che un solido poggiato su un piano è in posizione di equilibrio statico se la verticale del baricentro incrocia il piano d'appoggio in un punto appartenente all'involucro convesso dei punti di appoggio del solido sul piano. Allora, un dado ha 26 posizioni di equilibrio, di cui 6 stabili (è il caso in cui il dado poggia su una faccia) e 20 instabili (il dado poggia su uno spigolo o un vertice). Questa molteplicità di equilibri non rende la meccanica statica, in qualche senso, falsa o priva di importanza, ma solo insufficiente per determinare univocamente la posizione di riposo del dado. (Si tenga presente che il termine "statica" ha significato diverso in meccanica e in economia).

essendo $p_1^*, p_2^* \in (0, 1)$, è automaticamente soddisfatta se lo è la prima), ma anche che $E_1(1, 0) = 0$ con $E_1(p_1, p_2) < 0$ per valori di p_1 vicini a 1. (Infatti, essendo, per continuità, $E_2(p_1, p_2) > 0$ per valori di p_2 vicini a zero, cioè, per valori di p_1 vicini a 1, la legge di Walras richiede che sia $E_1(p_1, p_2) < 0$ per valori di p_1 vicini a 1 e, per continuità, $E_1(p_1, p_2) \leq 0$ per $p_1 = 1$. Inoltre, se $p_1 = 1$, è necessariamente $E_1 = 0$, poiché nessun agente ha convenienza a vendere la sua dotazione del primo bene, ad avere, cioè, un eccesso negativo di domanda per esso, dal momento che può avere la quantità che desidera del secondo bene senza pagare nulla). Nelle Figure 12.1, 12.2 e 12.3 sono rappresentate tre funzioni $E_1(p_1, p_2)$ che soddisfano tutte le condizioni indicate (che garantiscono l'esistenza di un equilibrio con $p_1^* \in (0, 1)$), ma che presentano situazioni diverse per quanto riguarda la numerosità degli equilibri. Si ricordi che la condizione di desiderabilità richiede che i prezzi di equilibrio siano positivi, cioè $p_1^*, p_2^* \in (0, 1)$, per cui, pur essendo $E_1(1, 0) = 0$, i prezzi $p_1 = 1$, $p_2 = 0$ non determinano un equilibrio: infatti $E_2(1, 0) > 0$.

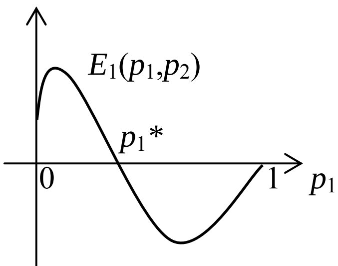

Figura 12.1

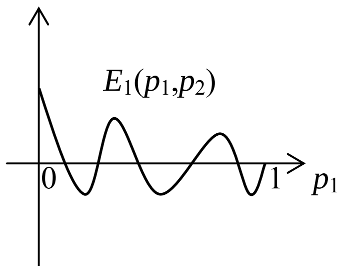

Figura 12.2

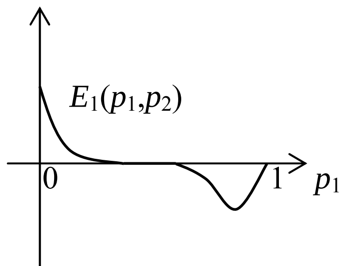

Figura 12.3

La Figura 12.1 mostra il caso in cui vi è un solo equilibrio. La Figura 12.2 quello in cui vi è una molteplicità di *equilibri isolati (o localmente unici)*. La Figura 12.3 il caso di un continuo di equilibri (in questa figura vi è un intervallo di prezzi tutti di equilibrio).

Con riferimento all'economia con soltanto due beni e con le ipotesi suindicate per la funzione aggregata di eccesso di domanda, queste figure consentono di individuare subito le condizioni che determinano il verificarsi dell'una o l'altra situazione. Si ha l'unicità globale dell'equilibrio (come nella Figura 12.1) se la funzione di eccesso di domanda (continua, differenziabile e con beni entrambi desiderabili) ha derivata negativa in ogni punto di equilibrio e solo se questa derivata non è positiva: cioè, se $E_1(p_1^*, p_2^*) = 0$ implica $\mathrm{D}_{p_1}E_1(p_1^*, p_2^*) < 0$ e solo se implica $\mathrm{D}_{p_1}E_1(p_1^*, p_2^*) \leq 0$. Un equilibrio è isolato se in esso la derivata della funzione di eccesso di domanda è non nulla: ossia (p_1^*, p_2^*) è un equilibrio isolato se $E_1(p_1^*, p_2^*) = 0$ e $\mathrm{D}_{p_1}E_1(p_1^*, p_2^*) \neq 0$. Tutti gli equilibri sono isolati (come nella Figura 12.2) se la funzione di eccesso di domanda ha derivata non nulla in ogni equilibrio: cioè, se $E_1(p_1^*, p_2^*) = 0$ implica $\mathrm{D}_{p_1}E_1(p_1^*, p_2^*) \neq 0$. Si noti come vi sia necessariamente un numero finito di equilibri isolati. Si ha un continuo di equilibri (come nella Figura 12.3) solo se è $\mathrm{D}_{p_1}E_1(p_1^*, p_2^*) = 0$ per qualche (p_1^*, p_2^*) con $E_1(p_1^*, p_2^*) = 0$.

Si può, infine, notare come la situazione descritta nella Figura 12.3 non sia robusta rispetto a modificazioni della funzione di eccesso di domanda. Basta che questa si modifichi di poco perché il continuo di equilibri sparisca (come evidenziato nella Figura 12.4). Invece, le situazioni descritte nelle Figure 12.1 e 12.2 sono *robuste* (*o strutturalmente stabili*). Una piccola alterazione della funzione di eccesso di domanda non modifica la presenza di un solo equilibrio (nella Figura 12.1) e la presenza di equilibri isolati e il loro numero (nella Figura 12.2), come evidenziato nella Figura 12.5. La Figura 12.6 mostra, invece, un caso in cui gli equilibri sono isolati, ma il loro numero non è robusto. Si può notare, in questa figura, come la funzione di eccesso di domanda presenti, in corrispondenza al prezzo di equilibrio non robusto, derivata nulla. Si noti, anche, come il numero di equilibri robusti sia necessariamente dispari.

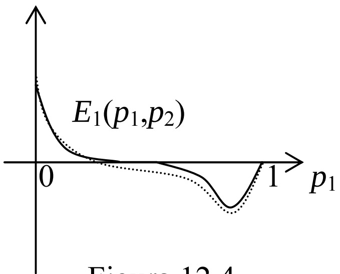

Figura 12.4

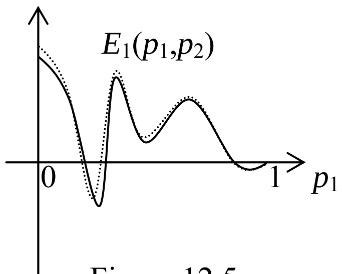

Figura 12.5

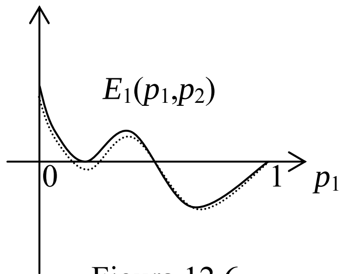

Figura 12.6

Si può, allora, congetturare, in base al caso dell'economia con due beni, che la robustezza è una proprietà strettamente collegata alla condizione $\mathrm{D}_{p_1} E_1(p_1^*, p_2^*) \neq 0$. Quanto ottenuto finora vale per il caso con due beni. Occorre, ora, esaminare la questione per il caso con un numero k qualsiasi di beni.

L'analisi successiva riguarda le economie che presentano una funzione aggregata di eccesso di domanda $E\colon \mathbb{R}^k_+ \to Z$, ove $Z = \sum_{i=1}^n X_i - \sum_{j=1}^m Y_j - \{\Omega\}$, ad un solo valore (è, cioè, una funzione vera e propria, non una corrispondenza),[2] continua e differenziabile. Si assume, inoltre, che questa funzione sia omogenea di grado zero (cioè, $E(\alpha p) = E(p)$ per ogni $\alpha > 0$, per cui i prezzi possono essere normalizzati, ponendo, ad esempio, $p \in S^{k-1}$), soddisfi la legge di Walras (cioè, $p\,E(p) = 0$ per ogni $p \in S^{k-1}$) e la condizione al contorno di desiderabilità per tutti i beni (cioè, per ogni $h = 1,\ldots, k$, si ha $E_h(p) > 0$ per ogni $p \in S^{k-1}$ con $p_h = 0$).

E' già noto che per queste economie l'equilibrio esiste e che in ogni equilibrio il vettore dei prezzi è positivo (Paragrafi 11.4 e11.6). Per queste economie i vettori p^* di prezzi di equilibrio sono soluzione del sistema di equazioni

[2] Questa ipotesi esclude, in una economia di produzione, i rendimenti di scala costanti. Per questa ragione, spesso, i ragionamenti seguenti vengono riferiti alle economie di puro scambio. Sono, però, possibili loro estensioni che si applicano anche al caso in cui l'eccesso aggregato di domanda è una corrispondenza. Dierker (1982) presenta una rassegna sulle questioni esaminate in questo paragrafo che include anche queste analisi.

$$E(p) = 0$$

Questo sistema ha non più di $k-1$ equazioni indipendenti, poiché la legge di Walras introduce una dipendenza lineare, ed ha $k-1$ incognite, anche se i prezzi sono k, poiché, essendo le funzioni $E(p)$ omogenee di grado zero, si può introdurre una normalizzazione dei prezzi, per cui, ad esempio, $p \in S^{k-1}$, cioè, con $\sum_{h=1}^{k} p_h = 1$. Si possono, allora, trascurare una equazione dal sistema, ad esempio, la k-esima equazione (questa è automaticamente soddisfatta se lo sono le altre) ed un prezzo, ad esempio, p_k (questo è automaticamente determinato se lo sono gli altri). Si considerano, quindi, gli eccessi di domanda dei primi $k-1$ beni e i prezzi di questi, ossia i vettori $\tilde{E} = [I \vdots 0]E$ e $\tilde{p} = [I \vdots 0]p$, ove I è la matrice identità con $k-1$ righe e colonne e 0 il vettore nullo. Perciò, nel seguito di questo paragrafo viene preso in considerazione il sistema di $k-1$ equazioni

$$\tilde{E}_h(p_1,\ldots,p_k) = 0\,, \qquad h = 1,\ldots,k-1$$

e la condizione di normalizzazione, ad esempio, $p \in S^{k-1}$, quando si vogliano determinare tutti i prezzi (e non soltanto i rapporti di scambio).

Le proposizioni seguenti sono indipendenti dalla normalizzazione adottata per i prezzi (anche se esposte con riferimento alla normalizzazione per cui $p \in S^{k-1}$). Ossia, si ottengono le stesse proprietà qualunque normalizzazione dei prezzi venga introdotta. Un'altra normalizzazione frequentemente usata nei Paragrafi successivi (possibile perché i prezzi di equilibrio sono positivi) pone un prezzo pari a uno, ad esempio, $p_k = 1$, prende, cioè, il k-esimo bene come unità di conto, per cui i prezzi divengono i rapporti di scambio rispetto a questo bene.

Si introduca, ora, la seguente definizione.

Definizione 12.1 (*Equilibrio ed economia regolari*) Un vettore di prezzi di equilibrio $p^* \in S^{k-1}$ è regolare se la matrice jacobiana $\mathrm{D}_{\tilde{p}}\tilde{E}(p^*)$ non è singolare (se, cioè, non ha determinante nullo). Una economia è regolare se tutti i vettori di prezzi di equilibrio sono regolari.

La condizione di regolarità implica l'unicità locale e la finitezza del numero degli equilibri, come indicano le proposizioni seguenti.

Proposizione 12.1 Ogni vettore di prezzi di equilibrio regolare è isolato (o localmente unico), ossia, se $p^* \in S^{k-1}$ è regolare, allora esiste un $\varepsilon > 0$ tale che $\tilde{E}(p) \neq 0$ per ogni $\tilde{p} \neq \tilde{p}^*$ con $\|\tilde{p} - \tilde{p}^*\| < \varepsilon$, ove $\tilde{p} = [I \vdots 0]p$ con $p \in S^{k-1}$.

Dimostrazione. Lo sviluppo in serie di Taylor di $\tilde{E}(p)$ nell'intorno di $p^* \in S^{k-1}$, essendo $\tilde{E}(p^*) = 0$, indica $\tilde{E}(p) = \mathrm{D}_{\tilde{p}}\tilde{E}(p^*)\,\mathrm{d}\tilde{p} + \ldots$ Risulta, perciò, $\tilde{E}(p) \neq 0$ per ogni $\mathrm{d}\tilde{p} \neq 0$ poiché la matrice $\mathrm{D}_{\tilde{p}}\tilde{E}(p^*)$ non è singolare. Vi è, allora, per continuità, un intorno di p^* in S^{k-1} in cui $\tilde{E}(p) \neq 0$. □

Proposizione 12.2 Un'economia regolare ha un numero finito di vettori di prezzi di equilibrio.

Dimostrazione. La continuità della funzione $\tilde{E}(p)$ implica che l'insieme dei vettori di prezzi di equilibrio (definiti dalla condizione $\tilde{E}(p) = 0$) è chiuso. Questo insieme è anche limitato (poiché S^{k-1} è limitato). E', inoltre, discreto, poiché, per la Proposizione 12.1, i suoi punti sono isolati. Ne consegue che l'insieme dei vettori dei prezzi di equilibrio, essendo compatto e discreto, è finito, è, cioè, composto da un numero finito di punti. □

Si dimostra anche che un'economia regolare ha un numero dispari di equilibri. A questo riguardo, si introduca per ogni equilibrio un indice, così definito.

Definizione 12.2 (*Indice di un equilibrio regolare e di un'economia regolare*) Si definisce indice di un vettore di prezzi di equilibrio regolare

$$\text{ind } p^* = (-1)^{k-1} \text{ seg det } D_{\tilde{p}}\tilde{E}(p^*)$$

ove il simbolo "segno" è tale che seg $\beta = 1$ se $\beta > 0$ e seg $\beta = -1$ se $\beta < 0$. Allora, tenendo conto che det $D_{\tilde{p}}\tilde{E}(p^*) \neq 0$ per la Definizione 12.1, l'indice può assumere valore 1 oppure -1. (Nel caso, già esaminato, con soltanto due beni, l'indice risulta pari a 1 se $D_{p_1}E_1(p_1^*, p_2^*) < 0$ e pari a -1 se $D_{p_1}E_1(p_1^*, p_2^*) < 0$). Si definisce come indice di un'economia regolare, tenendo conto che questa ha un numero finito di equilibri, la somma degli indici dei suoi vettori di prezzi di equilibrio, cioè $\sum_{\{p^* \in S^{k-1}: \tilde{E}(p^*)=0\}} \text{ind } p^*$.

La proposizione seguente deriva da un teorema di topologia differenziale (*teorema dell'indice*).

Proposizione 12.3 Se l'economia è regolare, allora $\sum_{\{p^* \in S^{k-1}: \tilde{E}(p^*)=0\}} \text{ind } p^* = 1$. Questa proposizione implica che il numero dei vettori di prezzi di equilibrio è dispari. Infatti, una somma di addendi pari a 1 o a -1 è pari a 1 se e solo se il numero degli addendi è dispari.

Dimostrazione. La dimostrazione formale non viene indicata. Una intuizione del fatto che un'economia regolare presenta un numero dispari di equilibri è fornita dal ragionamento seguente. Si prenda in considerazione un'economia con gli stessi beni dell'economia in esame e con un solo vettore di prezzi di equilibrio. Abbia questa economia la funzione aggregata di eccesso di domanda $\hat{E}(p)$ continua e differenziabile e sia il suo vettore di prezzi di equilibrio $\hat{p}^* >> 0$. Si consideri la funzione $E'(p, \lambda) = \lambda E(p) + (1-\lambda)\hat{E}(p)$ con $\lambda \in [0, 1]$, ove $E(p)$ è la funzione aggregata di eccesso di domanda dell'economia in esame, e si consideri la condizione $E'(p, \lambda) = 0$. Questo sistema è composto da k–1 equazioni e da k incognite (k–1 prezzi e λ). Le sue soluzioni $\{p \in S^{k-1}, \lambda \in [0, 1]$: $E'(p, \lambda) = 0\}$ hanno un grado di libertà e sono rappresentate da curve nell'insieme $\{p \in S^{k-1}, \lambda \in [0, 1]\}$. Queste curve non raggiungono mai prezzi nulli (o pari a 1) poiché vale la condizione di desiderabilità. Nella Figura 12.7 è indicata una situazione possibile per il caso con $k = 2$, indicando il prezzo p_1 (tenendo presente che $p_2 = 1 - p_1$), però il ragionamento può essere esteso al caso con $k > 2$.

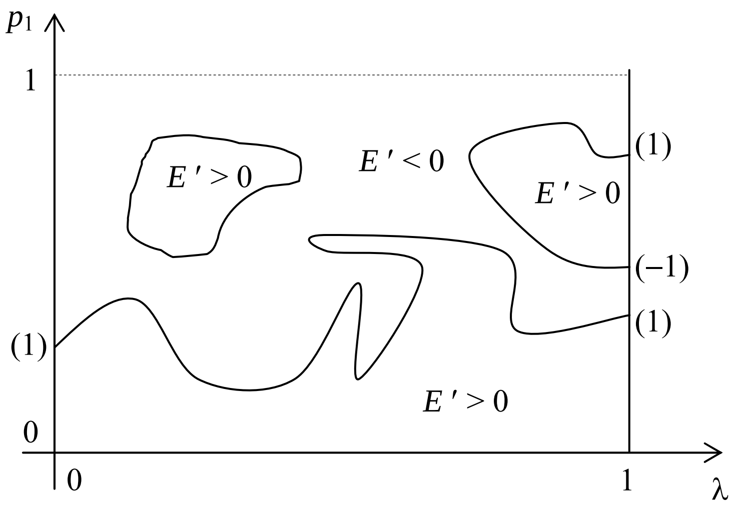

Figura 12.7

Le soluzioni $\{p\in S^1,\ \lambda\in[0,\ 1]:\ E'(p,\lambda)=0\}$ sono rappresentate dalle curve tracciate all'interno del rettangolo. Esse sono o curve chiuse o intersecano i lati del rettangolo definiti da $\lambda=0$ e da $\lambda=1$. Le curve non si interrompono mai per $\lambda\in(0,\ 1)$ perché la funzione $E'(p,\lambda)$ è continua. (Infatti, essendo il segno di $E'(p,\lambda)$ diverso sopra e sotto ogni tratto di curva, mentre sulla curva si ha $E'(p,\lambda)=0$, se la curva si interrompesse per $\lambda\in(0,\ 1)$, allora si potrebbe passare da un valore negativo di $E'(p,\lambda)$ ad un valore positivo senza passare dallo zero, possibilità esclusa dalla continuità della funzione $E'(p,\lambda)$). Inoltre, essendo l'economia in esame regolare, è escluso che vi siano curve tangenti alla retta $\lambda=1$. L'intersezione è unica per $\lambda=0$, poiché $\hat{E}(p)=0$ ha una sola soluzione. Allora, essendovi una sola intersezione per $\lambda=0$, poiché ogni curva ha due o nessuna intersezione con i lati del rettangolo definiti da $\lambda=0$ e da $\lambda=1$, risulta che vi è un numero dispari di intersezioni per $\lambda=1$. Ne consegue che $E(p)=0$ ha un numero dispari di soluzioni. (Gli indici delle soluzioni per $\lambda=0$ e per $\lambda=1$ sono indicati in figura tra parentesi e sono determinati in base al cambiamento del segno di E'). □

Quanto finora stabilito riguarda le economie regolari. Si tratta, ora, di esaminare se queste sono il caso normale o no, se, cioè, le economie non regolari possono essere rilevanti. (Questo problema si connette a quanto già visto per il caso con due beni, ove si è indicato che le economie non regolari sono strutturalmente instabili). A questo riguardo, si giunge, con i ragionamenti seguenti, ad affermare che la regolarità è una proprietà normale, o generica. La prima cosa da fare, a questo punto, è definire cosa è una *proprietà generica*.

Si consideri un'insieme di economie, a ciascuna delle quali corrisponde una funzione aggregata di eccesso di domanda $E(p)$. E' possibile rappresentare l'insieme di queste funzioni (una per ciascuna economia) con l'insieme $\{E(p;c): c\in C\}$, ove C è un insieme di parametri, tali che ogni suo elemento c individua una economia. Ossia, ogni economia è caratterizzata da un particolare vettore c, per cui la sua funzione aggregata di eccesso di domanda è $E(p;c)$. In termini grossolani, una proprietà di $E(p)$ è generica se vale per ogni c di C o quasi per ogni c di C. Una definizione più precisa viene data tra poco per il caso in cui C è un sottoinsieme di uno spazio euclideo con un numero finito γ di dimensioni su cui è definibile una misura. (Se C è un intervallo in $\mathbb{R}$, cioè, $\gamma=1$, allora una misura possibile è la lunghezza; se C è un sottoinsieme non degenere di $\mathbb{R}^2$, cioè, $\gamma=2$, una misura possibile è l'area; e così via).[3]

La definizione più semplice di genericità (una analisi approfondita è presentata da Mas–Colell, 1985) indica che una proprietà è generica se vale per un sottoinsieme di C di misura piena, ossia, non vale per un sottoinsieme di C di misura nulla. (Se C è un intervallo in $\mathbb{R}$, allora una proprietà è generica se vale per ogni c di C, tranne, eventualmente, che in punti isolati di C, ecc.).

Una spiegazione intuitiva del significato della genericità è fornita dalla considerazione che se c viene determinato dal caso secondo una distribuzione non atomica di probabilità su C (come è una distribuzione uniforme, o una distribuzione normale non degenere), allora è nulla la probabilità che risulti una economia per la quale la proprietà generica non vale (ossia, la proprietà generica si presenta con probabilità pari a 1, sebbene non sia necessariamente certa). Un'altra spiegazione intuitiva (vicina alla nozione di stabilità strutturale) indica che una proprietà è generica se resiste ad una perturbazione di c (se, cioè, vale per ogni punto di un intorno di c).

[3] Esiste una teoria generale della misura cui riferirsi per eventuali approfondimenti (presentata, ad esempio, da Kirman, 1981, per l'economia). La misura può essere definita anche su spazi funzionali (o a infinite dimensioni). Inoltre, una definizione di genericità può essere fornita anche in assenza di misurabilità.

La proposizione secondo cui la regolarità dell'economia è una proprietà generica discende dal *teorema di trasversalità* (che viene qui presentato, senza dimostrazione, con riferimento al problema in esame, ponendo, al solito, $\tilde{E} = [I \vdots 0]E$ e $\tilde{p} = [I \vdots 0]p$).

Teorema di trasversalità. Se la funzione $E(p;c)$, con $E : S^{k-1} \times C \to Z$, ha, in corrispondenza alle coppie (p,c) per cui $E(p;c) = 0$, matrice jacobiana $\mathrm{D}_{\tilde{p}.c}\tilde{E}(p;c)$ con rango k–1, allora la sottomatrice $\mathrm{D}_{\tilde{p}}\tilde{E}(p;c)$ ha, in corrispondenza alle coppie (p,c) per cui $E(p;c) = 0$, rango k–1 genericamente (ossia, quasi per ogni c).

Si noti come la matrice $\mathrm{D}_{\tilde{p}.c}\tilde{E}(p;c)$ ha k–1 righe e k–1+γ colonne, mentre la matrice $\mathrm{D}_{\tilde{p}}\tilde{E}(p;c)$ ha k–1 righe e colonne, per cui la condizione che il rango sia k–1 è molto più stringente per la seconda matrice che per la prima. Questo teorema implica che se le economie possibili sono sufficientemente variegate, allora la regolarità è una proprietà generica, ossia, è quasi certo (con probabilità pari a 1 se l'economia è scelta a caso) che la condizione di regolarità sia soddisfatta.

Nel Paragrafo 12.5, ove viene analizzata la statica comparata dell'equilibrio generale concorrenziale, si considererà, in particolare, il caso in cui l'insieme delle economie possibili è costituito da economie che differiscono tra loro nelle dotazioni dei consumatori. Allora, la caratteristica c è rappresentata dalla allocazione iniziale $\omega \in \mathbb{R}^{nk}_{++}$, ove $\omega = (\omega_{11},\ldots, \omega_{1k},\ldots, \omega_{n1},\ldots, \omega_{nk})$. La proposizione seguente mostra come la matrice $\mathrm{D}_{\omega}\tilde{E}(p;\omega)$ e, quindi, a maggior ragione, la matrice $\mathrm{D}_{\tilde{p},\omega}\tilde{E}(p;\omega)$ abbiano rango k–1 .

Proposizione 12.4 La matrice $\mathrm{D}_{\omega}\tilde{E}(p;\omega)$ ha rango k–1 per ogni $p \in S^{k-1}$ e $\omega \in \mathbb{R}^{nk}_{++}$.

Dimostrazione. Se, considerando una particolare variazione di ω, si dimostra che la matrice jacobiana di $\tilde{E}(p;\omega)$ rispetto a questa variazione ha rango k–1 , allora si è anche dimostrato che $\mathrm{D}_{\omega}\tilde{E}(p;\omega)$ ha rango k–1 , poiché questa è la matrice jacobiana di $\tilde{E}(p;\omega)$ rispetto a tutte le possibili variazioni di ω . Si consideri una variazione $\mathrm{d}\omega_1$ della dotazione del primo consumatore che lasci immutata la sua capacità di spesa, cioè con $\sum_{h=1}^{k-1} p_h \mathrm{d}\omega_{1h} + (1 - \sum_{h=1}^{k-1} p_h)\mathrm{d}\omega_{1k} = 0$. Il paniere di beni che egli sceglie non muta a seguito di questa variazione. Perciò, il suo eccesso di domanda, che era $e_1(p;\omega_1)$ prima della variazione, diviene $e_1(p;\omega_1) - \mathrm{d}\omega_1$, ossia, la variazione del suo eccesso di domanda è pari a $-\mathrm{d}\omega_1$. Poiché nulla cambia per gli altri agenti, questa è anche la variazione dell'eccesso aggregato di domanda. La variazione $(\mathrm{d}\omega_{1h})_{h=1}^{k-1}$ è qualsiasi, poiché $\omega_{1k} > 0$ e si può sempre porre $\mathrm{d}\omega_{1k} = -\dfrac{1}{p_k}\sum_{h=1}^{k-1} p_h \mathrm{d}\omega_{1h}$ (tenendo presente che $p_k \in (0,\ 1)$). Indicando, allora, con $\mathrm{d}\tilde{\omega}_1$ il vettore $(\mathrm{d}\omega_{1h})_{h=1}^{k-1}$, si ha che l'eccesso di domanda per i primi k–1 beni, che era $\tilde{E}(p;\omega)$ prima della variazione, diviene $\tilde{E}(p;\omega) - \mathrm{d}\tilde{\omega}_1$, per cui $\mathrm{D}_{\tilde{\omega}_1}\tilde{E}(p;\omega) = -I$, ove I è la matrice identità, che ha rango k–1 , e il simbolo $\mathrm{D}_{\tilde{\omega}_1}$ indica la matrice delle derivate rispetto a $(\omega_{1h})_{h=1}^{k-1}$ una volta posto $\omega_{1k} = \dfrac{1}{p_k}(m_1 - \sum_{h=1}^{k-1} p_h \omega_{1h})$. □

Applicando il teorema di trasversalità alla Proposizione 12.4, risulta immediatamente la proposizione seguente.

Proposizione 12.5 L'economia rappresentata dalla funzione aggregata di eccesso di domanda $E(p;\omega)$ è genericamente regolare per ogni $\omega \in \mathbb{R}^{nk}_{++}$.

12.2 L'unicità globale dell'equilibrio generale concorrenziale

La condizione di regolarità dell'economia e il teorema dell'indice consentono di definire non solo la unicità locale degli equilibri ma anche, introducendo una ulteriore condizione, quella globale. Questa condizione estende quella già vista per l'economia con due soli beni, che presenta un solo equilibrio (per un'economia regolare rappresentata da una funzione continua e differenziabile di eccesso di domanda che soddisfi la condizione al contorno di desiderabilità) se e solo se l'equilibrio implica che la derivata di questa funzione sia negativa. Si ricordi che $\tilde{E} = [I \vdots 0]E$ e $\tilde{p} = [I \vdots 0]p$).

Proposizione 12.6 Una economia regolare, caratterizzata da una funzione aggregata continua e differenziabile di eccesso di domanda E: $S^{k-1} \to Z$ che soddisfa la condizione al contorno di desiderabilità per tutti i beni, presenta un solo equilibrio se e solo se la condizione di equilibrio $E(p^*) = 0$ implica $(-1)^{k-1}$ det $\mathrm{D}_{\tilde{p}}\tilde{E}(p^*) > 0$.

Dimostrazione. Essendo l'economia regolare, allora, per la Proposizione 12.3, la somma degli indici (che possono essere pari a 1 o a -1) dei vettori di prezzi di equilibrio è uguale a 1 . La condizione "$E(p^*) = 0$ implica $(-1)^{k-1}$ det $\mathrm{D}_{\tilde{p}}\tilde{E}(p^*) > 0$ " richiede, ricordando la Definizione 12.2, che l'indice sia pari a 1 in ogni equilibrio. Ne consegue che essa è necessaria e sufficiente per l'unicità globale dell'equilibrio. □

La Proposizione 12.6 è piuttosto formale, non evidenzia le caratteristiche dell'economia che sostengono la presenza di un solo equilibrio. Da essa, tuttavia, si può trarre l'implicazione seguente, che ha significato economico.

Se la matrice jacobiana $\mathrm{D}_pE(p)$ della funzione aggregata di eccesso di domanda $E(p)$ è simmetrica e semidefinita negativa, allora $(-1)^{k-1}$ det $\mathrm{D}_{\tilde{p}}\tilde{E}(p) \geq 0$. (Infatti, i suoi minori principali di ordine pari hanno segno non negativo e quelli di ordine dispari segno non positivo. Quindi, det $\mathrm{D}_{\tilde{p}}\tilde{E}(p)$, che è un minore principale di ordine $k-1$, ha segno non negativo se k è dispari e segno non positivo se k è pari). Tenendo conto che $E(p) = \sum_{i=1}^{n} d_i(p) - \omega_i - \sum_{j=1}^{m} s_j(p)$ e che la somma di matrici (simmetriche) semidefinite negative è una matrice (simmetrica) semidefinita negativa, la condizione è soddisfatta se tutte le matrici jacobiane $\mathrm{D}_p d_i(p)$, per $i = 1,\dots, n$, e $-\mathrm{D}_p s_j(p)$, per $j = 1,\dots, m$, sono simmetriche e semidefinite negative. L'analisi della scelta di produzione garantisce che le matrici $\mathrm{D}_p s_j(p)$ sono simmetriche e semidefinite positive (Proposizione 5.8), per cui le matrici $-\mathrm{D}_p s_j(p)$ sono simmetriche e semidefinite negative. Invece, l'analisi della scelta di consumo (in particolare, Paragrafo 4.5 e Proposizione 3.14) indica che le matrici $\mathrm{D}_p d_i(p)$ si compongono di due parti, di cui una, che esprime l'effetto di sostituzione, corrisponde alla matrice di Slutsky, che è simmetrica e semidefinita negativa, mentre l'altra, che esprime l'effetto di reddito, non è generalmente né simmetrica né semidefinita negativa, per cui le matrici $\mathrm{D}_p d_i(p)$ non sono generalmente semidefinite negative. Lo sono, allora, se prevale l'effetto di sostituzione, se, cioè, l'effetto di reddito è trascurabile rispetto all'effetto di sostituzione. Si può, perciò, dedurre che l'equilibrio è globalmente unico se le funzioni di domanda dei consumatori presentano un effetto di reddito trascurabile rispetto a quello di sostituzione, oppure se l'influenza dell'effetto di reddito non altera il segno del det $\mathrm{D}_{\tilde{p}}\tilde{E}(p)$. Le definizioni e proposizioni seguenti sono logicamente legate a questo risultato.

Definizione 12.3 (*Beni sostituti lordi per la funzione aggregata di eccesso di domanda*) Il bene h-esimo è sostituto lordo rispetto al bene t-esimo, con $h \neq t$ e $h, t = 1,\ldots, k$, se $\dfrac{\partial E_h(p)}{\partial p_t} > 0$.

Proposizione 12.7 Una economia regolare, caratterizzata da una funzione aggregata continua e differenziabile di eccesso di domanda $E\colon S^{k-1} \to Z$ che soddisfa la condizione al contorno di desiderabilità per tutti i beni, presenta un solo equilibrio se tutti i beni sono, in equilibrio, sostituti lordi rispetto agli altri beni, cioè, per ogni $p^* \in S^{k-1}$ con $E(p^*) = 0$, si ha $\mathrm{D}_{p_t} E_h(p^*) > 0$ per ogni $h, t = 1,\ldots, k$ con $h \neq t$.

Dimostrazione. La legge di Walras richiede che $p\, E(p) = 0$ per ogni $p \in S^{k-1}$. Derivando questa relazione rispetto a p , si ottiene $(\mathrm{D}_p E(p))^{\mathrm{T}} p + E(p) = 0$. Si ha, allora, in ogni equilibrio, $(\mathrm{D}_p E(p^*))^{\mathrm{T}} p^* = 0$. Si considerino gli eccessi di domanda dei primi k–1 beni e i prezzi di questi, ossia i vettori $\tilde{E} = [I \,\vdots\, 0]E$ e $\tilde{p} = [I \,\vdots\, 0]p$, ove I è la matrice identità con k–1 righe e colonne e 0 il vettore nullo. Tenendo conto che la condizione di sostituibilità lorda implica $\mathrm{D}_{p_h} E_k(p^*) > 0$ per ogni $h \neq k$ e che $p_k^* > 0$, si ha $(\mathrm{D}_{\tilde{p}} \tilde{E}(p^*))^{\mathrm{T}}\, \tilde{p}^* << 0$, cioè, $(-\mathrm{D}_{\tilde{p}} \tilde{E}(p^*))^{\mathrm{T}}\, \tilde{p}^* >> 0$. Poiché la matrice $(-\mathrm{D}_{\tilde{p}} \tilde{E}(p^*))^{\mathrm{T}}$ ha, per la condizione di sostituibilità lorda tutti elementi negativi tranne che sulla diagonale principale, valgono per essa le condizioni di Hawkins-Simon,[4] secondo cui tutti i minori principali della matrice $(-\mathrm{D}_{\tilde{p}} \tilde{E}(p^*))^{\mathrm{T}}$, e, quindi, quelli della matrice $-\mathrm{D}_{\tilde{p}} \tilde{E}(p^*)$, sono positivi. E', quindi, positivo, il determinante della matrice $-\mathrm{D}_p \tilde{E}(p^*)$, ossia, $(-1)^{k-1}$ det $\mathrm{D}_p \tilde{E}(p^*) > 0$. Ne consegue, per la Proposizione 12.6, che vi è un unico equilibrio. □

La condizione che tutti i beni siano sostituti lordi è severa, particolarmente nella produzione (infatti, la crescita del prezzo di un input può ridurre la domanda di un altro input della stessa produzione anche se i due input non sono complementari, poiché riduce la quantità di output).

Un'altra severa condizione sufficiente per l'unicità dell'equilibrio è fornita dalla estensione dell'assioma debole delle preferenze rivelate (*WARP*) alla funzione aggregata di eccesso di domanda. Il *WARP* (Definizione 4.1) è necessariamente soddisfatto dalla funzione di domanda di ogni consumatore (rappresentato da un sistema regolare di preferenza), ma non dalla funzione aggregata di domanda di tutti i consumatori (come indicato presentando la Proposizione 4.9). Per il singolo consumatore il *WARP* richiede che se $p\, e_i(p') \leq 0$ e $e_i(p') \neq e_i(p)$, allora $p'\, e_i(p) > 0$ (come si ricava dalla Definizione 4.1 ponendo $m_i = p\, \omega_i$, $m_i' = p'\, \omega_i$, $e_i(p) = d_i(p, m) - \omega_i$ e $e_i(p') = d_i(p', m') - \omega_i$). Per la funzione aggregata di eccesso di domanda il *WARP* richiederebbe che se $p\, E(p') \leq 0$ e $E(p') \neq E(p)$, allora $p'\, E(p) > 0$. Vale la seguente proposizione.

Proposizione 12.8 Una economia regolare, caratterizzata da una funzione aggregata di eccesso di domanda $E\colon S^{k-1} \to Z$ che soddisfa la condizione al contorno di desiderabilità per tutti i beni, presenta un solo equilibrio se la funzione aggregata di eccesso di domanda soddisfa l'assioma debole delle preferenze rivelate, se, cioè, le disuguaglianze $p\, E(p') \leq 0$ e $E(p') \neq E(p)$ implicano $p'\, E(p) > 0$.

[4] Secondo le condizioni di Hawkins-Simon (introdotte per l'analisi input-output, ricordata nella nota 15 del Capitolo 5), per le matrici quadrate B con elementi tutti non positivi tranne che sulla diagonale principale, cioè, con $b_{ij} \leq 0$ per $i \neq j$, sono condizioni equivalenti: *a*) esiste un $x \geq 0$ tale che $B\, x > 0$; *b*) tutti i minori principali di B sono positivi.

Dimostrazione. Vi siano, per assurdo, p^*, $p^{**} \in S^{k-1}$ due vettori di prezzi di equilibrio e sia $p = \alpha\, p^* + (1-\alpha)\, p^{**}$ con $\alpha \in (0, 1)$. Se fosse $E(p) \neq 0$, il *WARP* richiederebbe, essendo $E(p^*) = E(p^{**}) = 0$ e, quindi, $p\, E(p^*) = p\, E(p^{**}) \leq 0$, le disuguaglianze $p^*\, E(p) > 0$ e $p^{**}\, E(p) > 0$ e, quindi, anche $(\alpha\, p^* + (1-\alpha)\, p^{**})\, E(p) > 0$, cioè, $p\, E(p) > 0$. Però, la legge di Walras richiede che sia $p\, E(p) = 0$. Dovrebbe, allora, essere $E(p) = 0$ per ogni $p = \alpha\, p^* + (1-\alpha)\, p^{**}$, contrariamente alla condizione, richiesta dalla regolarità dell'economia, che gli equilibri siano isolati. Conseguentemente, non possono esserci due vettori di prezzi di equilibrio. □

L'assioma debole delle preferenze rivelate non è, come già ricordato, una condizione generalmente soddisfatta dalla funzione aggregata di eccesso di domanda. Lo è, tuttavia, in casi particolari. Ad esempio, il *WARP* risulta soddisfatto se valgono le condizioni di aggregazione di Antonelli-Nataf-Gorman (introdotte nella Proposizione 4.6). Infatti, in questo caso, per la Proposizione 4.7, la funzione aggregata di domanda dei consumatori è razionalizzabile, è possibile, cioè, introdurre un agente rappresentativo, la cui domanda è $D(p, M)$, ove $M = p\Omega + pS(p)$. L'agente rappresentativo ha capacità di spesa pari alla somma delle capacità di spesa dei consumatori, che è, per $i = 1,\ldots, n$, $m_i = p\omega_i + \sum_{j=1}^{m} \theta_{ij}\, ps_j(p)$, per cui $M = \sum_{i=1}^{n} m_i = p\Omega + p\sum_{j=1}^{m} s_j(p) = p\Omega + pS(p)$. Poiché la funzione $D(p, M)$ soddisfa il *WARP*, si ha, per la Definizione 4.1, che $pD(p', M') \leq M$ e $D(p', M') \neq D(p, M)$ implicano $p'D(p, M) > M'$. Essendo $E(p) = D(p, M) - \Omega - S(p)$, si ha, allora, che $p(E(p') + \Omega + S(p')) \leq p(\Omega + S(p))$ implica $p'(E(p) + \Omega + S(p)) > p'(\Omega + S(p'))$, cioè, che $pE(p') \leq pS(p) - pS(p')$ implica $p'E(p) > p'S(p') - p'S(p)$, se $E(p') + S(p') \neq E(p) + S(p)$. Poiché nel caso in esame, in cui la funzione di offerta è ad un solo valore, la massimizzazione del profitto (che vale anche nell'aggregato, come indicato nel Paragrafo 5.7) richiede, $pS(p) - pS(p') > 0$ e $p'S(p') - p'S(p) > 0$, risulta che la condizione $pE(p') \leq 0$ implica $pE(p') \leq pS(p) - pS(p')$ e questa implica $p'E(p) > p'S(p') - p'S(p) > 0$, cioè, come richiesto dalla Proposizione 10.8, che $pE(p') \leq 0$ implica $p'E(p) > 0$ se $E(p') \neq E(p)$ (si noti come le condizioni $pE(p') \leq 0$ e $E(p') \neq E(p)$ implichino $E(p') + S(p') \neq E(p) + S(p)$, poiché, altrimenti, se cioè fosse $E(p') + S(p') = E(p) + S(p)$ si avrebbe $p'E(p) = p'E(p') + p'S(p') - p'S(p) = p'S(p') - p'S(p) > 0$).

12.3 La stabilità dell'equilibrio in tempo logico (o con *tâtonnements*)

Come già per l'equilibrio parziale, così anche per l'equilibrio generale concorrenziale, sorge il problema di analizzare la stabilità dell'equilibrio. Questa analisi ha lo scopo di caratterizzare gli equilibri in relazione alla possibilità di realizzazione, saggiando se il comportamento del mercato conduce ad essi o no. Si noti come l'analisi della stabilità riguardi quella fase della determinazione dell'equilibrio (indicata all'inizio del Capitolo 10) costituita dal processo delle contrattazioni sul mercato da cui risultano i prezzi e l'allocazione di equilibrio. (Invece, l'analisi dell'equilibrio svolta finora ha esaminato le condizioni che definiscono l'equilibrio, non il processo secondo cui l'equilibrio viene raggiunto). Un equilibrio viene, quindi, definito stabile se è il risultato del processo di contrattazione. Un modo per saggiare la stabilità di un equilibrio consiste nel perturbarlo e nell'osservare se, cessata la perturbazione, si torna ad esso.

Una analogia con la meccanica può essere utile. Si immagini un punto materiale (cioè, dotato di massa) poggiato sul suolo e soggetto alla forza di gravità. Le posizioni di equilibrio stazionario sono i punti del suolo di pendenza nulla, come rappresentato nella Figura 12.8. Alcuni di questi punti sono equilibri stabili (i punti S_1, S_2 e S_3), altri instabili (i punti I_1, I_2 e I_3). Una perturbazione a partire dai primi (rappresentata da uno spostamento del punto materiale dalla posizione di equilibrio) è seguita, al cessare della perturbazione, da un movimento di ritorno alla posizione di equilibrio. Una perturbazione dai secondi è seguita da un movimento di allontanamento.

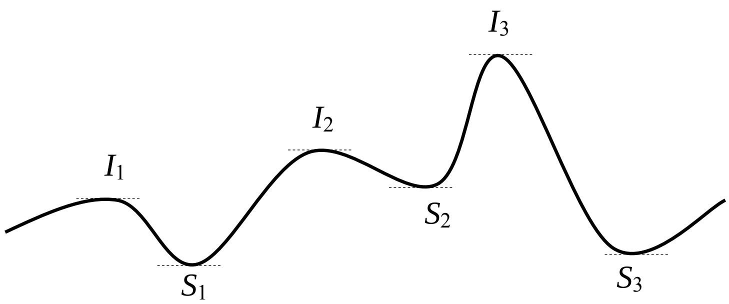

Figura 12.8

Da questa figura si può indurre che la determinazione delle condizioni di equilibrio e di stabilità (richiedenti, rispettivamente, che il profilo tracciato abbia derivata prima nulla e, nella posizione di equilibrio, derivata seconda positiva) non richiede la determinazione completa della dinamica del punto materiale, ma solo di una sua componente (che la forza di gravità spinge verso il basso). In altri termini, la proprietà della stabilità concerne la posizione di equilibrio, anche se la nozione di stabilità presuppone un processo dinamico di aggiustamento, che non è sempre necessario specificare, nel senso che una stessa posizione può rappresentare un equilibrio stabile rispetto ad una molteplicità di processi dinamici. (Nel Paragrafo 10.4 si è visto come l'equilibrio parziale sia stabile se la curva di domanda è decrescente e quella di offerta è crescente sia rispetto al processo dinamico walrasiano sia rispetto a quello marshalliano).

Per ricercare le condizioni di stabilità dell'equilibrio occorre, allora, una volta definito l'equilibrio, ipotizzare la perturbazione di questo e il processo dinamico che ne consegue. Le condizioni di stabilità sono quelle che determinano il ritorno all'equilibrio. Nel seguito viene ipotizzato che la perturbazione colpisca i prezzi e che il processo dinamico sia attuato dal banditore walrasiano, già introdotto nel Paragrafo 10.4. Il banditore grida un vettore di prezzi (si noti che il mercato è unico anche se vi sono trattati k beni), in corrispondenza al quale gli agenti (consumatori e produttori) comunicano al banditore le loro intenzioni di compravendita. Gli agenti sono impegnati ad eseguire le intenzioni comunicate al banditore solo se il vettore di prezzi è di equilibrio. Il banditore controlla se vi è o no equilibrio, cioè, se l'eccesso aggregato di domanda è nullo (o non positivo, se si considera il caso, trascurato nel seguito, in cui possono esserci beni liberi). Se questo è nullo, il banditore dichiara chiuso il processo e gli agenti sono impegnati ad eseguire gli scambi da loro comunicati al banditore. Se l'eccesso aggregato di domanda non è nullo, il banditore grida un nuovo vettore di prezzi, e così via. Durante il processo dinamico rappresentato dalla successione delle grida del banditore non si eseguono né scambi, né atti di produzione, né si modificano i "dati" dell'economia (numero di agenti, loro preferenze e dotazioni, numero di imprese e loro tecnologia). In questo senso, la fase della contrattazione avviene in un tempo fittizio, in un *tempo logico*, che è tale perché l'economia in esame non subisce alcuna modifica. (Vi sono altre analisi di stabilità, esaminate nel paragrafo successivo, in cui vi sono scambi durante la contrattazione e si determina, perciò, una modificazione dell'economia. In questo caso l'aggiustamento all'equilibrio avviene nel *tempo reale o storico*). L'ipotesi alla base dell'analisi della stabilità in tempo logico riguarda sostanzialmente la durata del processo di aggiustamento dei prezzi sul mercato: questa è ritenuta molto più breve di quella che determina i mutamenti dell'economia, includendo in questi ultimi le modificazioni delle scelte degli agenti conseguenti ad impegni di scambio e produzione. Il processo dinamico è determinato dal comportamento del banditore. Seguendo l'ipotesi walrasiana, si assume nel seguito che il banditore proceda per tentativi, o *tâtonnements*, innalzando il prezzo dei beni per i quali l'eccesso aggregato di domanda è positivo e riducendo il prezzo di quelli per i quali questo è negativo. Questo comportamento viene spesso indicato come *legge del mercato*. L'analisi successiva assume che il processo dinamico indicato si svolga nel tempo continuo, ossia che la successione di vettori di prezzi gridati dal banditore sia rappresentato dalla funzione $p(t)$, con $t \in \mathbb{R}_+$.

Nel caso di un'economia con due soli beni si ha la situazione già descritta nella Figura 10.5. In questo caso, un equilibrio (x^*, y^*, p_1^*, p_2^*), ove $x^* = (x_i^*)_{i=1}^n$ e $y^* = (y_j^*)_{j=1}^m$ è stabile se, considerando la funzione aggregata di eccesso di domanda dei due beni $E_1(p_1/p_2)$ e $E_2(p_1/p_2)$, si ha $\mathrm{D}_{p_1/p_2}E_1(p_1^*/p_2^*) < 0$ (e, quindi, tenendo conto della legge di Walras, $\mathrm{D}_{p_1/p_2}E_2(p_1^*/p_2^*) > 0$), ed è instabile se $\mathrm{D}_{p_1/p_2}E_1(p_1^*/p_2^*) > 0$. (Nella Figura 8.5 il simbolo E indica E_1 e il simbolo p indica il rapporto di scambio p_1/p_2).

Si deduce subito che, se la funzione aggregata di eccesso di domanda $E(p)$ è continua e soddisfa le condizioni al contorno di desiderabilità, allora vi è almeno un punto di equilibrio stabile e che, se l'economia è, inoltre, regolare, gli equilibri stabili e instabili si alternano, risultando i primi in numero pari alla metà del numero (dispari) di equilibri più 1/2 ed i secondi in numero inferiore di un'unità al numero degli equilibri stabili.

Infine, si deduce anche che l'equilibrio cui si perviene dipende dal primo rapporto di scambio gridato dal banditore. Se vi è un solo equilibrio, si perviene a questo equilibrio qualunque sia il primo rapporto di scambio gridato dal banditore. Se vi è una molteplicità di equilibri, si perviene all'equilibrio stabile incluso nello stesso intervallo tra due equilibri instabili in cui si trova il primo rapporto di scambio gridato dal banditore (se questo non è incluso tra due equilibri instabili, si perviene all'equilibrio stabile più vicino). Se il banditore grida come primo rapporto di scambio quello corrispondente ad un equilibrio instabile, allora si realizza questo equilibrio instabile, ed è questa l'unica occasione che ha un equilibrio instabile di manifestarsi.

Le conclusioni ottenute per il caso dell'economia con due soli beni non valgono per le economie con più di due beni. L'analisi è, per queste, abbastanza più complessa. (I procedimenti seguiti dai primi tentativi, dovuti a Walras, 1900, e Hicks, 1939, sono stati abbandonati. Questi consideravano la successione delle grida del banditore nel tempo discreto e introducevano ipotesi discutibili o inconcludenti. L'analisi moderna, di tipo dinamico e nel tempo continuo, origina dal contributo di Samuelson, 1941).

Nell'analisi della stabilità in tempo continuo, il comportamento del mercato (rappresentato dal banditore) viene normalmente indicato con un sistema di equazioni differenziali del tipo

$$\frac{\mathrm{d}p_h(t)}{\mathrm{d}t} = f_h(E_h(p(t))) \,, \qquad h = 1,\ldots, k$$

ove $f_h(.)$ è, per $h = 1,\ldots, k$, una funzione che conserva il segno dell'argomento (cioè $f_h(a) \geq 0$ se $a \geq 0$ e $f_h(a) \leq 0$ se $a \leq 0$). Un equilibrio (x^*, y^*, p^*) è stabile se è $\lim_{t\to\infty} p(t) = p^*$ per la funzione $p(t)$ che risolve questo sistema. (Si noti come il limite indicato, se esiste, è necessariamente un vettore di prezzi di equilibrio. Infatti, $\lim_{t\to\infty} p(t) = p^*$ implica che $\lim_{t\to\infty} \frac{\mathrm{d}p_h(t)}{\mathrm{d}t} = 0$ e, quindi, $\lim_{t\to\infty} f_h(E_h(p(t)) = 0$, cioè, $\lim_{t\to\infty} E_h(p(t)) = 0$, per ogni $h = 1,\ldots, k$). Le condizioni di stabilità sono rappresentate dalle condizioni sulle funzioni $f_h(.)$ e $E_h(.)$, per $h = 1,\ldots, k$, che determinano il soddisfacimento di questa proprietà.

Non vi è una teoria che spieghi il comportamento del banditore. Questo, in particolare, non è il risultato di una scelta. Non vi è, inoltre, una ragione perché vi sia un sistema di equazioni differenziali del primo ordine e non, ad esempio, di ordine superiore. Si può solo affermare che questo è il più semplice sistema proponibile che sia in accordo con il principio (legge del mercato) che vuole che il prezzo di un bene si innalzi (abbassi) se il suo eccesso di domanda è positivo (negativo). Questa giustificazione spiega anche perché la variazione del prezzo di un bene viene fatta dipendere soltanto dall'eccesso di domanda di quel bene e non anche dall'eccesso di domanda di altri beni. Però, se lo scopo del banditore fosse il raggiungimento di un equilibrio, altri comportamenti sarebbero più efficienti. Il banditore potrebbe anche determinare tutti gli equilibri con le informazioni che riceve in corrispondenza ai prezzi da lui gridati.[5] Il comportamento suindicato corrisponde ad un banditore che tiene conto solo degli eccessi di domanda corrispondenti all'ultimo vettore di prezzi gridato, trascurando altre possibili informazioni e quelle avute in precedenza. In altri termini, si fa l'ipotesi che il mercato è sì organizzato, ma si comporti in modo elementare, con razionalità limitata. La stabilità o instabilità di un equilibrio è, ovviamente, relativa al comportamento del mercato che si è ipotizzato, espresso dal sistema di equazioni differenziali. Con riferimento all'analogia indicata all'inizio di questo paragrafo, la differenza tra l'analisi della stabilità dell'equilibrio del punto materiale e quella dell'equilibrio concorrenziale consiste nella disponibilità di una teoria soddisfacente per i movimenti del punto materiale quando questo non è nella posizione di equilibrio (si muove verso il basso e vi è una certa dissipazione di energia, per cui il movimento converge verso un punto del suolo di minima altezza). Invece, non vi è una teoria soddisfacente per i movimenti delle grandezze economiche quando queste non corrispondono ad un equilibrio concorrenziale. L'ipotesi walrasiana del banditore è soltanto una ipotesi ragionevole, sostituibile con altre ipotesi ragionevoli che determinerebbero condizioni diverse di stabilità. In altri termini, manca una teoria soddisfacente (soddisfacente sia dal punto di vista analitico, sia dal punto di vista sintetico) del comportamento del mercato in disequilibrio.

Inoltre, con il comportamento indicato, le variazioni dei prezzi non mantengono, in generale, una normalizzazione (ossia, è $p(t)\in\mathbb{R}^k_+$ e non, ad esempio, $p(t)\in S^{k-1}$). Un caso in cui la normalizzazione si mantiene (con $p(t)\in\{p\in\mathbb{R}^k_+ : \sum_{h=1}^k p_h^2 = 1\}$) è indicato dalla proposizione seguente, che è utile per visualizzare come l'esistenza di un equilibrio stabile sia problematica per $k > 2$ (anche se esiste un solo equilibrio).

Proposizione 12.9 Se il comportamento del mercato è regolato dal sistema $\dfrac{\mathrm{d}p_h(t)}{\mathrm{d}t} = E_h(p(t))$ per $h = 1,\ldots, k$ (cioè, la funzione $f_h(.)$ è, per ogni $h = 1,\ldots, k$, la funzione identità) e $p(0)\in\{p\in\mathbb{R}^k_+ : \sum_{h=1}^k p_h^2 = 1\}$, allora $p(t)\in\{p\in\mathbb{R}^k_+ : \sum_{h=1}^k p_h^2 = 1\}$ per ogni $t > 0$, qualunque sia la funzione $E(p)$.

Dimostrazione. Considerando la derivata $\dfrac{\mathrm{d}\sum_{h=1}^k p_h(t)^2}{\mathrm{d}t}$ e tenendo presente la legge di Walras, si ottiene $\dfrac{\mathrm{d}\sum_{h=1}^k p_h(t)^2}{\mathrm{d}t} = 2\sum_{h=1}^k p_h(t)\dfrac{\mathrm{d}p_h(t)}{\mathrm{d}t} = 2\sum_{h=1}^k p_h(t)E_h(p(t)) = 0$, cioè, che $\sum_{h=1}^k p_h(t)^2$ è costante per ogni $t \geq 0$, per cui $p(t)\in\{p\in\mathbb{R}^k_+ : \sum_{h=1}^k p_h^2 = 1\}$ per ogni $t \geq 0$. □

Nelle Figure 12.9 e 12.10 sono rappresentate traiettorie dei prezzi, rispettivamente, per $k = 2$ e $k = 3$, ipotizzando che la funzione aggregata di eccesso di domanda $E(p)$ sia continua e soddisfi le condizioni al contorno di desiderabilità e che l'economia sia regolare. Si può notare come per $k = 2$ risulti necessariamente la presenza di almeno un equilibrio stabile. Infatti, il movimento dei prezzi si svolge sull'arco di circonferenza indicato, è

[5] Se, ad esempio, i prezzi gridati dal banditore seguissero il sistema di equazioni differenziali $\dfrac{\mathrm{d}\tilde{p}(t)}{\mathrm{d}t} = -\lambda\,(\mathrm{D}_{\tilde{p}}\tilde{E}(p(t)))^{-1}\,\tilde{E}(p(t))$, ove $\lambda > 0$, $\tilde{E} = [I \vdots 0]E$ e $\tilde{p} = [I \vdots 0]p$, allora ogni equilibrio sarebbe (localmente) stabile (Smale, 1976). Infatti, questo processo coincide con quello noto in matematica con il nome di metodo di Newton, che conduce alla determinazione delle soluzioni di un sistema di equazioni. Si noti, da un lato, come il processo di aggiustamento di un prezzo dipenda dagli eccessi di domanda di tutti i beni (e non soltanto da quello dello stesso bene) e, dall'altro lato, come il banditore debba conoscere, in corrispondenza ai prezzi da lui gridati, non soltanto l'eccesso di domanda $\tilde{E}(p)$ ma anche le derivate $\mathrm{D}_{\tilde{p}}\tilde{E}(p)$ di questa funzione.

rivolto verso l'interno nei due punti estremi ed ha velocità pari all'eccesso di domanda. Perciò, essendo l'eccesso di domanda una funzione continua, vi è un numero dispari N di punti in cui la velocità è nulla (sono gli equilibri) e un numero uguale a $\frac{N+1}{2}$ di questi verso cui il movimento dei prezzi converge (sono gli equilibri stabili). Nella Figura 12.9 vi sono due equilibri stabili ed uno instabile. Invece, per $k = 3$ possono risultare instabili tutti gli equilibri. Nella Figura 12.10 non vi è nessun equilibrio stabile.

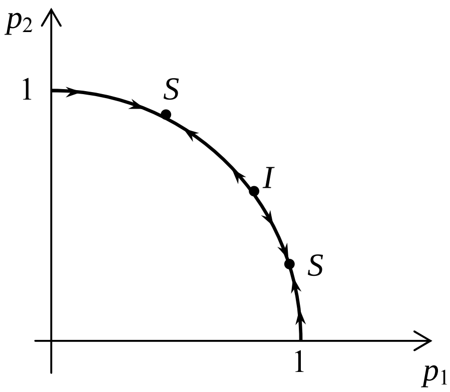

Figura 12.9

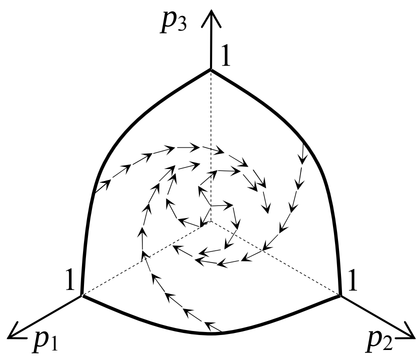

Figura 12.10

Si consideri il comportamento del mercato precedentemente ipotizzato, specificando il sistema di equazioni differenziali come

$$\frac{\mathrm{d}p_h(t)}{\mathrm{d}t} = \lambda_h E_h(p(t)) \;, \qquad h = 1,\ldots, k-1$$

$$\frac{\mathrm{d}p_k(t)}{\mathrm{d}t} = 0$$

ove $\lambda_h > 0$ per $h = 1,\ldots, k-1$. L'ultima equazione indica che il banditore grida per il bene k-esimo sempre lo stesso prezzo, ad esempio, $p_k(t) = 1$, assicurando in questo modo una normalizzazione dei prezzi. Questo comportamento rappresenta una dinamica dei rapporti di scambio di tutti i beni rispetto al k-esimo bene. Come già indicato, un equilibrio (x^*, y^*, p^*) è stabile se è $\lim_{t\to\infty} p(t) = p^*$ per la funzione $p(t)$ che risolve questo sistema.

Si può dimostrare che l'equilibrio è globalmente stabile se la funzione aggregata di eccesso di domanda $E(p)$ soddisfa l'assioma debole delle preferenze rivelate oppure se tutti i beni sono sostituti lordi. Per dimostrare queste proposizioni si impiega un teorema matematico noto come *secondo metodo di Lyapunov*, di cui si indica l'enunciato.

Secondo metodo di Lyapunov. Si consideri il sistema autonomo di equazioni differenziali del primo ordine

$$\frac{\mathrm{d}y_i(t)}{\mathrm{d}t} = f_i(y(t)) \;, \qquad i = 1,\ldots, n$$

con $f_i(y^*) = 0$ per $i = 1,\ldots, n$, ove $y(t) = (y_1(t),\ldots, y_n(t))$. L'equilibrio y^* è stabile se esiste una funzione $V\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, del tipo $V(y-y^*)$, con derivate parziali del primo ordine continue, che soddisfa le tre seguenti condizioni:

a) $V(y-y^*) > 0$ per ogni $y \neq y^*$ e $V(0) = 0$;

b) $V(y-y^*) \to +\infty$ per $\|y-y^*\| \to +\infty$;

c) $\dfrac{\mathrm{d}V(y(t)-y^*)}{\mathrm{d}t} < 0$ per ogni $y \neq y^*$ e $\dfrac{\mathrm{d}V(y(t)-y^*)}{\mathrm{d}t} = 0$ per $y = y^*$. □

Proposizione 12.10 Se la funzione aggregata di domanda $E(p)$ di una economia regolare soddisfa la condizione di desiderabilità per tutti i beni e l'assioma debole delle preferenze rivelate, allora l'equilibrio è globalmente stabile relativamente al processo dinamico rappresentato dal sistema di equazioni differenziali suindicato, cioè,

$$\frac{\mathrm{d}p_h(t)}{\mathrm{d}t} = \lambda_h E_h(p(t)) \ , \qquad h = 1,\ldots, k-1$$

$$\frac{\mathrm{d}p_k(t)}{\mathrm{d}t} = 0$$

ove $\lambda_h > 0$ per $h = 1,\ldots, k-1$.

Dimostrazione. L'assioma debole delle preferenze rivelate richiede, come indicato nella Proposizione 12.8, che le disuguaglianze $p\, E(p') \leq 0$ e $E(p') \neq E(p)$ implichino $p'\, E(p) > 0$, per cui, se $E(p^*) = 0$, allora $p^*\, E(p) > 0$ per ogni $E(p) \neq 0$. Inoltre, per la Proposizione 12.8, vi è in S^{k-1} un unico vettore di prezzi di equilibrio, che è positivo per la condizione di desiderabilità. Vi è, allora, un unico $p^* \in \mathbb{R}^k_+$, con $p_k^* = 1$, per cui $E(p^*) = 0$. Si introduca la funzione $V = \sum_{h=1}^{k} \frac{1}{\lambda_h}(p_h(t) - p_h^*)^2$. Questa funzione soddisfa le tre condizioni richieste dal secondo metodo di Lyapunov, è, cioè, una *funzione di Lyapunov*. Le prime due condizioni sono immediatamente soddisfatte. Considerando la terza condizione e tenendo conto della legge di Walras e che $p_k(t) = p_k^* = 1$, si ha $\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} =$ $\sum_{h=1}^{k} \dfrac{2}{\lambda_h}(p_h(t) - p_h^*)\dfrac{\mathrm{d}p_h(t)}{\mathrm{d}t} = 2\sum_{h=1}^{k-1}(p_h(t) - p_h^*)E_h(p(t)) = 2\sum_{h=1}^{k}(p_h(t) - p_h^*)E_h(p(t)) =$ $-2p^*E(p(t))$ **.** Conseguentemente, si ha $\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} < 0$ per ogni $E(p) \neq 0$ e $\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = 0$ se e solo se $p = p^*$ (tenendo conto che vengono considerati solo vettori di prezzi con $p_k(t) = p_k^* = 1$). Allora, per il secondo metodo di Lyapunov, il processo dinamico converge verso p^* , che è, perciò, un equilibrio globalmente stabile. □

Proposizione 12.11 L'equilibrio concorrenziale di un'economia regolare, caratterizzata da una funzione continua e differenziabile di eccesso di domanda che soddisfa la condizione di desiderabilità per tutti i beni ed in cui tutti i beni sono, in equilibrio, sostituti lordi rispetto agli altri beni (cioè, per la Definizione 12.3, tale che $\mathrm{D}_{p_t} E_h(p^*) > 0$ per ogni $h, t = 1,\ldots, k$ con $h \neq t$ per ogni $p^* \in \mathbb{R}^k_+$ con $E(p^*) = 0$) è localmente stabile relativamente al processo dinamico rappresentato dal sistema di equazioni differenziali

$$\frac{\mathrm{d}p_h(t)}{\mathrm{d}t} = \lambda_h E_h(p(t) \ , \qquad h = 1,\ldots, k-1$$

$$\frac{\mathrm{d}p_k(t)}{\mathrm{d}t} = 0$$

ove $\lambda_h > 0$ per $h = 1,\ldots, k-1$.

Dimostrazione. La stabilità locale richiede che vi sia convergenza dei prezzi verso i loro valori di equilibrio in prossimità di p^* . Si può, allora, linearizzare il sistema differenziale in esame nell'intorno di p^* . Si ha, tenendo presente che $p_k(t) = p_k^* = 1$,

$$\frac{\mathrm{d}\tilde{p}(t)}{\mathrm{d}t} = \hat{\lambda}\ \mathrm{D}_{\tilde{p}}\tilde{E}(p^*)\ (\tilde{p}(t) - \tilde{p}^*)$$

ove $\tilde{E} = [I \vdots 0]E$, $\tilde{p} = [I \vdots 0]p$ e $\hat{\lambda}$ è la matrice diagonale con elementi sulla diagonale principale pari a λ_h , per $h = 1,\ldots, k-1$. La soluzione di questo sistema converge (e converge verso $\tilde{p}^*$) se hanno parte reale negativa tutti gli autovalori della matrice $\hat{\lambda}\ \mathrm{D}_{\tilde{p}}\tilde{E}(p^*)$, ossia, essendo $\lambda_h > 0$ per ogni $h = 1,\ldots, k-1$, quelli della matrice $\mathrm{D}_{\tilde{p}}\tilde{E}(p^*)$. Una condizione sufficiente perché si abbia questa proprietà è che la matrice $\mathrm{D}_{\tilde{p}}\tilde{E}(p^*)$ abbia elementi tutti negativi sulla diagonale principale e positivi altrove e che esista un vettore $h \in \mathbb{R}^{k-1}_{+}$ per cui risulti $\mathrm{D}_{\tilde{p}}\tilde{E}(p^*)\, h < 0$ (Hahn, 1958 e 1982). Il primo di questi due requisiti è soddisfatto per l'ipotesi che tutti i beni sono sostituti lordi. Il secondo requisito è già stato dimostrato in riferimento alla Proposizione 12.7 Si era, infatti, trovata la diseguaglianza $(\mathrm{D}_{\tilde{p}}\tilde{E}(p^*))^{\mathrm{T}}\ \tilde{p}^* << 0$. (Si tenga presente che la trasposizione non altera gli autovalori, cioè, che le matrici $\mathrm{D}_{\tilde{p}}\tilde{E}(p^*)$ e $(\mathrm{D}_{\tilde{p}}\tilde{E}(p^*))^{\mathrm{T}}$ hanno gli stessi autovalori). Perciò, l'unico equilibrio esistente (per la Proposizione 12.7) risulta stabile localmente (ma, per $k > 2$, non sempre globalmente). Si noti come questo risultato valga qualunque siano i parametri λ_h , con $h = 1,\ldots, k-1$, purché positivi. □

12.4 La stabilità dell'equilibrio in tempo reale (o senza *tâtonnements*)

L'analisi della stabilità dell'equilibrio introdotta nel paragrafo precedente è fondata sulla condizione che non vi siano atti di scambio e di produzione durante la fase di contrattazione e conduce a proposizioni (come le Proposizioni 12.10 e 12.11) che assicurano la stabilità dell'equilibrio sotto ipotesi molto stringenti. Ipotesi un po' meno forti sono richieste se sono consentiti atti di scambio (e di produzione) fuori dall'equilibrio. Naturalmente, questi atti modificano l'economia (mutano, se non altro, le dotazioni degli agenti) per cui l'eventuale convergenza riguarda l'equilibrio concorrenziale di un'economia differente, in generale, da quella da cui ha inizio il processo.

Nel seguito vengono presentati due possibili processi dinamici: nel primo (*processo di Edgeworth*) gli scambi avvengono sotto forma di baratto (senza la formulazione di prezzi); nel secondo (*processo di Hahn*) vi sono prezzi uguali per tutti gli agenti per cui, fuori dall'equilibrio, gli scambi sono, in generale, razionati.

Per semplicità, vengono prese in considerazione economie di puro scambio (perciò, senza produzione) con solo beni durevoli. (Si immagini, ad esempio, per fissare le idee, un'economia di bambini che si scambino figurine di calciatori o un'economia di finanzieri che si scambiano titoli). Inoltre, gli scambi modificano soltanto le dotazioni degli agenti, non le loro preferenze e il loro numero.

Si parta, allora, da un'economia $\mathcal{E} = (\langle\mathbb{R}^{k}_{+}, \succsim_i\rangle, \omega_i,\ i = 1,\ldots, n)$. Essendo i beni durevoli, gli scambi modificano la dotazione gli agenti, senza però alterare la quantità complessiva dei beni. Ossia, l'economia si modifica nel tempo e può essere descritta come $\mathcal{E}(t) = (\langle\mathbb{R}^{k}_{+}, \succsim_i\rangle, \omega_i(t),\ i = 1,\ldots, n)$, con $\Sigma^{n}_{i=1}\ \omega_i(t) = \Sigma^{n}_{i=1}\ \omega_i(0) = \Omega$ per ogni $t > 0$. (Nel seguito si assuma, come in generale nel Paragrafo 12.3, che queste economie siano regolari, che tutti i beni siano desiderabili e che sia, come è ovvio, $\omega_i > 0$ per $i = 1,\ldots, n$, cioè che ogni agente abbia in dotazione una quantità positiva di almeno un bene). Vi è stabilità se il processo di scambio conduce, al crescere di t, ad una allocazione $(\omega_i^*)_{i=1}^{n}$ che è di equilibrio concorrenziale per l'economia $\mathcal{E}^* = (\langle \mathbb{R}_{+}^{k}, \succsim_i \rangle, \omega_i^*, i = 1,\dots, n)$.

Processo di Edgeworth. In questo processo gli agenti si scambiano beni a condizione che lo scambio sia vantaggioso per ciascuno degli scambisti. Si assume che il sistema informativo sia tale da rendere nota l'esistenza di scambi vantaggiosi, sicché il processo di scambio prosegue fin al punto in cui non ci sono più possibilità di scambi vantaggiosi. Naturalmente, esiste una molteplicità di successioni possibili di scambi, ciascuna delle quali conduce in generale se converge, ad una allocazione diversa. Si tratta di esaminare se tutte queste successioni convergono e se ciascuna converge verso un'allocazione di equilibrio concorrenziale.

Proposizione 12.12 Se i sistemi di preferenza degli agenti sono regolari, continui, fortemente monotoni e strettamente convessi e la successione degli scambi segue il processo di Edgeworth, allora l'allocazione $(\omega_i(t))_{i=1}^{n}$ dell'economia $\mathcal{E}(t) = (\langle \mathbb{R}_{+}^{k}, \succsim_i \rangle, \omega_i(t), i = 1,\dots, n)$ converge verso un'allocazione $(\omega_i^*)_{i=1}^{n}$ di equilibrio concorrenziale.

Dimostrazione. Le preferenze di ogni agente, essendo regolari e continue, sono rappresentabili con una funzione di utilità continua (Proposizione 3.2), inoltre fortemente crescente (poichè le preferenze sono fortemente monotone), superiormente limitata (poiché la quantità disponibile di beni è limitata) e strettamente quasi-concava (poiché le preferenze sono strettamente convesse). Inoltre, l'insieme delle utilità ottenibili (Definizione 8.6)

$$U = \{u \in \mathbb{R}^{n} : u_i = u_i(\omega_i) \text{ per } i = 1,\dots, n \text{ con } \Sigma_{i=1}^{n} \omega_i = \Omega\}$$

è non vuoto, chiuso e limitato superiormente (Proposizione 8.4). Ogni processo di Edgeworth determina una successione di vettori di utilità tali che $u(t') \geq u(t)$ per ogni coppia t, t' con $t' > t$, inoltre con $u(t') > u(t)$ se sono possibili scambi vantaggiosi a partire dall'allocazione $(\omega_i(t))_{i=1}^{n}$ e con $u(t') = u(t)$ in caso contrario, se cioè l'allocazione $(\omega_i(t))_{i=1}^{n}$ è efficiente, per cui $u(t) \in U_{max} = \{u \in U$: non esiste $u' \in U$ tale che $u' > u\}$. Se il processo è continuo, cioè l'allocazione $(\omega_i(t))_{i=1}^{n}$ è funzione continua di t, allora la funzione $\Sigma_{i=1}^{n} u_i(t)$ è continua, superiormente limitata e monotona non decrescente: in particolare, è crescente se $u(t) \in U \setminus U_{max}$ e costante se $u(t) \in U_{max}$. Ne consegue che esiste ed è finito il $\lim_{t\to\infty} \Sigma_{i=1}^{n} u_i(t)$. Quindi, essendo $u(t') \geq u(t)$ per ogni coppia t, t' con $t' > t$, esiste ed è finito il $\lim_{t\to\infty} u(t)$ del vettore delle utilità, necessariamente con $\lim_{t\to\infty} u(t) \in U_{max}$. Tenendo conto che per la Definizione 8.5, è

$$U_{max} = \{u \in U\text{: } u_i = u_i(\omega_i) \text{ per } i = 1,\dots, n \text{ con } \Sigma_{i=1}^{n} \omega_i = \Omega \text{ e } (\omega_i)_{i=1}^{n} \in PO\}$$

si ha che il $\lim_{t\to\infty} (\omega_i(t))_{i=1}^{n}$ è un'allocazione efficiente (vi è un'unica allocazione limite per l'ipotesi di stretta convessità delle preferenze, che impedisce esservi due allocazioni ugualmente preferite da tutti gli agenti). Risulta, allora, che il processo di Edgeworth determina la convergenza verso un'allocazione efficiente, che è, per il secondo teorema dell'economia del benessere (le cui ipotesi valgono in questa proposizione), un'allocazione di equilibrio concorrenziale. □

Nelle Figure 12.11 e 12.12 viene indicato, per un'economia con due agenti e due beni, un possibile sentiero che segue il processo di Edgeworth, rispettivamente, nel diagramma di Edgeworth-Pareto e nello spazio delle utilità.

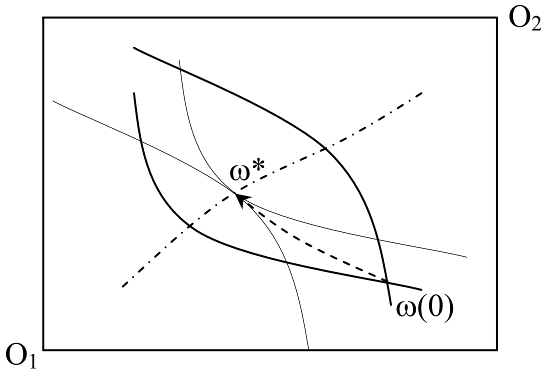

Figura 12.11

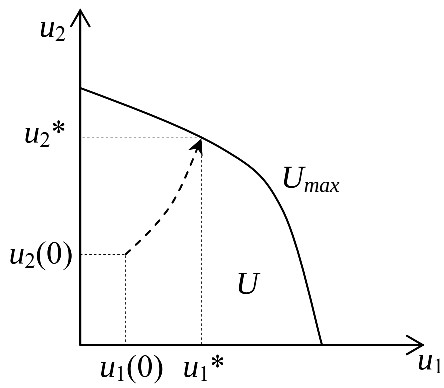

Figura 12.12

Processo di Hahn. Questo processo differisce da quello con banditore descritto nel Paragrafo 12.3 soltanto perché vi sono scambi anche quando il banditore non indica prezzi di equilibrio. Il banditore innalza il prezzo dei beni che presentano un eccesso aggregato di domanda positivo e riduce quello dei beni con eccesso aggregato di domanda negativo. La presenza del banditore rende i prezzi uguali per tutti gli agenti, che formulano, in corrispondenza ad essi, le loro domande e offerte.[6] Fuori dell'equilibrio gli eccessi aggregati di domanda non sono nulli, per cui non tutti gli scambi desiderati possono essere eseguiti. Occorre, allora, indicare quali scambi si realizzano, cioè lo schema di razionamento degli scambi. Nel seguito si adotta l'ipotesi seguente: per ogni bene per cui l'eccesso aggregato di domanda è positivo (ossia, la domanda eccede l'offerta), gli agenti che presentano un eccesso di domanda non positivo eseguono la vendita desiderata del bene, mentre coloro che presentano un eccesso di domanda positivo vengono razionati, ossia comprano una quantità di bene minore di quella desiderata, in misura tale che la somma di queste quantità uguagli la quantità del bene complessivamente offerta dai venditori. Analogamente, ma al contrario (nel senso che sono razionati i venditori), per ogni bene per cui l'eccesso di domanda è negativo. Si tratta di esaminare se le successioni degli scambi determinate da questo tipo di razionamento convergono e se ciascuna converge verso un'allocazione di equilibrio concorrenziale.

Proposizione 12.13 Se i sistemi di preferenza degli agenti sono regolari, continui, fortemente monotoni e strettamente convessi, il banditore indica sempre prezzi positivi per tutti i beni (tenendo conto che i beni sono desiderabili) e la successione degli scambi segue il processo di Hahn, allora l'allocazione $(\omega_i(t))_{i=1}^{n}$ dell'economia $\mathcal{E}(t) = (\langle \mathbb{R}^k_+, \succsim_i \rangle, \omega_i(t), i \in N = \{1,\ldots, n\})$ converge verso un'allocazione $(\omega_i^*)_{i=1}^{n}$ di equilibrio concorrenziale.

Dimostrazione. Con le ipotesi indicate, ogni agente dell'economia $\mathcal{E}(t) = (\langle \mathbb{R}^k_+, \succsim_i \rangle, \omega_i(t), i \in N = \{1,\ldots, n\})$ presenta una funzione continua (se $p(t)\omega_i(t) > 0$) di domanda $d_{ih}(t) = d_{ih}(p(t), p(t)\omega_i(t))$ per ogni bene $h = 1,\ldots, k$, con $d_i(t) > 0$. La funzione aggregata di domanda del bene h-esimo è $E_h(t) = \Sigma_{i=1}^{n} d_{ih}(p(t), p(t)\omega_i(t)) - \Omega_h$. Se è $E_h(t) = 0$, allora nessun agente viene razionato relativamente al bene h-esimo, per cui si ha $\omega_{ih}(t) = d_{ih}(t)$ per ogni $i \in N$. Il

[6] Nel seguito si assume che gli agenti formulino le loro domande e offerte senza tenere conto della possibilità di essere razionati. Questa è un'ipotesi che rende più semplice l'analisi, ma confligge con la razionalità degli agenti. Infatti, se un agente si attende che la sua domanda di un certo bene verrà razionata (potrà, ad esempio, comprare solo la metà di quanto chiede), avrà convenienza a domandare una quantità maggiore di quella desiderata (nell'esempio, doppia), così da ottenere una quantità vicina a quella desiderata. Su questo e altri punti, Fisher (1983). In generale, sulla stabilità dell'equilibrio, Hahn (1982).

banditore non modifica il prezzo di questo bene, cioè $\frac{\mathrm{d}p_h(t)}{\mathrm{d}t} = 0$. Se è $E_h(t) > 0$, l'insieme N degli agenti viene ripartito in due sottoinsiemi: il sottoinsieme $I_h^{nr}(t)$ degli agenti non razionati (quelli con eccesso di domanda non positivo) e il sottoinsieme $I_h^{r}(t)$ degli agenti razionati (quelli con eccesso di domanda positivo). Si ha, allora, $\omega_{ih}(t) = d_{ih}(t)$ per ogni $i \in I_h^{nr}(t)$ e $\omega_{ih}(t) < d_{ih}(t)$ per ogni $i \in I_h^{r}(t)$. Il banditore innalza il prezzo di questo bene, cioè $\frac{\mathrm{d}p_h(t)}{\mathrm{d}t} > 0$. Se è $E_h(t) < 0$, l'insieme N degli agenti viene ripartito in due sottoinsiemi: il sottoinsieme $I_h^{nr}(t)$ degli agenti non razionati (quelli con eccesso di domanda non negativo) e il sottoinsieme $I_h^{r}(t)$ degli agenti razionati (quelli con eccesso di domanda negativo). Si ha, allora, $\omega_{ih}(t) = d_{ih}(t)$ per ogni $i \in I_h^{nr}(t)$ e $\omega_{ih}(t) > d_{ih}(t)$ per ogni $i \in I_h^{r}(t)$. Il banditore abbassa il prezzo di questo bene, cioè $\frac{\mathrm{d}p_h(t)}{\mathrm{d}t} < 0$. Si noti come debba essere in ogni caso, che vi sia razionamento o no, $\Sigma_{h=1}^{k} p_h(t)\frac{\mathrm{d}\omega_{ih}(t)}{\mathrm{d}t} = 0$ per ogni $i \in N$, poiché lo scambio avviene lasciando inalterato il valore della dotazione. Si noti, inoltre, come tutti gli agenti (razionati o no) non vengano mai danneggiati dallo scambio, cioè $u_i(\omega_i(t))$ è funzione non decrescente di t , per cui, essendo $\omega_i(0) > 0$, è anche $\omega_i(t) > 0$ per ogni $t > 0$ e si ha, quindi, $p(t)\omega_i(t) > 0$ (così si è sicuri che il generico agente i-esimo presenti sempre una funzione continua di eccesso di domanda). Però, mentre la funzione diretta di utilità è funzione non decrescente di t , l'opposto si verifica per la funzione indiretta di utilità $u_i^*(p(t), p(t)\omega_i(t))$, che risulta essere, come si vedrà tra poco, funzione non crescente di t . Infatti, è

$$\frac{\mathrm{d}u_i^*(t)}{\mathrm{d}t} = \sum_{h=1}^{k} \frac{\partial u_i^*}{\partial p_h(t)}\frac{\mathrm{d}p_h(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial u_i^*}{\partial(p(t)\omega_i(t))}\sum_{h=1}^{k}(\omega_{ih}(t)\frac{\mathrm{d}p_h(t)}{\mathrm{d}t} + p_h(t)\frac{\mathrm{d}\omega_{ih}(t)}{\mathrm{d}t})$$

per cui, tenendo conto, da un lato, che $\Sigma_{h=1}^{k} p_h(t)\frac{\mathrm{d}\omega_{ih}(t)}{\mathrm{d}t} = 0$ e, dall'altro lato, della relazione di Antonelli-Roy (Proposizione 3.13) secondo cui

$$\frac{\partial u_i^*}{\partial p_h(t)} = -d_{ih}(t)\frac{\partial u_i^*}{\partial(p_h(t)\omega_i(t))}$$

si ottiene

$$\frac{\mathrm{d}u_i^*(t)}{\mathrm{d}t} = -\frac{\partial u_i^*}{\partial(p(t)\omega_i(t))}\sum_{h=1}^{k}(d_{ih}(t) - \omega_{ih}(t))\frac{\mathrm{d}p_h(t)}{\mathrm{d}t}$$

Tenendo conto che $\frac{\partial u_i^*}{\partial(p(t)\omega_i(t))} > 0$ e che $(d_{ih}(t) - \omega_{ih}(t))\frac{\mathrm{d}p_h(t)}{\mathrm{d}t} \geq 0$ (in particolare, se l'agente non è razionato per il bene h-esimo allora $\omega_{ih}(t) = d_{ih}(t)$, se è razionato ed è $E_h(t) > 0$ allora $\omega_{ih}(t) < d_{ih}(t)$ e $\frac{\mathrm{d}p_h(t)}{\mathrm{d}t} > 0$, se è razionato ed è $E_h(t) < 0$ allora $\omega_{ih}(t) > d_{ih}(t)$ e $\frac{\mathrm{d}p_h(t)}{\mathrm{d}t} < 0$), risulta che $\frac{\mathrm{d}u_i^*(t)}{\mathrm{d}t} \leq 0$, con $\frac{\mathrm{d}u_i^*(t)}{\mathrm{d}t} < 0$ se l'agente i-esimo è razionato per qualche bene e $\frac{\mathrm{d}u_i^*(t)}{\mathrm{d}t} = 0$ se non è razionato per nessun bene. Ne consegue che la funzione $\Sigma_{i=1}^{n} u_i^*(t)$ è continua e monotona non crescente: in particolare, è decrescente se vi è disequilibrio per qualche bene e costante se vi è equilibrio per tutti i beni. Questa funzione, inoltre, è limitata inferiormente (per rendersene conto basta scegliere le funzioni di utilità degli agenti in modo che $u_i(0) = 0$ per ogni $i = 1,\ldots, n$, e notare che si ha necessariamente $u_i^*(t) \geq 0$ per ogni t). Ne consegue che $\lim_{t\to\infty} \Sigma_{i=1}^{n} \frac{\mathrm{d}u_i^*(t)}{\mathrm{d}t} = 0$. Quindi, essendo $\frac{\mathrm{d}u_i^*(t)}{\mathrm{d}t} \leq 0$ per ogni $i = 1,\ldots, n$, risulta $\lim_{t\to\infty} \frac{\mathrm{d}u_i^*(t)}{\mathrm{d}t} = 0$ per ogni $i = 1,\ldots, n$, per cui l'economia converge verso una situazione priva di razionamenti, cioè verso un equilibrio concorrenziale. □

Nella Figura 12.13 viene illustrato, per una economia con due beni, come il razionamento riduca l'utilità indiretta (mentre cresce quella diretta) di un generico agente.

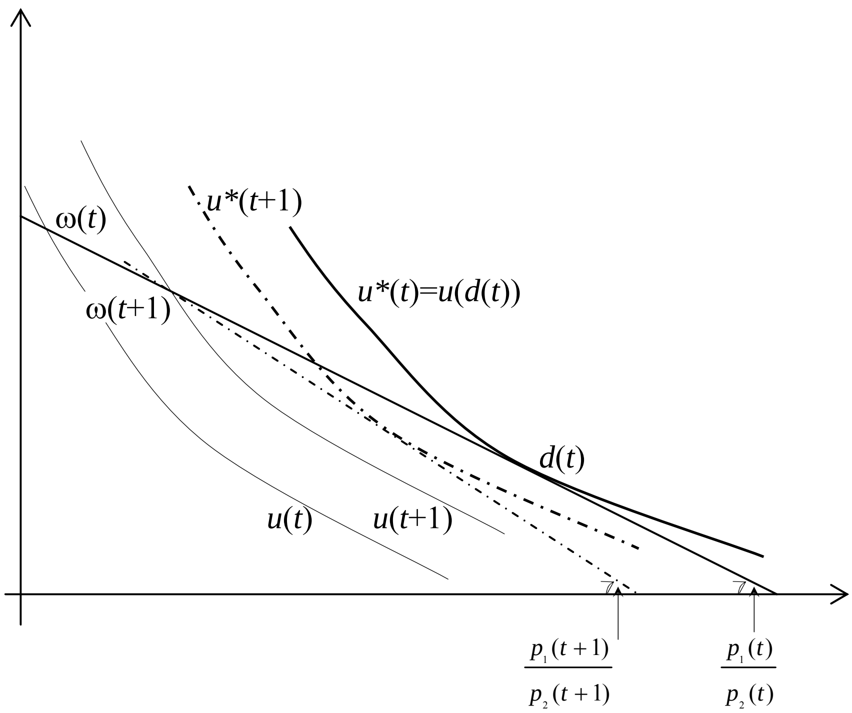

Figura 12.13

12.5 Statica comparata dell'equilibrio generale concorrenziale

L'analisi di statica comparata dell'equilibrio concorrenziale (introdotta nel Paragrafo 10.4 per l'equilibrio parziale) si occupa di determinare le relazioni tra gli equilibri di economie diverse, ossia, la dipendenza dell'equilibrio dai "dati" dell'economia. Nel caso in esame, come la variazione delle preferenze, della tecnologia, o della quantità di risorse disponibili modifichi l'equilibrio rappresentato dai prezzi e dall'allocazione dei beni.

Sia l'equilibrio concorrenziale rappresentato dalle condizioni $x_i \in d_i(p; m_i)$, $y_j \in s_j(p)$ e $\sum_{i=1}^{n} x_i \leq \sum_{i=1}^{n} \omega_i + \sum_{j=1}^{m} y_j$, ove $m_i = p\,\omega_i + \sum_{j=1}^{m} \theta_{ij} \pi_j^*$, con $\pi_j^* = \max_{y_j \in Y_j} p y_j$, $d_i(p; m_i) =$

$\arg\max_{x_i \in \{x_i \in X_i : px_i \le m_i\}} u_i(x_i)$ e $s_j(p) = \arg\max_{y_j \in Y_j} py_j$, per $i = 1,\ldots, n$ e $j = 1,\ldots, m$. Allora, l'allocazione e i prezzi (x^*, y^*, p^*) (ove $x^* = (x_i^*)_{i=1}^{n}$ e $y^* = (y_j^*)_{j=1}^{m}$) di equilibrio risultano dipendere dai "dati" dell'economia, cioè, dalle funzioni $u_i(.)$, dalle dotazioni (ω_i, θ_{ij}) e dagli insiemi Y_j , con $i = 1,\ldots, n$ e $j = 1,\ldots, m$. Rappresentando questi "dati" per mezzo di un vettore di parametri $\alpha = (\alpha_1,\ldots, \alpha_t)$, si ha allora che l'equilibrio concorrenziale (x^*, y^*, p^*) è funzione di α . L'analisi di questa funzione è la statica comparata dell'equilibrio generale concorrenziale.

Il confronto può riguardare modificazioni $\alpha_b - \alpha_a$ discrete dei parametri, oppure modificazioni $d\alpha$ infinitesime. Se vi è una molteplicità di equilibri, l'analisi globale di statica comparata (cioè, quella che esamina gli effetti di modificazioni discrete dei parametri) risulta poco significativa: si ottiene la modificazione dell'insieme degli equilibri. Invece, l'analisi locale (cioè, quella che esamina gli effetti di modificazioni infinitesime dei parametri) è significativa se gli equilibri sono isolati (se, cioè, l'economia è regolare), con l'avvertenza che l'analisi di statica comparata riguarda la variazione infinitesima di un equilibrio. Ossia, le derivate $\frac{\partial\beta}{\partial\alpha}$, ove β è una variabile e α è un "dato", indicano la variazione in prossimità di un singolo generico equilibrio.

Ad esempio, se si è interessati a studiare la statica comparata dei prezzi di equilibrio, evidenziando la dipendenza dell'equilibrio dai "dati" α e tenendo conto che i prezzi sono determinati (se la funzione aggregata di eccesso di domanda è ad un solo valore e sono soddisfatte le condizioni al contorno di desiderabilità) dalla condizione $E(p; \alpha) = 0$, o meglio, come indicato nel Paragrafo 12.1 (subito prima della Definizione 12.1) dal sistema di $k-1$ equazioni $\tilde{E}(p;\alpha) = 0$, si ricava, differenziando la condizione $\tilde{E}(p;\alpha) = 0$, che la variazione dei prezzi p^* di un qualsiasi equilibrio, conseguente alla variazione dei parametri α , è

$$\mathrm{D}_\alpha \tilde{p}^*(\alpha) = -(\mathrm{D}_{\tilde{p}}\tilde{E}(p;\alpha))^{-1}\mathrm{D}_\alpha \tilde{E}(p;\alpha)$$

Nel seguito viene esaminata la dipendenza dei prezzi dalla quantità delle risorse. Questa analisi intende accertare se i prezzi dell'equilibrio concorrenziale sono *indici di scarsità relativa*, se cioè l'incremento della quantità disponibile di un bene, mentre quella degli altri beni viene mantenuta invariata, determini la riduzione dei rapporti di scambio del bene (ossia, dei rapporti tra il prezzo del bene la cui disponibilità è accresciuta e i prezzi degli altri beni).[7]

L'equilibrio generale concorrenziale dell'economia $\mathcal{E} = (\langle X_i, \succsim_i\rangle, Y_j, \omega_i, \theta_{ij}, i =1,\ldots, n, j = 1,\ldots, m)$ con *free disposal* è determinato, se non vi sono beni liberi e la funzione aggregata di eccesso di domanda è ad un solo valore, evidenziando la dipendenza dell'equilibrio dalla quantità disponibile di risorse, dalla condizione $E(p^*; \omega) = 0$, ove $\omega = (\omega_{11},\ldots, \omega_{1k},\ldots, \omega_{n1},\ldots, \omega_{nk})\in\mathbb{R}^{nk}_{++}$, con $E(p; \omega) = \sum_{i=1}^{n}(d_i(p, m_i) - \omega_i) - \sum_{j=1}^{m} s_j(p)$, ove $m_i = p\omega_i + \sum_{j=1}^{m}\theta_{ij}ps_j(p)$. Se la funzione aggregata di eccesso di domanda $E(p; \omega)$ è differenziabile rispetto agli argomenti indicati, cioè, rispetto ai prezzi e alle quantità dei beni presenti nelle dotazioni, l'analisi locale di statica comparata in esame ricerca le derivate dei rapporti di scambio di equilibrio rispetto alle quantità disponibili dei beni.

[7] Un'analisi più estesa della statica comparata dell'equilibrio generale concorrenziale si trova in Montesano (1993). Le relazioni tra scarsità e prezzi sono discusse in Montesano (1995).

Ossia, si tratta di determinare, partendo dalle condizioni di equilibrio $E(p^*;\ \omega) = 0$, le derivate $\dfrac{\partial \dfrac{p_h^*}{p_s^*}}{\partial \omega_{ir}}$, per $i = 1,\dots, n$ e $h, s, r = 1,\dots, k$ con $h \neq s$.

Ai fini dell'analisi successiva occorre estendere le definizioni introdotte nel Capitolo 3 di beni sostituti lordi (Definizioni 3.5 e 10.3) e beni normali (Definizione 3.6).

Definizione 12.4 (*Beni normali e sostituti lordi per la funzione aggregata di eccesso di domanda*) Il bene h-esimo è normale se $\dfrac{\partial E_h(p;\omega)}{\partial \omega_{ir}} > 0$ per ogni coppia i, r, con $r \neq h$, $r = 1,\dots, k$ e $i = 1,\dots, n$; il bene h-esimo è sostituto lordo rispetto al bene t-esimo, con $h, t = 1,\dots, k$ e $h \neq t$, se $\dfrac{\partial E_h(p;\omega)}{\partial p_t} > 0$.

La legge di Walras richiede $pE(p;\ \omega) = 0$, per cui $\sum_{h=1}^{k} p_h \dfrac{\partial E_h(p;\omega)}{\partial \omega_{ir}} = 0$ per $i = 1,\dots, n$ e $r = 1,\dots, k$. Allora, se $\dfrac{\partial E_h(p;\omega)}{\partial \omega_{ir}} > 0$ per ogni $r \neq h$, si ha $\dfrac{\partial E_h(p;\omega)}{\partial \omega_{ih}} < 0$ per $i = 1,\dots, n$ e $h = 1,\dots, k$ e $\sum_{h=1,h\neq s}^{k} p_h \dfrac{\partial E_h(p;\omega)}{\partial \omega_{ir}} < 0$ per $r \neq s$, poiché $\sum_{h=1,h\neq s}^{k} p_h \dfrac{\partial E_h(p;\omega)}{\partial \omega_{ir}} + p_s \dfrac{\partial E_s(p;\omega)}{\partial \omega_{ir}} = 0$ e $\dfrac{\partial E_s(p;\omega)}{\partial \omega_{ir}} > 0$. Inoltre, essendo le funzioni di eccesso di domanda omogenee di grado zero rispetto ai prezzi (cioè, $E(\alpha p;\ \omega) = E(p;\ \omega)$ per ogni $\alpha > 0$), si ha, se il bene è normale, che $\dfrac{\partial E_h(\alpha p;\omega)}{\partial \omega_{ir}} = \dfrac{\partial E_h(p;\omega)}{\partial \omega_{ir}} > 0$ con $h \neq r$ per ogni $\alpha > 0$. Poi, tenendo conto che $E(p;\ \omega) = \sum_{i=1}^{n}(d_i(p, m_i) - \omega_i) - \sum_{j=1}^{m} s_j(p)$, ove $m_i = p\omega_i + \sum_{j=1}^{m}\theta_{ij}\, ps_j(p)$, e che non vi sono beni liberi (per cui $p_r > 0$), il bene h-esimo, se è normale per tutti i consumatori secondo la Definizione 3.6, cioè, se è $\dfrac{\partial d_{ih}(p, m_i)}{\partial m_i} > 0$ per ogni $i = 1,\dots, n$, allora è normale anche secondo la Definizione 10.4. Infatti, per $r \neq h$, si ha $\dfrac{\partial E_h(p;\omega)}{\partial \omega_{ir}} = \dfrac{\partial d_{ih}(p, m_i)}{\partial m_i} p_r > 0$.

Con riferimento alla sostituibilità lorda, la legge di Walras, $pE(p;\ \omega) = 0$, richiede $\sum_{h=1}^{k} p_h \dfrac{\partial E_h(p;\omega)}{\partial p_t} + E_t(p;(\omega_i)_{i=1}^{n}) = 0$, per cui, in equilibrio, essendo $E_t(p^*;\omega) = 0$, si ha $\sum_{h=1}^{k} p_h^*\ \mathrm{D}_{p_t} E_h(p^*;\omega) = 0$. Allora, il bene h-esimo, se è sostituto lordo rispetto agli altri beni, cioè, $\mathrm{D}_{p_t} E_h(p^*;\omega) > 0$ per ogni $t \neq h$, è anche un bene ordinario, poiché risulta $\mathrm{D}_{p_h} E_h(p^*;\omega) < 0$. Per la omogeneità di grado zero delle funzioni di eccesso di domanda è $\mathrm{D}_{\alpha p_t} E_h(\alpha p^*;\omega) = \alpha^{-1}\ \mathrm{D}_{p_t} E_h(p^*;\omega)$ per ogni $\alpha > 0$, per cui $\mathrm{D}_{p_t} E_h(p^*;\omega) > 0$ se e solo se $\mathrm{D}_{\alpha p_t} E_h(\alpha p^*;\omega) > 0$ e $\mathrm{D}_{\alpha p_t} E_h(\alpha p^*;\omega) > 0$ per ogni $t \neq h$ implica $\mathrm{D}_{\alpha p_h} E_h(\alpha p^*;\omega) < 0$.

Infine, prescindendo dalle derivate $\mathrm{D}_p\, s_j(p)$ (assenti se si considera un'economia di puro scambio), il bene h-esimo, se è normale per tutti i consumatori secondo la Definizione 3.6 e sostituto lordo per tutti i consumatori rispetto al bene t-esimo secondo la Definizione 3.5, è anche sostituto lordo rispetto al bene t-esimo secondo la Definizione 12.4. Infatti, si ha $\dfrac{\partial E_h(p;\omega)}{\partial p_t} = \sum_{i=1}^n \left(\dfrac{\partial d_{ih}(p,m_i)}{\partial p_t} + \dfrac{\partial d_{ih}(p,m_i)}{\partial m_i}\omega_{it}\right) > 0$ per ogni $t = 1,\dots,k$ con $t \neq h$.

E' possibile, ora, introdurre la seguente proposizione.

Proposizione 12.14 I prezzi di equilibrio concorrenziale sono indici di scarsità relativa se tutti i beni sono sostituti lordi e normali (secondo la Definizione 12.4), cioè, i rapporti di scambio determinati dalla condizione di equilibrio $E(p^*;(\omega_i)_{i=1}^n) = 0$, hanno derivate $\dfrac{\partial\, p_h^*/p_s^*}{\partial \omega_{ih}} < 0$, per ogni $i = 1,\dots,n$ e $h, s = 1,\dots,k$ con $h \neq s$.

Dimostrazione. La condizione $E(p^*;(\omega_i)_{i=1}^n) = 0$ determina i rapporti di scambio di equilibrio solo se la matrice jacobiana della funzione $E(p;(\omega_i)_{i=1}^n)$ rispetto ai prezzi, valutata ai prezzi di equilibrio, cioè, $\mathrm{D}_p\, E(p^*;(\omega_i)_{i=1}^n)$, ha rango $k-1$. (Non può avere rango k poiché la legge di Walras, $pE(p;(\omega_i)_{i=1}^n) = 0$, implica che le funzioni aggregate di eccesso di domanda sono linearmente dipendenti. La Proposizione 12.5 indica che la proprietà che il rango sia $k-1$ è generica, vale, cioè, quasi per ogni $(\omega_i)_{i=1}^n >> 0$). Per ogni dato s-esimo bene si prendano in considerazione le condizioni di equilibrio degli altri beni $E_h(p^*;(\omega_i)_{i=1}^n) = 0$, ove $h = 1,\dots,k$ con $h \neq s$, e si indichino con $\tilde{E}$ e $\tilde{p}$ i vettori, composti da $k-1$ elementi, (E_h) e $\left(\dfrac{p_h}{p_s^*}\right)$, ove $h = 1,\dots,k$ con $h \neq s$. Si ha, allora, tenendo conto che le funzioni di eccesso di domanda sono omogenee di grado zero rispetto ai prezzi, la condizione di equilibrio

$$\tilde{E}(\tilde{p}^*\,;(\omega_i)_{i=1}^n) = 0$$

che determina i rapporti di scambio di equilibrio $\tilde{p}^*$ in funzione delle risorse $(\omega_i)_{i=1}^n$. Derivando questa condizione rispetto a ω_{ir}, si ottiene la relazione

$$\mathrm{D}_{\tilde{p}}\tilde{E}\;\; \mathrm{D}_{\omega_{ir}}\tilde{p}^* + \mathrm{D}_{\omega_{ir}}\tilde{E} = 0$$

(ove, per semplicità di notazione, i simboli $\mathrm{D}_{\tilde{p}}\tilde{E}$ e $\mathrm{D}_{\omega_{ir}}\tilde{E}$ indicano, rispettivamente, $\mathrm{D}_{\tilde{p}}\tilde{E}(\tilde{p}^*;(\omega_i)_{i=1}^n)$ e $\mathrm{D}_{\omega_{ir}}\tilde{E}(p^*;(\omega_i)_{i=1}^n)$), da cui risulta

$$\mathrm{D}_{\omega_{ir}}\tilde{p}^* = -(\mathrm{D}_{\tilde{p}}\tilde{E})^{-1}\; \mathrm{D}_{\omega_{ir}}\tilde{E}$$

ove $\mathrm{D}_{\tilde{p}}\tilde{E}$ è una matrice jacobiana $(k-1) \times (k-1)$ a rango pieno, di cui $(\mathrm{D}_{\tilde{p}}\tilde{E})^{-1}$ è l'inversa, e $\mathrm{D}_{\omega_{ir}}\tilde{E}$ è il vettore delle derivate di $\tilde{E}(\tilde{p}^*;(\omega_i)_{i=1}^n)$ rispetto a ω_{ir}. Questa relazione può essere scritta nel modo seguente

$$\mathrm{D}_{\omega_{ir}}\tilde{p}^* = -\hat{P}^{-1}\;\hat{B}^{-1}\; G\; z_{ir}$$

ove $\hat{P}$ è la matrice diagonale con gli stessi elementi di $\tilde{p}*$; $\hat{B}$ è la matrice diagonale composta dalla diagonale principale della matrice $\mathrm{D}_{\tilde{p}}\tilde{E}$, perciò con elementi $\mathrm{D}_{\tilde{p}_h}\tilde{E}_h = p_s{*}\ \mathrm{D}_{p_h}E_h$ con $h = 1,\ldots, k$ e $h \neq s$; $G = \hat{B}\ \hat{P}\ (\mathrm{D}_{\tilde{p}}\tilde{E})^{-1}\ \hat{P}^{-1}$; e $z_{ir} = \hat{P}\ \mathrm{D}_{\omega_{ir}}\tilde{E}$. Gli elementi della diagonale principale della matrice $\hat{P}$ sono tutti positivi poiché non vi sono beni liberi e quelli della matrice $\hat{B}$ sono tutti negativi poiché i beni sono sostituti lordi. Il vettore z_{ir} è composto da elementi $z_{h,ir} = \dfrac{p_h*}{p_s*}\dfrac{\partial\tilde{E}_h}{\partial\omega_{ir}} = \dfrac{p_h*}{p_s*}\dfrac{\partial E_h}{\partial\omega_{ir}}$ con $h = 1,\ldots, k$ e $h \neq s$, che sono positivi per $h \neq r$ e negativi per $h = r$, poiché i beni sono normali (il simbolo $\dfrac{\partial E_h}{\partial\omega_{ir}}$ indica, per semplicità di notazione, $\dfrac{\partial E_h(p*;(\omega_i)_{i=1}^n)}{\partial\omega_{ir}}$, così come, successivamente, il simbolo $\mathrm{D}_{p_t}E_h$ indica $\mathrm{D}_{p_t}E_h(p*;(\omega_i)_{i=1}^n)$). La matrice $F = G^{-1} = \hat{P}\ \mathrm{D}_{\tilde{p}}\tilde{E}\ \ \hat{P}^{-1}\ \hat{B}^{-1}$ è composta da elementi $f_{ht} = \dfrac{p_h*}{p_t*}\dfrac{\mathrm{D}_{p_t}E_h}{\mathrm{D}_{p_t}E_t}$, per cui l'ipotesi che i beni sono sostituti lordi richiede $f_{tt} = 1$ e $f_{ht} < 0$ per $h \neq t$, con $\sum_{h=1}^k f_{ht} = 0$, $\sum_{h=1,h\neq t}^k f_{ht} = -1$ e $\sum_{h=1,h\neq t,s}^k f_{ht} > -1$. Allora, la matrice $A = I - F$ è semipositiva, con elementi a_{ht} tali che $\sum_{h=1,h\neq t,s}^k a_{ht} = -\sum_{h=1,h\neq t,s}^k f_{ht} < 1$. Si applica, perciò, il teorema di Metzler (1951) secondo cui la matrice $G = F^{-1} = (I - A)^{-1}$ è positiva, con elementi $g_{hh} > g_{ht} > 0$ per $h \neq t$ e h , $t = 1,\ldots, k$, con h , $t \neq s$. Conseguentemente, essendo $\mathrm{D}_{\omega_{ir}}\tilde{p}* = -\hat{P}^{-1}\ \hat{B}^{-1}\ G\ z_{ir}$ e, quindi,

$$\frac{\partial\dfrac{p_h*}{p_s*}}{\partial\omega_{ir}} = -\frac{1}{p_h*\mathrm{D}_{p_h}E_h}\sum_{t=1,t\neq s}^k g_{ht}z_{t,ir}$$

per $h \neq s$ e $h = 1,\ldots, k$, si ottiene, ponendo $r = h$,

$$\frac{\partial\dfrac{p_h*}{p_s*}}{\partial\omega_{ih}} = -\frac{1}{p_h*\mathrm{D}_{p_h}E_h}\left(g_{hh}z_{h,ih} + \sum_{t=1,t\neq h,s}^k g_{ht}z_{t,ih}\right) < -\frac{g_{hh}}{p_h*\mathrm{D}_{p_h}E_h}\sum_{t=1,t\neq s}^k z_{t,ih} < 0$$

poiché $\mathrm{D}_{p_h}E_h < 0$, $g_{hh} > g_{ht} > 0$ per $t \neq h$ e $z_{t,ih} = \dfrac{p_t*}{p_s*}\dfrac{\partial E_t}{\partial\omega_{ih}} > 0$ per $t \neq h$ e < 0 per $t = h$, con $\sum_{t=1,t\neq s}^k z_{t,ih} = \dfrac{1}{p_s*}\sum_{t=1,t\neq s}^k p_t*\dfrac{\partial E_t}{\partial\omega_{ih}} < 0$. Inoltre, ponendo $r = s$, si ottiene

$$\frac{\partial\dfrac{p_h*}{p_s*}}{\partial\omega_{is}} = -\frac{1}{p_h*\mathrm{D}_{p_h}E_h}\sum_{t=1,t\neq s}^k g_{ht}z_{t,is} > 0$$

poiché $\mathrm{D}_{p_h}E_h < 0$, $g_{ht} > 0$ per $t \neq h$ e $z_{t,is} = \dfrac{p_t*}{p_s*}\dfrac{\partial E_t}{\partial\omega_{ih}} > 0$ per $t \neq s$. □

Le ipotesi della Proposizione 12.14 sono particolarmente forti, sebbene siano soltanto condizioni sufficienti (però, è possibile mostrare con esempi come i prezzi concorrenziali non siano indici di scarsità relativa se i beni non sono tutti normali o sostituti lordi). Non è possibile, perciò, sostenere che abbia valore assoluto l'affermazione (talora indicata come fondamento della teoria neoclassica) che i prezzi dell'equilibrio concorrenziale siano indici di scarsità, sia, cioè, il prezzo di un bene tanto più elevato quanto maggiore è, *ceteris paribus*, la sua scarsità.

Una proposizione interessante riguarda la statica comparata della funzione di benessere sociale $W = \Sigma_{i=1}^{n} \frac{1}{\lambda_i} u_i(x_i)$ massimizzata dall'allocazione di equilibrio concorrenziale (come indicato dalla Proposizione 11.16). Si tratta di esaminare come varia il benessere sociale, definito da questa funzione, al variare della quantità delle risorse. Essendo $W^*((\omega_i)_{i=1}^{n}) = \max_{(x,y)\in C_{FD}} \Sigma_{i=1}^{n} \frac{1}{\lambda_i} u_i(x_i) = \Sigma_{i=1}^{n} \frac{u_i^*(p^*, p^*\omega_i + \Sigma_{j=1}^{m}\theta_{ij} p^* y_j^*)}{\mathrm{D}_{m_i} u_i^*(p^*, p^*\omega_i + \Sigma_{j=1}^{m}\theta_{ij} p^* y_j^*)}$, ove (x^*, y^*, p^*) è un equilibrio concorrenziale per l'economia $\mathcal{E} = (\langle X_i, \succsim_i\rangle, Y_j, \omega_i, \theta_{ij}, i = 1,\dots, n, j = 1,\dots, m)$, si tratta di determinare le derivate $\mathrm{D}_{\omega_{ih}} W^*((\omega_i))$. Queste indicano come varia il benessere sociale (rappresentato dalla funzione $\Sigma_{i=1}^{n} \frac{1}{\lambda_i} u_i(x_i)$) al variare della quantità delle risorse.

Proposizione 12.15 Con riferimento alla funzione di benessere sociale $W = \Sigma_{i=1}^{n} \frac{1}{\lambda_i} u_i(x_i)$, la variazione del benessere sociale determinata dalla variazione della quantità delle risorse è proporzionale ai prezzi di equilibrio concorrenziale, ossia $\mathrm{D}_{\omega_{ih}} W^*((\omega_i)) = p_h^*$ per ogni $h = 1,\dots, k$ e $i = 1,\dots, n$.

Dimostrazione. Quanto indicato è un'immediata conseguenza della Proposizione 8.11 e del commento ad essa. Basta soltanto tenere conto che il saggio marginale di sostituzione tra due risorse sulla curva delle risorse minimali rispetto alle utilità u^* è pari, nell'equilibrio concorrenziale, al rapporto tra i loro prezzi e che il benessere sociale è espresso nell'unità di conto dei prezzi. □

La Proposizione 12.15 esprime, per l'intera economia, il *principio della perdita* di Gossen-Menger, secondo cui il prezzo (o valore di un bene) è pari alla sua utilità marginale (che è qui la variazione della funzione di benessere sociale massimizzata dall'equilibrio concorrenziale).

12.6 Il core di un'economia

L'equilibrio concorrenziale richiede che gli agenti scelgano in base ai prezzi, in relazione ai quali sono *price-taker*. Tuttavia, le allocazioni che corrispondono all'equilibrio concorrenziale non sono soltanto il risultato di questo particolare regime di mercato, ma sono anche il riflesso di forze molto potenti determinate dall'interazione degli agenti, quando questi sono molto numerosi. L'analisi che le mette in luce è quella che introduce il *core* (nocciolo) di un'economia.

Si immagini un ambiente in cui gli agenti possano scambiare beni tra loro senza vincoli (tranne l'accordo tra le parti), quindi, senza l'introduzione di una struttura specifica di scambio (come quella del mercato concorrenziale, in cui interviene un sistema di prezzi uguali per tutti). Si determinano, allora, scambi (e, quindi, allocazioni) rispetto ai quali non ne esistono altri più convenienti per gli agenti. Vi sono normalmente molte allocazioni che godono di questa proprietà. Tuttavia, sotto condizioni molto generali, risulta che queste allocazioni non solo includono le allocazioni concorrenziali, ma tendono anche a coincidere con esse al crescere del numero degli agenti. In altre parole, le allocazioni degli equilibri concorrenziali sono le allocazioni fondamentali delle economie con libertà di scambio e di produzione composte da un numero elevato di agenti.

Nel seguito di questo paragrafo si considera un'economia (con *free disposal*) $\mathcal{E} = (\langle X_i, \succsim_i\rangle, Y, \omega_i, i \in N = \{1, \ldots, n\})$. Si ha, in questa economia, per ogni $i \in N$, una dotazione $\omega_i \in \mathbb{R}^k_+$, un insieme di consumo $X_i = \mathbb{R}^k_+$ e un sistema di preferenza $\langle X_i, \succsim_i\rangle$ regolare, continuo, strettamente convesso e fortemente monotono. L'insieme di produzione $Y \subseteq \mathbb{R}^k$ (con $-\mathbb{R}^k_+ \subseteq Y$, per l'ipotesi di *free disposal*) ha rendimenti costanti di scala ed è adottabile da tutti i consumatori.[8] (L'economia è di puro scambio se $Y = -\mathbb{R}^k_+$).

Per procedere nell'analisi, conviene introdurre le seguenti definizioni.

Definizione 12.5 (*Coalizione*) Una coalizione è formata da un gruppo di consumatori. Ogni $S \subseteq N$, ove $N = \{1, \ldots, n\}$, è una coalizione.

Definizione 12.6 (*Miglioramento esercitabile da una coalizione*) Una coalizione può migliorare (o bloccare) un'allocazione se esistono consumi, realizzabili con i beni disponibili nelle dotazioni dei membri della coalizione e con l'insieme di produzione Y , preferiti da questi ai consumi previsti dall'allocazione in esame. In simboli, la coalizione $S \subseteq N$ può bloccare l'allocazione $x = (x_i)_{i \in N}$ se esistono consumi $(x_i')_{i \in S}$ tali che

$$x_i' \succ_i x_i \quad \text{per ogni } i \in S$$

$$\Sigma_{i \in S}\ x_i' \in Y + \{\Sigma_{i \in S}\ \omega_i\}$$

Definizione 12.7 (*Core di un'economia*) Il *core* (nocciolo) di un'economia è l'insieme di tutte le allocazioni che non possono essere migliorate da nessuna coalizione. Allora, $x^* \in core(\mathcal{E})$ se, per ogni coalizione $S \subseteq N$, la condizione $x_i' \succ_i x_i^*$ per ogni $i \in S$ implica $\Sigma_{i \in S}\ x_i' \notin Y + \{\Sigma_{i \in S}\ \omega_i\}$.

La rappresentazione di un'economia di puro scambio con due beni e due consumatori per mezzo del diagramma di Edgeworth-Pareto, introdotto

[8] Escludendo che vi siano produzioni con rendimenti crescenti di scala, incompatibili con l'equilibrio concorrenziale con cui si vuole confrontare nel seguito il *core*, l'ipotesi che Y abbia rendimenti costanti di scala riflette l'ipotesi che i consumatori abbiano informazioni complete sulle possibilità di scambio e di produzione e che siano liberi di eseguirli. Questo implica che se $y \in Y$ allora anche $\lambda y \in Y$, per ogni λ intero non negativo: i rendimenti costanti di scala richiedono che ciò valga anche per ogni λ reale non negativo.

nel Paragrafo 8.3, consente non solo di determinare il *core* di questa economia, ma anche di illustrare alcune sue proprietà che possono essere generalizzate. Come rappresentato nella Figura 12.14, il *core* (talvolta chiamato anche *curva dei contratti*) è il tratto della curva delle allocazioni efficienti racchiuso tra le curve di indifferenza passanti per la dotazione. Infatti, le allocazioni inefficienti possono essere migliorate dalla coalizione $\{1, 2\}$; quelle a sud-ovest della curva di indifferenza del primo consumatore passante per ω_1 possono essere migliorate dalla coalizione $\{1\}$; e quelle a nord-est della curva di indifferenza del secondo consumatore passante per ω_2 possono essere migliorate dalla coalizione $\{2\}$.

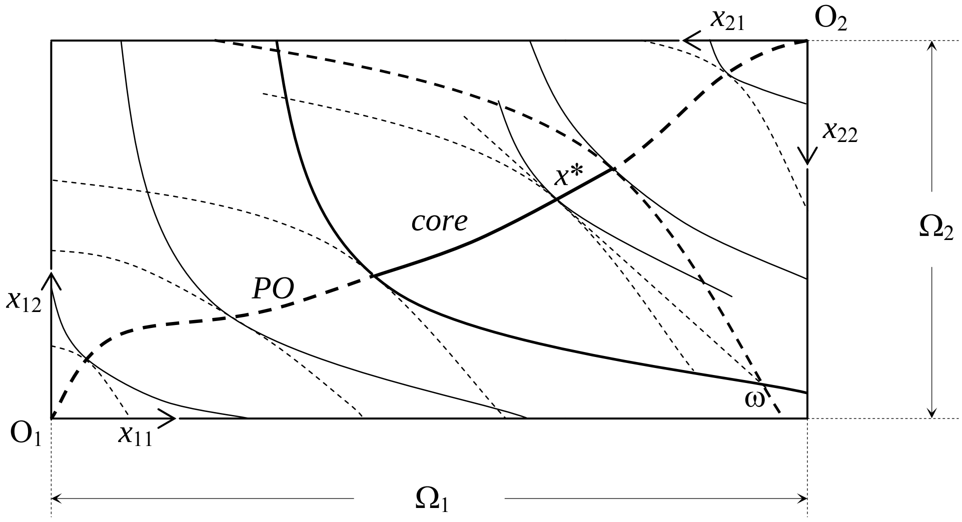

Figura 12.14

Dalla Figura 12.14 risulta, da un lato, che il *core* è composto da allocazioni efficienti e, dall'altro lato, che ogni allocazione di equilibrio concorrenziale appartiene al *core*. In altri termini, il *core* è un insieme che è incluso in quello delle allocazioni efficienti e che include le allocazioni di equilibrio concorrenziale. Queste due proprietà valgono anche per le economie con più di due beni e due consumatori, come indicano le proposizioni seguenti.

Proposizione 12.16 Ogni allocazione appartenente al *core* è efficiente.[9]

Dimostrazione. Si dimostra facilmente la proposizione equivalente secondo cui ogni allocazione realizzabile non efficiente non appartiene al *core*. Infatti, un'allocazione realizzabile non efficiente può essere migliorata dalla coalizione $S = N$ formata da tutti i consumatori. □

[9] Non si distingue tra allocazioni debolmente e fortemente efficienti poiché, essendo le preferenze continue e fortemente monotone, ogni allocazione debolmente efficiente è anche fortemente efficiente (come indicato dalla Proposizione 8.3).

Proposizione 12.17 Ogni allocazione di equilibrio concorrenziale appartiene al *core*.

Dimostrazione. Analogamente alla Proposizione 11.12 (primo teorema dell'economia del benessere), si dimostra la proposizione equivalente secondo cui un'allocazione non può appartenere ad un equilibrio concorrenziale di un'economia se non appartiene al suo *core*. Se l'allocazione $x = (x_i)_{i\in N}$ non appartiene al *core*, allora esiste una coalizione $S \subseteq N$ che può migliorarla, esistono, cioè, un $(x_i')_{i\in S}$ e un $y' \in Y$ tali che $x_i' \succ_i x_i$ per ogni $i\in S$ e $\Sigma_{i\in S}\, x_i' \le y' + \Sigma_{i\in S}\, \omega_i$. Ne consegue, per ogni $p^* \in \mathbb{R}^k_+$ di equilibrio concorrenziale, non solo che $\Sigma_{i\in S}\, p^*\, x_i' \le p^*\, y' + \Sigma_{i\in S}\, p^*\, \omega_i$, ma anche $\Sigma_{i\in S}\, p^*\, x_i' \le \Sigma_{i\in S}\, p^*\, \omega_i$ (tenendo conto che $p^*\, y' \le \max_{y\in Y} p^*\, y = 0$ per l'ipotesi di rendimenti costanti di scala). Vi è, allora, un $i\in S$ per il quale $p^*\, x_i' \le p^*\, \omega_i$. Perciò, essendo $x_i' \succ_i x_i$, si ha che x_i non è il consumo preferito nell'insieme di bilancio, cioè, $x_i \notin d_i(p^*)$. E', quindi, escluso che l'allocazione $x = (x_i)_{i\in N}$ possa appartenere ad un equilibrio concorrenziale. □

La Proposizione 12.17 è una significativa estensione del primo teorema dell'economia del benessere (introdotto dalla Proposizione 11.12), nel senso che l'allocazione di equilibrio concorrenziale non può essere migliorata non solo unanimemente (cioè, ogni altra allocazione realizzabile danneggia almeno un consumatore), ma anche da singoli consumatori o gruppi di essi, cioè, nessun consumatore o gruppo di consumatori ha convenienza a separarsi per conseguire consumi preferiti. In altri termini, l'equilibrio concorrenziale è robusto anche rispetto a deviazioni di un consumatore o di un gruppo di consumatori.

Il *core* dipende dalla possibilità di formare coalizioni. Più coalizioni sono possibili, maggiore è il numero di allocazioni escluse dal *core*. In questo senso, il *core* si restringe al crescere del numero di coalizioni possibili. Avendo considerato coalizioni possibili tutti i sottoinsiemi di N, è l'accrescimento del numero n di consumatori che genera l'accrescimento del numero di coalizioni possibili. Tuttavia, al crescere di n, cresce anche il numero delle dimensioni geometriche del *core*. Infatti, il *core* di un'economia è un sottoinsieme dell'insieme delle allocazioni efficienti ed ha, in genere, le stesse dimensioni geometriche di questo, che sono pari a $n-1$ (come indicato verso la fine del Paragrafo 8.2). Allora, al crescere di n, da un lato, il *core* risulta essere un insieme con un numero crescente di dimensioni, mentre, dall'altro lato, si restringe, per l'accrescersi del numero di coalizioni possibili. Per analizzare questo restringimento, occorre, allora, riferirsi ad una proiezione del *core* su uno spazio di dimensioni costanti al crescere di n e questo viene compiuto introducendo la nozione di *economia replica*.

Si immagini un'economia in cui il numero dei consumatori venga accresciuto duplicandoli, introducendo, cioè, consumatori che hanno le stesse preferenze e le stesse dotazioni dei consumatori esistenti. Può, allora, essere definito il *tipo* di consumatore, caratterizzato da un sistema di preferenza e da una dotazione, cosicché consumatori dello stesso tipo sono uguali tra loro. Nell'*economia replica* il numero dei consumatori dell'economia viene accresciuto accrescendo il numero dei consumatori di ciascun tipo, lasciando inalterato il numero dei tipi. Allora, se vi sono t tipi di consumatore, indicando con T l'insieme dei tipi, il generico tipo di consumatore è definito da $(\langle X_j, \succsim_j\rangle, \omega_j)$, ove $j \in T = \{1, \ldots, t\}$. Nella r-replica dell'economia vi sono r consumatori di ciascun tipo, per cui il numero complessivo di consumatori è $n = t\,r$.

Per l'economia replica così introdotta vale la proposizione seguente, secondo cui ogni allocazione appartenente al *core* assegna a tutti i consumatori dello stesso tipo lo stesso consumo. Questo consentirà di analizzare l'effetto dell'accrescimento di r sul *core* osservando la proiezione del *core* sullo spazio dei consumi tipo (ove sono rappresentati i consumi di tutti i tipi di consumatore, però con un solo consumatore per ogni tipo). Allora, indicando con l'indice $q \in R = \{1, \ldots, r\}$ la coorte q-esima di consumatori, vale la poposizione seguente.

Proposizione 12.18 Ogni allocazione appartenente al *core* assicura lo stesso trattamento a tutti i consumatori dello stesso tipo. Ossia, per ogni allocazione $(x_{jq})_{j\in T,\, q\in R}$ (ove x_{jq} è il consumo dell'individuo di tipo j-esimo presente nella coorte q-esima) appartenente al *core* della r-esima replica dell'economia, si ha $x_{jq} = x_{jq'}$ per ogni coppia $q, q' \in R$ e per ogni $j \in T$.

Dimostrazione. Si dimostra che ogni allocazione per cui non valga la proprietà indicata dalla proposizione non appartiene al *core*. Si consideri, allora, una qualsiasi allocazione in cui ci sia, per ogni tipo, un consumatore che è trattato non meglio degli altri consumatori dello stesso tipo e che questo consumatore sia, per almeno un tipo, trattato peggio di un altro dello stesso tipo. Ponendo, senza perdita di generalità, questi consumatori tutti nella r-esima coorte, si ha, allora, $x_{jr} \precsim_j x_{jq}$ per ogni coppia con $j \in T$ e $q \in R$ e $x_{j'r} \prec_{j'} x_{j'q'}$ per almeno una coppia con $j' \in T$ e $q' \in R$. Indicando con $\overline{x}_j = \frac{1}{r} \Sigma_{q\in R}\, x_{jq}$ il consumo medio dei consumatori di tipo j-esimo, si ha, per l'ipotesi di convessità delle preferenze, che $x_{jr} \precsim_j \overline{x}_j$ per ogni $j \in T$ e $x_{j'r} \prec_{j'} \overline{x}_{j'}$ per almeno uno $j' \in T$. Però, la coalizione formata da tutti i consumatori della r-esima coorte può far ottenere a ciascun tipo il consumo medio, poiché dispone della quantità di beni $\Sigma_{j\in T}\, \omega_j$ e può utilizzare la tecnologia Y . Infatti, poiché l'allocazione $(x_{jq})_{j\in T,\, q\in R}$ è realizzabile, è $\Sigma_{j\in T}\, \Sigma_{q\in R}\, x_{jq} = r\, \Sigma_{j\in T}\, \overline{x}_j = y + r\, \Sigma_{j\in T}\, \omega_j$, ove $y \in Y$. Quindi, essendo anche $\frac{1}{r} y \in Y$ per l'ipotesi che Y abbia rendimenti costanti di scala, si ha $\Sigma_{j\in T}\, \overline{x}_j \in Y + \{\Sigma_{j\in T}\, \omega_j\}$, per cui risulta possibile alla coalizione formata da tutti i consumatori della r-esima coorte assegnare a ciascun tipo il consumo medio. Non solo, può anche assegnare a ciascun tipo un consumo preferito a quello $(x_{jr})_{j\in T}$ dell'allocazione in esame. Infatti, per l'ipotesi di continuità delle preferenze esiste un $\varepsilon \neq 0$, con $\varepsilon \in \mathbb{R}^k_+$, per cui $\overline{x}_{j'} - \varepsilon \succ_{j'} x_{j'r}$ e, per l'ipotesi di forte monotonicità delle preferenze $\overline{x}_j + \frac{1}{t-1}\varepsilon \succ_j \overline{x}_j \succsim_j x_{jr}$ per ogni $j \neq j'$. Risulta, perciò, che tutti i consumatori dello stesso tipo hanno, in ogni allocazione del *core*, consumi indifferenti, cioè con $x_{jq} \sim_j x_{jq'}$ per ogni $j \in T$ e ogni coppia $q, q' \in R$. Per dimostrare che non sono solo indifferenti, ma uguali, cioè

$x_{jq} = x_{jq'}$ per ogni $j \in T$ e ogni coppia $q, q' \in R$, si consideri un'allocazione in cui vi è una coppia di consumatori dello stesso tipo per cui $x_{jq} \neq x_{jq'}$ e $x_{jq} \sim_j x_{jq'}$. L'allocazione, però, non è efficiente: la situazione di questa coppia di consumatori, infatti, può essere migliorata senza danneggiare nessuno, poiché, essendo le preferenze strettamente convesse, si ha $\frac{1}{2}(x_{jq} + x_{jq'}) \succ_j x_{jq} \sim_j x_{jq'}$. Perciò, tenendo conto della Proposizione 12.16, ogni allocazione $(x_{jq})_{j \in T,\, q \in R}$ con $x_{jq} \neq x_{jq'}$ per qualche $j \in T$ e $q, q' \in R$ non appartiene al *core*. □

Il fatto che tutti i consumatori dello stesso tipo abbiano, se l'allocazione appartiene al *core*, lo stesso consumo consente di analizzare come si modifica il *core* al crescere della replica r considerando soltanto i tipi di consumatore, non tutti i consumatori. E' possibile, cioè, esaminare soltanto le allocazioni $(x_j)_{j \in T}$ dei tipi (tenendo conto che, nel *core*, si ha $x_{jq} = x_j$ per ogni $q \in R$ e $j \in T$). Si indichi con $C_r(\mathcal{E})$ la proiezione del $core(\mathcal{E})$ sullo spazio delle allocazioni dei t tipi quando il numero di consumatori è $n = t\,r$. Si ha, da un lato, che $C_r(\mathcal{E}) \subseteq C_{r-1}(\mathcal{E})$ (poiché ogni allocazione dei tipi non appartenente a $C_{r-1}(\mathcal{E})$ non appartiene neppure a $C_r(\mathcal{E})$, essendo le coalizioni disponibili per la replica $r-1$ disponibili anche per la replica r) e, dall'altro lato, per la Proposizione 12.17, si ha che le allocazioni di equilibrio concorrenziale appartengono a $C_r(\mathcal{E})$ qualunque sia il valore di r (poiché appartengono al $core(\mathcal{E})$ qualunque sia il valore di n). La proposizione seguente dimostra che al crescere di r viene esclusa da $C_r(\mathcal{E})$ ogni allocazione che non sia di equilibrio concorrenziale, ossia che $core(\mathcal{E})$ converge, al crescere di r, all'insieme delle allocazioni di equilibrio concorrenziale.

Proposizione 12.19 Se un'allocazione $(x_j)_{j \in T}$ non è un'allocazione di equilibrio concorrenziale, allora esiste una replica r sufficientemente grande tale che $(x_j)_{j \in T} \notin C_r(\mathcal{E})$.

Dimostrazione. Questa proposizione viene dimostrata assumendo, oltre quanto indicato all'inizio di questo paragrafo, che $x_j \gg 0$ per ogni $j \in T$ e che le preferenze dei consumatori siano rappresentabili con funzioni di utilità differenziabili. Se $(x_j)_{j \in T}$ non è un'allocazione realizzabile oppure, pur essendo realizzabile, non è efficiente, allora, per la Proposizione 12.16, non appartiene a $C_r(\mathcal{E})$ qualunque sia il valore di r. Si consideri, allora, un'allocazione $(x_j)_{j \in T}$ efficiente, appartenente a $C_r(\mathcal{E})$ per qualche r (ossia, $(x_{jq})_{j \in T,\, q \in R}$ è un'allocazione efficiente appartenente al *core*, perciò con $x_{jq} = x_j$ per ogni $q \in R$ e $j \in T$). Essendo efficiente, esiste per il secondo teorema dell'economia del benessere (Proposizione 11.8) un equilibrio concorrenziale $((x_j)_{j \in T}, y, p)$ rispetto alle dotazioni $(\omega_j')_{j \in T} = (x_j)_{j \in T}$ (tenendo conto che il profitto è nullo nell'equilibrio concorrenziale poiché l'insieme di produzione Y ha rendimenti costanti di scala). Se $((x_j)_{j \in T}, y, p)$ non è un equilibrio concorrenziale rispetto alle dotazioni $(\omega_j)_{j \in T}$, vi è allora almeno uno j, che può essere indicato, senza perdita di generalità, con l'indice t, per cui $p\,\omega_t' = p\,x_t > p\,\omega_t$. Si consideri la coalizione formata da tutti i consumatori tranne l'r-esimo consumatore di tipo t. Questa coalizione può distribuire ai suoi membri la quantità di beni $y + r\,\Sigma_{j \in T}\,\omega_j - \omega_t$, ad esempio, assegnando loro $x_{jq}' = x_j + \dfrac{1}{r-1+r(t-1)}(x_t - \omega_t)$. Si ha, infatti, che $\Sigma_{j \in T\setminus\{t\}}\Sigma_{q \in R}\,x_{jq}' + \Sigma_{q \in R\setminus\{r\}}\,x_{tq}' = r\,\Sigma_{j \in T\setminus\{t\}}\,x_j + \dfrac{r(t-1)}{r-1+r(t-1)}(x_t - \omega_t) + (r-1)\,x_t +$

$\dfrac{r-1}{r-1+r(t-1)}(x_t - \omega_t) = r\ \Sigma_{j\in T}\ x_j - \omega_r = y + r\ \Sigma_{j\in T}\ \omega_j - \omega_t$. Rimane da dimostrare, a questo punto, che $x_{jq}' \succ_j x_j$ per ogni $j\in T$ per ogni r sufficientemente grande, cioè che questa coalizione, se l'economia è composta da molti consumatori, può bloccare l'allocazione non concorrenziale. Questo risultato viene ottenuto tenendo conto che al crescere di r diviene sempre minore la variazione $x_{jq}' - x_j$ (che è la differenza tra il consumo che la coalizione può assegnare e quello dell'allocazione in esame) e che le preferenze dei consumatori sono rappresentabili, per ipotesi, con una funzione di utilità differenziabile. Si trova, infatti, considerando il termine del primo ordine dello sviluppo in serie di Taylor della funzione di utilità e ricordando che $((x_j)_{j\in T}\ , y, p)$ è un equilibrio concorrenziale per cui $D_{x_j}\ u_j(x_j) = \lambda_j\, p$ (con $\lambda_j > 0$),

$$u_j(x_{jq}') - u_j(x_j) \simeq D_{x_j}\ u_j(x_j)\ (x_{jq}' - x_j) = \frac{\lambda_j}{r-1+r(t-1)}\ p\ (x_t - \omega_t) > 0$$

per ogni consumatore appartenente alla coalizione. □

La Proposizione 12.19 può essere considerata una generalizzazione del secondo teorema dell'economia del benessere, così come la Proposizione 12.17 del primo. Essa mostra che le allocazioni di equilibrio concorrenziale sono quelle verso cui tendono le economie composte da un numero elevato di consumatori, se vi è libertà di eseguire scambi e produzioni e se vi sono sufficienti informazioni sulle possibilità che vi sono al riguardo.

12.7 Equilibrio, tempo e incertezza

All'inizio del Capitolo 3, quando sono stati introdotti i beni, questi sono stati qualificati secondo le loro caratteristiche fisiche (ad esempio, grano o acciaio), il luogo di consegna (ad esempio, Chicago o Milano), la data di consegna (ad esempio, subito o tra tre mesi) e lo stato di natura, cioè, se si verifica un certo evento (ad esempio, se vi è una grandinata). In questo paragrafo vengono esaminati in particolare questi due ultimi aspetti. (I termini "data", "tempo" e "istante" vengono usati nel seguito come sinonimi: indicano un punto sull'asse del tempo).

Ad esempio, le scelte di produzione coinvolgono direttamente il tempo, poiché gli input devono essere impiegati in tempi normalmente anteriori (e, comunque, non posteriori) a quelli in cui gli output corrispondenti si rendono disponibili, ossia, gli input sono beni qualificati con una data anteriore (o non posteriore) a quella con cui sono qualificati gli output corrispondenti. Come altro esempio, i contratti di assicurazione sono contratti tipici pattuiti in relazione ad uno stato di natura, che è, in questo caso, un evento dannoso: l'evento dannoso è condizione perché sorga il diritto alla prestazione pattuita.

Inoltre, i contratti di scambio possono essere stipulati in date diverse (e prevedere la consegna dei beni nella stessa data del contratto o in un tempo successivo).

Quindi, per ogni bene (grano o acciaio disponibile in un certo luogo) i prezzi possono differire a seconda della data del contratto, della data di consegna dei beni oggetto del contratto e dello stato di natura che determina il diritto alla prestazione. Se ogni contratto di scambio prevede, come si assume nel seguito, la consegna di un bene in cambio del bene numerario (che è uno dei beni dell'economia, nel seguito il bene con indice 1 , con prezzo nominale sempre positivo)[10], allora il prezzo del bene in esame, in unità di numerario, può essere indicato con il simbolo $p_h(t,b,c,s)$, ove h segnala il *tipo di bene* (grano o acciaio disponibile in un certo luogo), t la *data del contratto* di compravendita, b (con $b \geq t$) la *data* pattuita *per il pagamento* in numerario, c (con $c \geq t$) la *data* pattuita *di consegna* del bene e s l'*evento* che determina il diritto alla consegna del bene.

Nei riguardi della data dei contratti, due tipi principali di economie possono essere definiti. Il primo tipo riguarda le economie in cui vi è un unico istante in cui vengono fissati i contratti di scambio e vengono effettuati i pagamenti. L'equilibrio che vi corrisponde viene indicato come *equilibrio intertemporale*. Indicando con il numero zero la data dei contratti e dei pagamenti, l'equilibrio concorrenziale concerne prezzi che possono essere indicati con il simbolo $p_h(c,s)$, ove $c \geq 0$ (ossia, i prezzi $p_h(t,b,c,s)$ sono, in queste economie, $p_h(0,0,c,s)$ e possono essere indicati, per semplicità di scrittura, come $p_h(c,s)$). L'altro tipo riguarda le *economie sequenziali*, in cui vi è una successione di istanti in cui si stabiliscono i contratti, perciò, con $t = 0, 1, 2,\ldots$ A ciascuno di questi istanti corrisponde un equilibrio, che viene indicato come *equilibrio temporaneo*.[11] Queste due tipi di economie determinano generalmente allocazioni concorrenziali differenti, anche se i dati che definiscono le economie sono sostanzialmente

[10] E' naturale porre la moneta come numerario, cosicché i prezzi in numerario suindicati divengono prezzi monetari. Tuttavia, l'introduzione della moneta nelle analisi di equilibrio generale non è priva di problemi. Ad esempio, se la moneta viene qualificata come un bene durevole che gli agenti detengono soltanto perché può essere usata come mezzo (non esclusivo) di pagamento, allora la sua presenza (con prezzo positivo) non è giustificata nelle analisi di equilibrio intertemporale (definito nel testo poco più avanti), poiché nella rappresentazione intertemporale vi è un solo istante per i pagamenti e nessuno desidera nel suo paniere di beni una quantità positiva di moneta costosa, inutile e inutilizzabile. Anche nelle analisi di equilibrio temporaneo, se l'orizzonte temporale è finito, l'introduzione della moneta è problematica (il suo valore è nullo nell'ultimo periodo e, quindi, procedendo a ritroso, anche nei periodi precedenti). Occorre che la moneta abbia, come mezzo di pagamento, qualità migliori rispetto agli altri beni: ad esempio, abbandonando l'ipotesi che l'operazione di scambio sia priva di costi e introducendo *costi di transazione* più elevati per gli scambi non monetari rispetto a quelli effettuati con pagamento in moneta.

[11] Se la successione di equilibri temporanei si compone di equilibri tutti uguali tra loro, allora l'equilibrio è definito *stazionario*, così come viene definita stazionaria ogni grandezza che permane immutata nel tempo.

uguali (consumi e produzioni coincidono sotto le condizioni indicate, alla fine di questo paragrafo, con la Proposizione 12.21).

Equilibrio e tempo: i saggi di interesse. Il confronto tra i prezzi con consegna a pronti e i prezzi con consegna differita consente di definire (sia nell'equilibrio intertemporale, sia in quello temporaneo) i *tassi di interesse*. Si considerino l'equilibrio intertemporale (in cui tutti i contratti si formano alla data 0 con pagamenti in data 0) e, in esso, per ora, i contratti non condizionati dall'accadimento di eventi (cioè, con consegna del bene qualunque sia lo stato di natura, perciò, con prezzi $p_h(c, S_c)$, ove S_c indica l'insieme di tutti i possibili stati di natura relativi al tempo c , prezzi indicati, per comodità, con $p_h(c)$).

Definizione 12.8 Il *tasso di interesse proprio* del bene h-esimo per il periodo tra 0 e c (con $c > 0$) è il rapporto

$$i_h(c) = \frac{p_h(0) - p_h(c)}{p_h(c)}$$

ove $p_h(0)$ e $p_h(c)$ sono, rispettivamente, i prezzi del bene h-esimo per *consegna a pronti* (cioè, alla data del contratto, che è simultanea al pagamento, per cui contratto, pagamento e consegna del bene sono effettuati tutti alla data 0) e per *consegna differita* (rispetto alla data del contratto e del pagamento, perciò con una forma di *credito*). Normalmente, si ha $p_h(c) < p_h(0)$ (infatti, con la consegna differita, si paga in anticipo rispetto alla consegna del bene). Applicando questa definizione al bene numerario, per cui è, per definizione, $p_1(0) = 1$, risulta

$$p_1(c) = \frac{1}{1 + i_1(c)}$$

ossia, $p_1(c)$, che è il *valore attuale* di una unità di numerario disponibile al tempo c , definisce il *fattore di sconto* del numerario per il periodo tra 0 e c . Si noti come i tassi di interesse propri siano generalmente diversi per i diversi beni (oltre che diversi in relazione alla durata del periodo).

Se vi è una successione di equilibri temporanei, prendendo in esame l'equilibrio temporaneo alla data 0 , vi possono essere in questo equilibrio, oltre ai prezzi a pronti e per consegna differita, anche i *prezzi a termine*. Questi riguardano i contratti in cui consegna del bene e pagamento sono contestuali, ma differiti rispetto alla data del contratto (cioè, $b = c > 0$). Ad esempio, un prezzo a termine è il prezzo stabilito al tempo 0 per la compravendita di grano con consegna tra sei mesi e pagamento tra sei mesi. Allora, mettendo in evidenza anche la data del pagamento, il prezzo del bene h-esimo con consegna differita è indicato da $p_h(0,c)$ (invece che da $p_h(c)$, come in precedenza), quello a termine da $p_h(c,c)$. I prezzi concorrenziali con consegna differita e a termine non sono indipendenti tra loro. Infatti, un agente può ottenere la disponibilità del bene h-esimo al tempo c usando diverse possibilità di scambio. Può, ad esempio, comprare il bene per consegna differita: avrà una unità del bene al tempo c pagando al tempo 0 il prezzo $p_h(0,c)$. Oppure, può comprare il bene a termine procurandosi con un acquisto per consegna differita il numerario necessario al tempo c: con il contratto a termine ha diritto ad avere una unità del bene al tempo c pagando al tempo c il prezzo $p_h(c,c)$ e, con il contratto per consegna differita di numerario, si procura la disponibilità al tempo c del numerario necessario, pagando al tempo 0 il prezzo $p_1(0,c)$ per ogni unità di numerario. Seguendo la prima via, il prezzo al tempo 0 del bene disponibile al tempo c è $p_h(0,c)$. Seguendo la seconda via, questo prezzo, che corrisponde alla quantità di numerario da pagare al tempo 0 per avere al tempo c la quantità di numerario stabilita dal contratto a termine, è pari al prodotto $p_h(c,c)\ p_1(0,c)$. Il mercato concorrenziale rende queste due vie equivalenti tra loro (altrimenti, si potrebbe conseguire un profitto infinito senza rischio, comprando al prezzo $\min\{p_h(0,c), p_h(c,c)\ p_1(0,c)\}$ e vendendo al prezzo $\max\{p_h(0,c), p_h(c,c)\ p_1(0,c)\}$). Questa *condizione di arbitraggio* richiede, perciò,

$$p_h(0,c) = p_h(c,c)\ p_1(0,c)$$

Questa condizione ha due implicazioni. La prima riduce il numero dei mercati presenti nell'equilibrio temporaneo: se vi sono i mercati a termine, allora è sufficiente che i mercati per consegna differita riguardino soltanto il bene numerario (su questi mercati si trattano, in definitiva, obbligazioni senza rischio e senza cedole, cioè del tipo *zero-coupon*, indicate spesso nella letteratura sull'equilibrio generale come *Arrow-Debreu bonds*). L'altra implicazione riguarda i tassi propri di interesse. Introducendo nella definizione $i_h(0,c) = \dfrac{p_h(0,0) - p_h(0,c)}{p_h(0,c)}$ la condizione di arbitraggio $p_h(0,c) = p_h(c,c)\ p_1(0,c)$, si ottiene la relazione

$$i_h(0,c) = \frac{1}{p_1(0,c)} \frac{p_h(0,0)}{p_h(c,c)} - 1$$

che mostra come i tassi propri di interesse dei diversi beni siano collegati ai loro rapporti tra prezzi a pronti e prezzi a termine e da cui risulta la proposizione seguente.

Proposizione 12.20 Se è $p_h(c,c) = p_h(0,0)$ per tutti i beni, se, cioè, i prezzi a termine sono uguali a quelli a pronti, allora i tassi propri di interesse sono uguali per tutti i beni e coincidono con quello del numerario per lo stesso periodo.

Si può, inoltre, indurre che si ha uguaglianza tra prezzi a termine e prezzi a pronti se tutti gli agenti hanno *aspettative di prezzi stazionari*, che risulta, perciò, condizione sufficiente per l'esistenza di un saggio d'interesse per ogni periodo unico per tutti i beni.

Questa implicazione è connessa con l'attività di *speculazione*. Si assuma che vi siano agenti, gli speculatori, neutrali o propensi al rischio. Se uno speculatore si attende per il tempo $c > 0$ un prezzo medio a pronti diverso da quello a termine, esistente al tempo 0, per la stessa data, cioè, $\mathrm{EV}p_h(c,c,c) \neq p_h(0,c,c)$ (ove $p_h(0,c,c)$ è il prezzo suindicato con il simbolo $p_h(c,c)$ e $\mathrm{EV}p_h(c,c,c)$ è il prezzo medio a pronti atteso per l'equilibrio temporaneo che si stabilirà al tempo c), allora gli conviene speculare, comprando (vendendo) a termine se $\mathrm{EV}p_h(c,c,c)$ è maggiore (minore) di $p_h(0,c,c)$, per rivendere (ricomprare) il bene a pronti al tempo c conseguendo, in tal modo, mediamente un profitto. (Si noti come questo tipo di arbitraggio differisca da quello, esaminato prima, che aveva condotto alla condizione $p_h(0,0,c) = p_h(0,c,c)\ p_1(0,0,c)$, perché allora il risultato conseguibile con l'arbitraggio era un profitto certo, mentre ora è incerto, quello indicato essendo un profitto medio, subordinato alla realizzazione dell'aspettativa). Se tutti gli agenti (speculatori e non speculatori) hanno aspettative di prezzi stazionari, cioè, $\mathrm{EV}p_h(c,c,c) = p_h(0,0,0)$, allora, se fosse $p_h(0,0,0) \neq p_h(0,c,c)$, tutti gli speculatori e coloro che operano su questo mercato agirebbero nella stessa direzione, cioè, comprerebbero tutti o venderebbero tutti, e non si avrebbe un equilibrio. Questo, perciò, richiede la condizione di arbitraggio speculativo $p_h(0,0,0) = p_h(0,c,c)$ (ossia, $p_h(0,0) = p_h(c,c)$, trascurando l'indicazione della data del contratto, che è 0).

Equilibrio e incertezza: i prezzi contingenti. Si consideri, ora, la dipendenza dagli stati di natura, in relazione all'analisi dell'equilibrio intertemporale, perciò, in relazione ai prezzi $p_h(c,s)$. Questi prezzi, relativi ad un evento, vengono qualificati come *contingenti*, così come i beni e i mercati corrispondenti.[12] Si noti come l'acquirente di un bene contingente paghi al tempo 0 il prezzo $p_h(c,s)$ per ricevere il bene al tempo c se si verifica l'evento s e non riceve nulla se questo evento non si verifica (allora, il prezzo del bene qualunque sia lo stato di natura, per ricevere, cioè, il bene con certezza, è $p_h(c, S_c) = \sum_{s\in S_c} p_h(c,s)$, ove S_c indica l'insieme di tutti i possibili stati di natura del tempo c). Sono di questo tipo i contratti assicurativi e molti contratti finanziari. Ad esempio, come anche indicato nel Paragrafo 7.7, in un contratto assicurativo, si paga un prezzo (denominato *premio*) per ricevere in cambio, in un tempo successivo a questo pagamento, una somma nella eventualità che si verifichi il danno oggetto del contratto e nulla se questo non si verifica.

Si assuma che l'orizzonte economico sia composto da un numero finito di punti, cioè, $c\in\{0, 1,\dots, T\}$ (ove T è l'ultimo istante di consegna dei beni). Si indichi con S_c l'insieme dei possibili stati di natura del tempo c . Poiché lo scorrere del tempo produce informazioni e, quindi, raffina gli insiemi degli stati di natura, si ha che il numero degli elementi degli insiemi S_c non decresce al crescere di c e che, perciò, l'insieme $S_T = \{ s_1^T ,..., s_{R_T}^T \}$ possiede il maggior numero di elementi. Si assuma che questo numero, R_T , sia finito. Allora, partendo da S_T , essendo S_T una partizione di $S_{T-1} = \{ s_1^{T-1},..., s_{R_{T-1}}^{T-1} \}$, si ha che ogni elemento s_r^{T-1} di S_{T-1} è un sottoinsieme di S_T ; essendo, poi, S_{T-1} una partizione di $S_{T-2} = \{ s_1^{T-2},..., s_{R_{T-2}}^{T-2} \}$, si ha che ogni s_r^{T-2} è un sottoinsieme di S_{T-1} ; e così via, fino ad avere $S_0 = \{ s_1^0 \}$,

[12] La definizione di stato di natura e quella di evento (che è un insieme di stati di natura) sono indicate all'inizio del Capitolo 7. Occorre, inoltre, che gli eventi siano osservabili oggettivamente (nel senso che possano essere fatti valere i diritti conseguenti al loro verificarsi). Non possono, perciò, essere considerati quegli eventi che determinino un pagamento ad un agente nel caso che questi sia triste (posto che la tristezza, potendo essere simulata, non sia oggettivamente osservabile).

con $s_1^0 = S_T$, poiché al tempo iniziale nessuna informazione è disponibile. Quindi, per quanto già indicato, $1 = R_0 \leq R_1 \leq \ldots \leq R_{T-1} \leq R_T$. Si assuma, infine, che gli insiemi S_c, per $c = 1,\ldots, T$, siano uguali per tutti gli agenti, ossia, che l'informazione sia comune (non ci sono, cioè, asimmetrie informative).

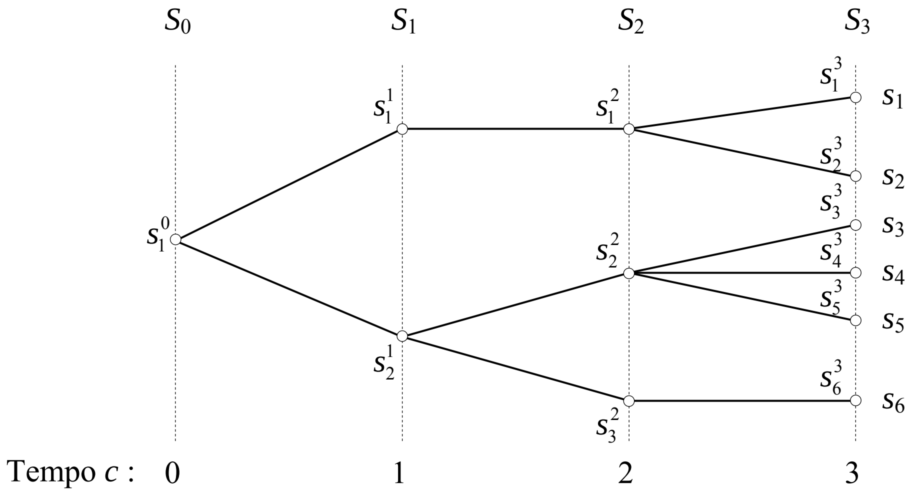

Figura 12.15

Il progressivo raffinamento degli insiemi degli stati di natura S_c al crescere di c è esemplificato dall'*albero degli eventi* della Figura 12.15, ove $T = 3$; $S_0=\{s_1^0\}$ con $s_1^0=\{s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6\}$; $S_1=\{s_1^1, s_2^1\}$ con $s_1^1=\{s_1, s_2\}$ e $s_2^1=\{s_3, s_4, s_5, s_6\}$; $S_2=\{s_1^2, s_2^2, s_3^2\}$ con $s_1^2=\{s_1, s_2\}$, $s_2^2=\{s_3, s_4, s_5\}$ e $s_3^2=\{s_6\}$; e $S_3=\{s_1^3,\ldots, s_6^3\}$ con $s_r^3=s_r$ per $r = 1,\ldots,6$.

Allora, in ogni data di consegna c, vi sono R_c prezzi $p_h(c,s)$ (ove $s \in S_c$) per ogni bene. Quindi, per ogni bene, vi sono complessivamente (cioè, considerando tutte le date di consegna) $R = \sum_{c=0}^{T} R_c$ prezzi. L'equilibrio concorrenziale intertemporale, con *mercati completi*, li determina tutti per tutti i beni. Riprendendo la descrizione dell'equilibrio generale concorrenziale condotta fino al paragrafo precedente, ove sono elencati k beni, ogni bene è qualificato da una coppia $(h,\ s_r^c)$, per cui, se K è il numero di beni in base alle caratteristiche fisiche e al luogo di consegna, il numero complessivo di beni (definiti, oltre che in base alle caratteristiche fisiche e al luogo di consegna, anche in base alla data di consegna e allo stato di natura) è pari a $k = K\,R$.

Se vi è una successione di equilibri temporanei, prendendo in esame l'equilibrio temporaneo alla data 0 e, insieme ai mercati contingenti, i corrispondenti mercati a termine, vi è la condizione di arbitraggio (del tutto analoga a quella già vista per i prezzi non contingenti)

$$p_h(0,c,s) = p_h(c,c,s)\, p_1(0,c,s)$$

ove $p_h(c,c,s)$ è il prezzo da pagare al tempo c, se si verifica l'evento s, per ricevere, sempre al tempo c e se si verifica l'evento s, una unità del bene h-esimo. E', allora, sufficiente che i mercati contingenti per consegna differita riguardino soltanto il bene numerario, ossia, che vi siano obbligazioni contingenti *Arrow-Debreu* per ogni evento $s \in \bigcup_{c=1}^{T} S_c$. In altre parole, mentre nel caso senza incertezza occorreva una obbligazione *Arrow-Debreu* per ogni possibile data futura (quindi, T obbligazioni), nel caso con incertezza occorrono $R-1$ obbligazioni (R_c per ogni $c = 1,\ldots, T$). L'obbligazione contingente da' diritto alla consegna di una unità di numerario alla data c se e solo se si verifica lo stato di natura s_r^c, ove $r = 1,\ldots R_c$ e $c = 1,\ldots, T$.

Si noti come la considerazione dell'incertezza non alteri la rappresentazione dell'equilibrio generale concorrenziale fornita nel capitolo precedente e nei precedenti paragrafi di questo capitolo. Si tiene conto dell'incertezza unicamente con l'accorgimento semantico che definisce i beni non solo in relazione alle loro caratteristiche fisiche e alla loro localizzazione, ma anche in relazione ai possibili stati di natura. Ciò implica che non è necessario specificare le preferenze degli agenti sugli insiemi degli atti (o delle lotterie), seguendo l'analisi compiuta nel Capitolo 7, e, in particolare, non è necessario assumere che valga la teoria dell'utilità attesa. E' sufficiente che i consumatori abbiano sistemi di preferenza $\langle X_i, \succsim_i \rangle$ (tutt'al più dotati delle proprietà richieste nei Paragrafi 11.4 e 11.6), in cui gli insiemi di consumo X_i sono composti da panieri di beni contingenti, e che le imprese abbiano, analogamente, insiemi di produzione Y_j composti da produzioni contingenti. Tuttavia, il numero dei beni implicati (per ogni possibile luogo di consegna, data di consegna e stato di natura), anche se finito, è enorme ed è lecito dubitare che la rappresentazione di un equilibrio generale che determini i prezzi concorrenziali di tutti questi beni sia una ricostruzione razionale adeguata della realtà. Tiene conto di questa osservazione l'equilibrio generale con mercati incompleti (che sarà presentato nel Paragrafo 12.9), in cui si ipotizza che il mercato tratti un numero di beni inferiore a quello complessivo dei beni dell'economia e che, quindi, si determinino i prezzi concorrenziali soltanto di una parte dei beni.

L'ultimo argomento di questo paragrafo riguarda il confronto tra l'equilibrio intertemporale e quello sequenziale soprattutto allo scopo di individuare condizioni che rendano i consumi e le produzioni determinati dall'equilibrio intertemporale uguali a quelli determinati dalla successione di equilibri temporanei.[13] Si consideri l'economia

[13] Una questione, qui non trattata, riguarda la possibilità di *fallimento*, cioè, che vi siano agenti che non onorano gli impegni assunti. Questo problema sorge nei contratti per consegna differita (in quelli a pronti, nessuno ha ragione di dichiararsi disponibile ad uno scambio che non è in grado di onorare, poiché verrebbe meno anche il suo diritto a ricevere la contropartita). Un agente potrebbe vendere per consegna differita un bene, incassandone subito il prezzo, e rifiutarsi, alla scadenza del contratto, di consegnare il bene pattuito. Per evitare questa possibilità, l'economia dovrebbe prevedere penalità tali da rendere questo comportamento non conveniente per nessun agente, soluzione questa applicabile per

intertemporale $\mathcal{E} = (\langle X_i, \succsim_i \rangle, Y_j, \omega_i, \theta_{i,j}, i = 1,\dots, n, j = 1,\dots, m)$ e si introduca l'economia sequenziale definita dalle economie temporanee, una per ogni nodo dell'albero degli eventi, $\mathcal{E}(s_r^t) = (\langle X_i(s_r^t), \succsim_i^{s_r^t} \rangle, Y_j(s_r^t), \omega_i(s_r^t), \theta_{i,j}(s_r^t), i = 1,\dots, n, j = 1,\dots, m)$, con $t = 0, 1,\dots, T$. Siano queste economie definite e connesse tra loro tramite le relazioni seguenti.

Con riferimento all'economia intertemporale, introdotto l'albero degli eventi e indicando i suoi nodi con l'insieme $CS = \cup_{c=0}^{T} S_c$ (per cui ogni elemento $s_r^c \in CS$ individua una coppia tempo-evento (c, s)), i consumi e le produzioni sono, rispettivamente, i punti $x_i = (x_{i,h,s_r^c})_{h \in H, s_r^c \in CS}$ e $y_j = (y_{j,h,s_r^c})_{h \in H, s_r^c \in CS}$, i cui insiemi sono $X_i \subset \mathbb{R}^K \times CS$ e $Y_i \subset \mathbb{R}^K \times CS$, ove $H = \{1,\dots, K\}$ è l'insieme dei beni distinti in base alle caratteristiche fisiche e al luogo di consegna. Poi, $\omega_i = (\omega_{i,h,s_r^c})_{h \in H, s_r^c \in CS} \in X_i$ e $\theta_{i,j} = (\theta_{i,j,s_r^c})_{s_r^c \in CS}$, con $\theta_{i,j,s_r^c} \in [0,1]$ e $\sum_{i=1}^{n} \theta_{i,j,s_r^c} = 1$ per ogni $j = 1,\dots, m$ e $s_r^c \in CS$. I prezzi sono rappresentati dal punto $p = (p_{h,s_r^c})_{h \in H, s_r^c \in CS} \in \mathbb{R}_+^K \times CS$, con il prezzo a pronti del numerario pari a 1, cioè, $p_{1,s_1^0} = 1$. L'insieme di bilancio dell'i-esimo consumatore è, come di consueto, $B_i(p) = \{x_i \in X_i : p\, x_i \leq p\, \omega_i + \sum_{j=1}^{m} \theta_{i,j} \max_{y_j \in Y_j} p y_j\}$, ove $p\, x_i = \sum_{h \in H, s_r^c \in CS} p_{h,s_r^c} x_{i,h,s_r^c}$ e analogamente per $p\, \omega_i$ e $p\, y_j$. Le scelte di produzione sono rappresentate dalle funzioni di offerta $s_j(p) = \arg\max_{y_j \in Y_j} p y_j$, quelle di consumo dalle funzioni di domanda $d_i(p) = \{x_i \in B_i(p)\colon x_i \succsim_i x_i' \text{ per ogni } x_i' \in B_i(p)\}$. L'equilibrio concorrenziale intertemporale $((x_i^*)_{i=1}^{n}, (y_j^*)_{j=1}^{m}, p^*)$ è definito dalle condizioni $x_i^* \in d_i(p^*)$ per ogni $i = 1,\dots, n$, $y_j^* \in s_j(p^*)$ per ogni $j = 1,\dots, m$ e $\sum_{i=1}^{n} x_i^* \leq \sum_{i=1}^{n} \omega_i + \sum_{j=1}^{m} y_j^*$.

Con riferimento alla economia sequenziale, introdotto per ogni $s_r^t \in CS$ il sottoalbero degli eventi che origina da s_r^t e indicando i suoi nodi con l'insieme $CS(s_r^t)$ (per cui ogni elemento $s_r^b \in CS(s_r^t)$ o $s_r^c \in CS(s_r^t)$, con $b \geq t$ e $c \geq t$, individua una coppia tempo-evento (c, s) ancora possibile al tempo-evento s_r^t), le scelte di scambio del consumatore i-esimo sono punti $z_i(s_r^t) = (z_{i,h,s_r^b,s_r^c}(s_r^t))_{h \in H; s_r^b, s_r^c \in CS(s_r^t)} \in \mathbb{R}^K \times (CS(s_r^t))^2$, ove $z_{i,h,s_r^b,s_r^c}(s_r^t)$ indica, per il consumatore i-esimo, la compravendita (è un acquisto se positivo, una vendita se negativo) del bene h-esimo scelta al tempo-evento s_r^t con pagamento (in numerario) nel tempo-evento $s_r^b \in CS(s_r^t)$ e consegna del bene nel tempo-evento $s_r^c \in CS(s_r^t)$ (con $b \geq t$ e $c \geq t$). I consumatori possono anche comprare e vendere quote di proprietà delle imprese, con pagamento (in numerario) nel tempo-evento $s_r^b \in CS(s_r^t)$ e consegna nel tempo-evento $s_r^c \in CS(s_r^t)$, con $b \geq t$ e $c \geq t$, e gli acquirenti hanno diritto al corrispondente flusso di profitti a partire dalla data di consegna inclusa. Possono, cioè, scegliere lo scambio di quote rappresentato da punti $\zeta_{i,j}(s_r^t) =$

---

l'equilibrio intertemporale con mercati completi, anche se vi è incertezza. Invece, l'incertezza nell'economia sequenziale con mercati incompleti rende la possibilità di fallimento degli agenti un problema rilevante. Un agente potrebbe non onorare un contratto a termine (perché divenuto troppo oneroso), possibilità questa che determinerebbe una ridotta disponibilità degli agenti a stipulare contratti di questo tipo. Per questa ragione, nella realtà dei mercati organizzati vi sono istituti di garanzia contro il rischio di inadempienza.

$(\zeta_{i,j,s_r^b,s_r^c}(s_r^t))_{s_r^b,s_r^c\in CS(s_r^t)}$, ove $\zeta_{i,j,s_r^b,s_r^c}(s_r^t)$ indica, per il consumatore *i*-esimo, la quota acquistata (se positiva, o venduta se negativa) dell'impresa *j*-esima (con $j \in J = \{1,\ldots, m\}$) nel tempo-evento s_r^t, con pagamento (in numerario) nel tempo-evento $s_r^b \in CS(s_r^t)$ e consegna nel tempo-evento $s_r^c \in CS(s_r^t)$ (con $b \geq t$ e $c \geq t$). Le scelte dell'impresa *j*-esima hanno per oggetto punti $y_j(s_r^t) = (y_{j,h,s_r^b,s_r^c}(s_r^t))_{h\in H;s_r^b,s_r^c\in CS(s_r^t)} \in \mathbb{R}^K\times(CS(s_r^t))^2$, con $\sum_{s_r^b\in CS(s_r^t)}(y_{j,h,s_r^b,s_r^c}(s_r^t))_{h\in H;s_r^c\in CS(s_r^t)} \in Y_j(s_r^t)$, ove $Y_j(s_r^t) \subset \mathbb{R}^K\times CS(s_r^t)$ è l'insieme di produzione dell'impresa *j*-esima nel tempo-evento s_r^t. I prezzi dei beni sono rappresentati, in ogni $s_r^t \in CS$, dal punto $p(s_r^t) = (p_{h,s_r^b,s_r^c}(s_r^t))_{h\in H;s_r^b,s_r^c\in CS(s_r^t)} \in \mathbb{R}_+^K\times(CS(s_r^t))^2$, con il prezzo del numerario pari a 1 se il pagamento è previsto per lo stesso tempo-evento della consegna, cioè, con $p_{1,s_r^b,s_r^c}(s_r^t) = 1$ se $s_r^b = s_r^c$. I prezzi delle imprese sono rappresentati, per ogni $s_r^t \in CS$ e $j = 1,\ldots, m$, dai punti $q_j(s_r^t) = (q_{j,s_r^b,s_r^c}(s_r^t))_{s_r^b,s_r^c\in CS(s_r^t)} \in (CS(s_r^t))^2$. Definendo il ramo degli eventi antecedenti s_r^t (cioè, il ramo che connette s_1^0 con s_r^t nell'albero degli eventi) e indicando i suoi nodi (s_r^t escluso) con $CA(s_r^t)$, la dotazione di beni dell'individuo *i*-esimo per i tempi-eventi $s_r^c \in CS(s_r^t)$, che è il risultato di scambi eseguiti nel passato, è rappresentata nel tempo-evento s_r^t dal punto $\omega_i(s_r^t)$ = $(\omega_{i,h,s_r^c}(s_r^t))_{h\in H;s_r^c\in CS(s_r^t)}$, con $\omega_{i,h,s_r^c}(s_r^t) = \omega_{i,h,s_r^c} + \sum_{s_r^a\in CA(s_r^t);s_r^b\in CS} z_{i,h,s_r^b,s_r^c}(s_r^a)$ per i beni con indice $h = 2,\ldots, H$ e $\omega_{i,1,s_r^c}(s_r^t) = \omega_{i,1,s_r^c} + \sum_{s_r^a\in CA(s_r^t);s_r^b\in CS} z_{i,1,s_r^b,s_r^c}(s_r^a) - \sum_{h\in H;s_r^a\in CA(s_r^t);s_r^{c'}\in CS} p_{h,s_r^c,s_r^{c'}}(s_r^a)z_{i,h,s_r^c,s_r^{c'}}(s_r^a) - \sum_{j\in J;s_r^a\in CA(s_r^t);s_r^{c'}\in CS} q_{j,s_r^c,s_r^{c'}}(s_r^a)\zeta_{i,j,s_r^c,s_r^{c'}}(s_r^a)$ per il bene numerario, ove ω_{i,h,s_r^c} è la dotazione naturale disponibile in s_r^c di bene *h*-esimo, quella, cioè, che ci sarebbe stata anche in assenza di compravendite da parte del consumatore *i*-esimo nei tempi precedenti, e $z_{i,h,s_r^b,s_r^c}(s_r^a)$ è una compravendita compiuta nei tempi-eventi precedenti per consegna in un tempo-evento $s_r^c \in CS(s_r^t)$, mentre per il numerario (il bene con indice 1) occorre tenere conto anche dei pagamenti dovuti a compravendite compiute in tempi-eventi precedenti e in scadenza nei tempi-eventi $s_r^c \in CS(s_r^t)$ (mentre $s_r^{c'}$ è il tempo-evento di consegna del bene o della quota di impresa). Analogamente, indicando con $s_{r*}^{t-1} \in CA(s_r^t)$ il tempo-evento che precede immediatamente s_r^t, la dotazione di quote di imprese del consumatore *i*-esimo per i tempi-eventi $s_r^c \in CS(s_r^t)$ è rappresentata nel tempo-evento s_r^t dai punti $\theta_{i,j}(s_r^t) = \zeta_{i,j}(s_r^t)$ + $(\theta_{i,j,s_r^c}(s_r^t))_{s_r^c\in CS(s_r^t)}$, ove $\theta_{i,j,s_r^c}(s_r^t) = \theta_{i,j,s_r^c}(s_{r*}^{t-1}) + \sum_{s_r^a\in CA(s_r^t);s_r^b\in CS} \zeta_{i,j,s_r^b,s_r^c}(s_r^a)$, con $\theta_{i,j,s_r^c}(s_1^0) = \theta_{i,j,s_r^c}$, che è la dotazione in assenza di compravendite, e $\theta_{i,j,s_r^c}(s_r^t) \in [0,1]$, con $\sum_{i=1}^n \theta_{i,j,s_r^c}(s_r^t) = 1$, per ogni $j = 1,\ldots, m$, $s_r^c \in CS(s_r^t)$ e $s_r^t \in CS$. Il piano di consumo intertemporale in s_r^t per i tempi-eventi del sottoalbero $CS(s_r^t)$ è, per il consumatore *i*-esimo, il punto $\omega_i(s_r^t) + \sum_{s_r^b\in CS(s_r^t)} z_i(s_r^t) = x_i(s_r^t) \in X_i(s_r^t) \subset \mathbb{R}^K\times CS(s_r^t)$. L'insieme di bilancio è, con i simboli introdotti, $B_i(p(s_r^t), (\pi_j^*(s_r^t))_{j=1}^m)$ =

$\{ z_i(s_r^t) \in \mathbb{R}^K \times (CS(s_r^t))^2 \; : \; \omega_i(s_r^t) + \sum_{s_r^b \in CS(s_r^t)} z_i(s_r^t) = x_i(s_r^t) \in X_i(s_r^t)$ e $p(s_r^t)\, z_i(s_r^t) + \sum_{j=1}^m q_j(s_r^t)\zeta_{i,j}(s_r^t) \le \sum_{j=1}^m \theta_{i,j}(s_r^t)\, \pi_j^*(s_r^t)\}$ ove $\pi_j^*(s_r^t)$ è il flusso di profitti dell'impresa j-esima di pertinenza del tempo-evento s_r^t. La scelta dell'impresa j-esima nel tempo-evento s_r^t è rappresentata dalla funzione di offerta $s_j(p(s_r^t))$ che è la soluzione del problema $\max_{y_j(s_r^t)} \sum_{s_r^b \in CS(s_r^t)} \pi_j(s_r^t)\, p_{1,s_r^b,s_r^t}(s_r^t)$ sotto il vincolo $\sum_{s_r^b \in CS(s_r^t)} (y_{j,h,s_r^b,s_r^c}(s_r^t))_{h \in H; s_r^c \in CS(s_r^t)} \in Y_j(s_r^t)$ ove $\pi_j(s_r^t) = (\sum_{h \in H; s_r^c \in CS(s_r^t)} p_{h,s_r^b,s_r^c}(s_r^t) y_{j,h,s_r^b,s_r^c}(s_r^t))_{s_r^b \in CS(s_r^t)}$ è il flusso di profitti derivanti dalla scelta in s_r^t, di cui l'impresa massimizza il valore attuale ottenuto tenendo conto del prezzo del numerario con consegna differita. Conseguentemente, $\pi_j^*(s_r^t) = (\sum_{h \in H; s_r^c \in CS(s_r^t)} p_{h,s_r^b,s_r^c}(s_r^t) y_{j,h,s_r^b,s_r^c}{}^*(s_r^t))_{s_r^b \in CS(s_r^t)}$ ove $y_j^*(s_r^t) \in s_j(p(s_r^t))$. La scelta del consumatore i-esimo nel tempo-evento s_r^t è rappresentata dalla funzione di eccesso di domanda $e_i(p(s_r^t)) = \{ z_i(s_r^t) \in B_i(p(s_r^t), (\pi_j^*(s_r^t))_{j=1}^m): \; x_i(s_r^t) \succsim_i^{s_r^t} x_i'(s_r^t)$, ove $x_i(s_r^t) = \omega_i(s_r^t) + \sum_{s_r^b \in CS(s_r^t)} z_i(s_r^t)$ e $x_i'(s_r^t) = \omega_i(s_r^t) + \sum_{s_r^b \in CS(s_r^t)} z_i'(s_r^t)$, per ogni $z_i'(s_r^t) \in B_i(p(s_r^t), (\pi_j^*(s_r^t))_{j=1}^m)\}$. La successione di equilibri concorrenziali temporanei $((z_i^*(s_r^t))_{i=1}^n, (y_j^*(s_r^t))_{j=1}^m, p^*(s_r^t))_{s_r^t \in CS}$ è definita, per ogni $s_r^t \in CS$, dalle condizioni $z_i^*(s_r^t) \in e_i(p^*(s_r^t))$ per ogni $i = 1,\ldots, n$, $y_j^* \in s_j(p^*(s_r^t))$ per ogni $j = 1,\ldots, m$, $\sum_{i=1}^n z_i^*(s_r^t) \le \sum_{j=1}^m y_j^*(s_r^t)$ e $\sum_{i=1}^n \zeta_{i,j}(s_r^t) = 0$ per ogni $j = 1,\ldots, m$.

Prendendo in considerazione l'equilibrio temporaneo nel tempo-evento s_1^0 e confrontandolo con quello intertemporale (assumendo che sia $X_i(s_1^0) = X_i$, $Y_j(s_1^0) = Y_j$, $\sum_{s_r^c \in CS} \omega_{i,h,s_r^c} = \omega_i$ e $\sum_{s_r^c \in CS} \theta_{i,j,s_r^c} = \theta_{i,j}$ per ogni $i = 1,\ldots, n$ e $j = 1,\ldots, m$), si nota come possano essere scelti nel primo consumi e produzioni per ogni tempo-evento dell'albero CS, così come nel secondo. La differenza consiste soltanto nella presenza di una maggiore possibilità di scambi, dovuta sostanzialmente alla possibilità di eseguire pagamenti in tempi-eventi futuri (mentre nell'economia intertemporale devono essere compiuti nel tempo iniziale) ed alla possibilità di rinviare le compravendite, con la riapertura dei mercati nei successivi equilibri temporanei. Questa differenza può determinare una successione di consumi e produzioni diversa nelle due situazioni, cioè, tra quella risultante dall'equilibrio intertemporale e quella risultante dalla successione degli equilibri temporanei. Ad esempio, se nell'economia sequenziale le aspettative sui prezzi che si determineranno in futuro non coincidono tra i diversi consumatori, questi possono mettere in atto operazioni speculative (chi si attende per un certo bene un prezzo alto compra sul mercato a termine del bene con l'intenzione di vendere in futuro quel bene sul mercato a pronti e di trarne, in tal modo, un profitto, viceversa chi si attende un prezzo basso), che si risolvono in un trasferimento di ricchezza tra i consumatori, con una conseguente alterazione delle successione dei loro consumi, mentre nell'economia intertemporale queste speculazioni sono impossibili. Inoltre, anche se tutti i consumatori hanno le stesse aspettative, ma queste si rivelano sbagliate (ad esempio, ciascuno conosce le sue preferenze ma non quelle degli altri, per cui nessuno è in grado di formulare un modello corretto), i consumatori sono costretti a rivedere i loro piani di consumo e la successione dei consumi effettivi non è, in generale, uguale a quella in assenza di errore.

Da quanto precede si desume che la coincidenza tra le successioni di consumi e produzioni nei due tipi di equilibrio richiede che nell'equilibrio temporaneo le aspettative degli agenti coincidano e siano corrette, cioè, che vi sia in ogni tempo-evento previsione perfetta dei prezzi che si determineranno nei tempi-eventi successivi. Occorrono, naturalmente, anche altre condizioni, tra cui la coerenza temporale delle preferenze (introdotta all'inizio del Capitolo 6 e nel Paragrafo 7.9). Con questa premessa, è possibile introdurre la proposizione seguente, che riguarda l'economia intertemporale $\mathcal{E} = (\langle X_i, \succsim_i \rangle, Y_j, \omega_i, \theta_{i,j}, i = 1,\ldots, n, j = 1,\ldots, m)$ e l'economia sequenziale $\mathcal{E}(s_r^t) = (\langle X_i(s_r^t), \succsim_i^{s_r^t} \rangle, Y_j(s_r^t), \omega_i(s_r^t), \theta_{i,j}(s_r^t), i = 1,\ldots, n, j = 1,\ldots, m)$, con $s_r^t \in CS$.

Proposizione 12.21 Si ottengono gli stessi consumi e produzioni con la successione di equilibri concorrenziali temporanei e con l'equilibrio concorrenziale intertemporale, entrambi con mercati completi, se:

a) per ciascuna impresa, ogni produzione consentita dall'insieme intertemporale di produzione è consentita anche dalla successione degli insiemi temporanei di produzione e viceversa, cioè, $Y_j = \sum_{s_r^t \in CS} Y_j(s_r^t)$ per ogni $j = 1,\ldots, m$;

b) per ciascun consumatore, $X_i = \sum_{s_r^t \in CS} X_i(s_r^t)$, le preferenze dell'economia sequenziale sono coerenti temporalmente e i sistemi di preferenza $(\langle X_i(s_r^t), \succsim_i^{s_r^t} \rangle)_{s_r^t \in CS}$ e $\langle X_i, \succsim_i \rangle$ indicano la stessa relazione di preferenza per ogni coppia $x_i, x_i' \in X_i$;

c) le dotazioni naturali (cioè, non generate da scambi) di beni e di quote coincidono con quelle dell'economia intertemporale, cioè, $\omega_i = (\omega_{i,h,s_r^c})_{h\in H, s_r^c \in CS}$ e $\theta_{i,j} = (\theta_{i,j,s_r^c})_{s_r^c \in CS}$ per ogni $i = 1,\ldots, n$ e $j = 1,\ldots, m$;

d) le aspettative di tutti gli agenti su tutti i prezzi denotano previsione perfetta.

Dimostrazione. Non viene qui data una dimostrazione formale della proposizione, che è peraltro intuitiva. Infatti, da un lato, la presenza di previsioni perfette sui prezzi (e la coscienza di possedere previsioni perfette) determinano una serie di condizioni di arbitraggio sui prezzi che rendono equivalenti i prezzi dell'economia intertemporale con quelli della successione di equilibri temporanei. Dall'altro lato, tenendo conto che le due economie (quella intertemporale e quella sequenziale) sono dotate di insiemi di produzione, insiemi di consumo, preferenze e dotazioni del tutto equivalenti e che non c'è successione di consumi o di produzione consentita dall'economia sequenziale che sia esclusa da quella intertemporale, e viceversa, risultano necessariamente coincidenti, nel confronto tra le due economie, i piani di produzione e di consumo scelti dagli agenti in corrispondenza ai prezzi. Conseguentemente, gli equilibri concorrenziali delle due economie sono rappresentati da due sistemi equivalenti di prezzi e da uguali consumi e produzioni. □

La Proposizione 12.21 ha implicazioni interessanti per quanto riguarda la numerosità dei prezzi. Infatti, nell'economia sequenziale di puro scambio con previsione perfetta, è sufficiente, per pervenire alla successione di consumi e di produzioni di equilibrio, che si formino in ogni equilibrio temporaneo prezzi a pronti per tutti i beni e prezzi per consegna differita di numerario (obbligazioni Arrow-Debreu) per ogni tempo-evento immediatamente successivo a quello in esame, cioè, in ogni $s_r^t \in CS$, i prezzi $p_{h,s_r^t,s_r^t}(s_r^t)$ per ogni $h = 2,\ldots, H$ e $p_{1,s_r^t,s_r^{t+1}}(s_r^t)$ per ogni $s_r^{t+1} \in CS(s_r^t)$. Un numero di prezzi questo, che, pur elevato, è di molto inferiore a quello necessario per l'economia intertemporale equivalente (che richiede prezzi per tutti i beni per consegna in ogni $s_r^t \in CS$. Per l'economia di produzione la situazione è analoga (si noti come non sia necessario vi siano mercati per le quote di proprietà delle imprese), con una avvertenza. Se le produzioni $y_j(s_r^t)$ includono beni (input e output) disponibili anche in tempi-eventi futuri, oltre quelli immediatamente successivi il tempo-evento s_r^t in esame, come finora ipotizzato, allora occorre considerare anche i prezzi delle obbligazioni Arrow-Debreu per tutti questi tempi-eventi. Se, invece, si introducono nella lista dei beni anche i semilavorati (sostanzialmente, impegni a successivi impieghi di input e produzioni di output), allora possono essere limitate le obbligazioni Arrow-Debreu ai soli tempi-eventi immediatamente successivi a quello in esame, ma si deve accrescere il numero dei beni.

Tuttavia, l'ipotesi che vi sia perfetta previsione e che non insorgano novità (nuove tecnologie, nuovi beni, cambiamenti nel numero e nelle preferenze dei consumatori) rende la descrizione offerta dall'economia sequenziale suindicata, così come quella offerta dall'economia intertemporale, poco rappresentativa della realtà. Un approccio che introduce il susseguirsi dei consumatori (della loro nascita e morte), peraltro interpretabile con la chiave dell'equilibrio intertemporale, è presentato nel paragrafo seguente.

12.8 Modelli a generazioni sovrapposte

12.9 Economie con mercati incompleti

12.10 L'economia di pianificazione centralizzata

12.11 L'aggregazione tra beni. Introduzione alla macroeconomia

12.12 L'evoluzione dell'analisi dell'equilibrio generale