

Cap. 3 LA SCELTA DI CONSUMO I

Si prenda in considerazione l'acquisto di beni di consumo sul mercato. Un bene è normalmente definito dalle sue caratteristiche qualitative, fra le quali vi sono il luogo e il tempo in cui il bene è disponibile e lo stato di natura (quest'ultimo aspetto è rilevante solo per la scelta in condizioni di incertezza, che rendono, ad esempio, un ombrello se piove cosa diversa dallo stesso ombrello se non piove). Non è, invece, rilevante, tranne che in alcune particolari analisi, la differenza tra beni e servizi: saranno entrambi indicati col nome di beni. (Se occorre distinguere fra beni e servizi, generalmente un bene è una cosa, un servizio il suo uso, per cui, ad esempio, un consumatore compra un bene quando acquista un appartamento, compra un servizio quando lo fitta). Nel seguito si assume che le quantità di beni siano rappresentabili con numeri reali (non è necessariamente questa l'unica rappresentazione possibile: un appezzamento di terra in una data località può essere rappresentato dalla sua misura in ettari, che è un numero reale, oppure dalla mappa che lo descrive, che non è un numero reale ma un insieme nello spazio euclideo a due dimensioni). Inoltre, quando non espressamente escluso, viene ipotizzato che i beni siano perfettamente divisibili, cioè che ogni numero reale non negativo rappresenti una quantità di bene (il caso contrario è quello dei beni indivisibili, come le automobili, le cui quantità sono descritte soltanto da numeri interi).

3.1 L'insieme delle azioni possibili del consumatore

Il consumatore può, allora, acquistare un paniere di beni di consumo, che è rappresentato da un vettore non negativo x nello spazio euclideo a k dimensioni, ove k è il numero di beni presenti nell'economia in esame. Perciò l'elemento h -esimo di x rappresenta la quantità di bene h -esimo presente nel paniere x . Sia $X \subseteq \mathbb{R}^k$ l'insieme dei panieri di beni possibili, o *insieme di consumo*: normalmente, nella teoria della scelta di consumo, si assume che X coincida con l'ortante non negativo dello spazio euclideo, cioè $X = \mathbb{R}_+^k = \{x \in \mathbb{R}^k: x_h \geq 0 \text{ per } h = 1, \dots, k\}$.

Ipotesi sull'insieme di consumo. Le ipotesi sull'insieme di consumo X più consuete, soddisfatte se $X = \mathbb{R}_+^k$, richiedono che X sia convesso (cioè, se $x, x' \in X$ e $\lambda \in [0, 1]$, allora $x'' \in X$, ove $x'' = \lambda x + (1-\lambda)x'$), chiuso (cioè, se la successione $\{x^s\}_{s=1}^\infty$ è contenuta in X e $x = \lim_{s \rightarrow \infty} x^s$, allora $x \in X$) e limitato inferiormente (cioè, esiste un $\bar{x} \in \mathbb{R}^k$ per cui $x \geq \bar{x}$ per ogni $x \in X$). Talvolta si richiede anche che X sia limitato, cioè che esista una coppia di punti $\bar{x}_m, \bar{x}_M \in \mathbb{R}^k$ tale che $\bar{x}_m \leq x \leq \bar{x}_M$ per ogni $x \in X$ (condizione, questa, non soddisfatta se $X = \mathbb{R}_+^k$).

L'insieme V dei panieri di beni fra cui il consumatore può scegliere, cioè l'insieme dei consumi consentiti all'agente in esame, è un sottoinsieme di X determinato dai vincoli cui il consumatore è soggetto nella sua scelta. Occorre, allora, descrivere questi vincoli prima di determinare la scelta.

Nel seguito si assume che il consumatore non abbia potere di mercato: egli può decidere quanto acquistare dei diversi beni, senza però avere alcun controllo sulle condizioni dello scambio. Queste possono essere di diverso tipo: riguardare, ad un estremo, l'entità stessa dello scambio o soltanto, all'altro estremo, i rapporti di scambio. Il *rapporto di scambio* tra due beni indica quante unità di un bene possono essere scambiate contro un'unità dell'altro bene: ad esempio, se il rapporto di scambio tra benzina (misurata in litri) e grano (misurato in chilogrammi) è pari a 0,5 litri per kg, allora mezzo litro di benzina equivale sul mercato ad un chilogrammo di grano, o anche 2 kg di grano equivalgono ad un litro di benzina. Normalmente (ed è così ipotizzato sempre nel seguito, se non è esplicitamente indicato il contrario), i rapporti di scambio sono per il consumatore costanti qualunque siano le quantità che egli decida di scambiare.

Con k beni, vi sono $\binom{k}{2} = k(k-1)/2$ rapporti di scambio tra coppie di beni. Tuttavia, escludendo la possibilità di arbitraggi (come ipotizzato per il mercato concorrenziale), cioè, la possibilità di trarre un guadagno certo sfruttando la differenza tra i rapporti di scambio composti tra due beni, vi sono soltanto $k-1$ rapporti di scambio indipendenti, ossia, è sufficiente che siano noti $k-1$ rapporti di scambio (ad esempio, presi $k-1$ beni, i rapporti di scambio tra ciascuno di questi beni e il k -esimo) per determinarli tutti. (Vi sarebbe possibilità di arbitraggio se il rapporto di scambio r_{hk} tra il bene h -esimo e il bene k -esimo fosse diverso dal prodotto tra i rapporti di scambio r_{hj} e r_{jk} . Infatti, se fosse, ad esempio, $r_{hk} > r_{hj} r_{jk}$, si potrebbe vendere una qualsiasi quantità di bene k -esimo in cambio di r_{hk} unità di bene h -esimo per ogni unità venduta, ed acquistare la stessa quantità del bene k -esimo in cambio di r_{jk} unità di bene j -esimo per ogni unità di bene k -esimo acquistata ricomprando questa quantità di bene j -esimo in cambio di bene h -esimo al rapporto di scambio r_{hj} , finendo così per ottenere un guadagno netto di $r_{hk} - r_{hj} r_{jk}$ di bene h -esimo per ogni unità di bene k -esimo scambiata. Ne consegue, in assenza di possibilità di arbitraggio, che i rapporti di scambio non sono indipendenti, dovendo intercorrere fra loro le

uguaglianze $r_{hk} = r_{hj} r_{jk}$). In tal caso, anziché prendere in considerazione i rapporti di scambio, è più conveniente introdurre i *prezzi*, che sono rapporti di scambio rispetto ad una *unità di conto*, che può essere un bene, un paniere di beni, la moneta, o anche una entità arbitraria inesistente. Ossia, il prezzo di un bene indica quante unità di conto equivalgono ad una unità del bene in considerazione. E' facile verificare che il rapporto tra i prezzi di due beni p_h/p_j è il loro rapporto di scambio r_{jh} (tra il bene j -esimo e il bene h -esimo), qualunque sia l'unità di conto in cui i prezzi sono espressi (purché sia la stessa per i due beni). Se l'unità di conto è la moneta (come spessissimo nel mondo reale) si hanno i prezzi monetari.

L'introduzione dei prezzi al posto dei rapporti di scambio non sempre fornisce un'informazione completa sui rapporti di scambio. Vi siano, ad esempio, 4 beni e i rapporti di scambio seguenti: $r_{21} = p_1/p_2 = 0$, $r_{13} = p_3/p_1 = \alpha$, $r_{23} = p_3/p_2 = 0$, $r_{24} = p_4/p_2 = \beta$, $r_{41} = p_1/p_4 = 0$ e $r_{43} = p_3/p_4 = 0$, con $\alpha, \beta > 0$, che sono tra loro coerenti (nel senso che non consentono arbitraggi poiché $p_h/p_j \cdot p_j/p_i = p_h/p_i$ per ogni $h, j, i = 1, \dots, k$). Ora, non esistono prezzi che determinino questi rapporti di scambio: ad esempio, i prezzi $p_1 = 1$, $p_2 = \infty$, $p_3 = \alpha$ e $p_4 = \infty$ non generano il rapporto di scambio $r_{24} = p_4/p_2 = \beta$ (pur non essendo incompatibili con questo) e i prezzi $p_1 = 0$, $p_2 = 1$, $p_3 = 0$ e $p_4 = \beta$ non generano il rapporto di scambio $r_{13} = p_3/p_1 = \alpha$. Questa situazione si determina quando vi sono almeno due prezzi uguali a zero o due prezzi uguali ad infinito, per cui i loro rapporti sono indeterminati. Tuttavia, se la capacità di spesa m è un numero positivo finito, il vincolo di bilancio, che sarà introdotto tra poco, risulta pur sempre ben definito (anche se è un insieme illimitato quando uno o più prezzi sono nulli) e non sorgono eccessivi problemi nel determinare la scelta di consumo.

L'insieme $V \subseteq X$ delle azioni possibili per il consumatore risulta determinato considerando i vincoli cui egli è soggetto nello scambio, che possono essere di varia natura, a seconda delle condizioni di mercato. Il caso tipico è quello in cui vi è soltanto il vincolo implicato dai prezzi dei beni. Siano $m \geq 0$ la capacità di spesa del consumatore (espressa nella stessa unità di conto in cui sono espressi i prezzi) e $p > 0$ il vettore (semipositivo) dei prezzi dei k beni. L'insieme dei panieri dei beni fra cui il consumatore può scegliere è, allora, l'*insieme di bilancio*

$$V = B(p, m) = \{x \in X : p \cdot x \leq m\}$$

(ove il prodotto $p \cdot x$ significa $\sum_{h=1}^k p_h x_h$), che è l'insieme dei panieri di beni comprabili con la capacità di spesa m del consumatore.¹ L'insieme di bilancio indicato presume che il consumatore possa non impiegare tutta la

¹ La notazione seguita per indicare disuguaglianze tra vettori indica con $p \geq 0$ un vettore non negativo (cioè, $p \in \mathbb{R}_+^k$, ossia, $p_h \geq 0$ per ogni $h = 1, \dots, k$), con $p > 0$ un vettore semipositivo (cioè, non negativo e non nullo) e con $p \gg 0$, oppure $p \in \mathbb{R}_{++}^k$, un vettore positivo (cioè, con $p_h > 0$ per ogni $h = 1, \dots, k$). Se $k = 1$, ossia per gli scalari, non c'è differenza tra semipositività e positività. Nel seguito, quando si indica per i prezzi $p \in \mathbb{R}_+^k$, si intende sempre $p > 0$ (si esclude, cioè, sempre per i prezzi l'eventualità $p = 0$).

Il prodotto $p \cdot x$ può essere indicato, secondo la simbologia del calcolo matriciale, come $p^T x$, ove l'apice ^T segnala che si tratta di un vettore riga (che è il trasposto del vettore colonna). Qui e nel seguito, in assenza di ambiguità, viene preferita, per il prodotto scalare di due vettori, la più semplice scrittura senza apice.

capacità di spesa m di cui dispone, possa cioè liberarsi di essa (ad esempio, se essa è rappresentata da banconote, il consumatore può, se vuole, bruciarne una parte, o anche tutte). Se, invece, questa possibilità è esclusa, allora l'insieme di bilancio si restringe all'insieme

$$V = \bar{B}(p, m) = \{x \in X : p \cdot x = m\}$$

L'insieme $B(p, m)$ è rappresentato, se vi sono soltanto due beni, nella Figura 3.1: è il triangolo fra gli assi (su cui sono riportate le quantità x_1, x_2 dei due beni) e la retta di equazione $p \cdot x = m$, la cui pendenza è pari (in valore assoluto) al rapporto di scambio p_1/p_2 e le cui intercette sugli assi sono rispettivamente pari a m/p_1 e a m/p_2 . In questa figura, l'insieme $\bar{B}(p, m)$ è il segmento che rappresenta il bordo superiore di $B(p, m)$.

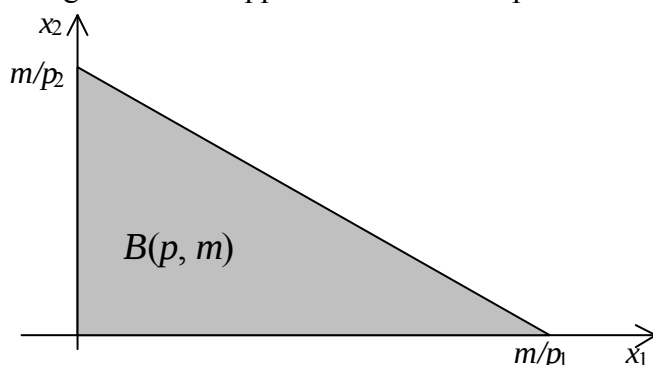


Figura 3.1

Se vi sono altri vincoli per il consumatore oltre il vincolo di bilancio, allora l'insieme V dei panieri di beni acquistabili si presenta diversamente. Sempre con riferimento al caso con due soli beni, se vi è un vincolo di razionamento, per cui, ad esempio, $x_1 \leq \bar{x}_1$, allora si ha un insieme del tipo rappresentato nella Figura 3.2. Se i prezzi non sono costanti, ad esempio se per il primo bene è richiesta una spesa fissa m_1 per accedere all'acquisto, oltre al prezzo p_1 proporzionale alla quantità acquistata, allora l'insieme V è del tipo rappresentato nella Figura 3.3.

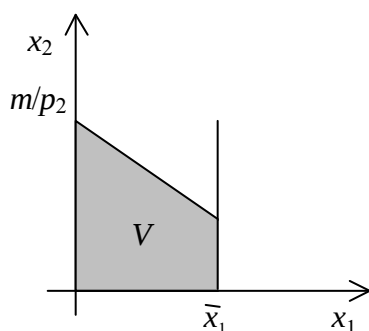


Figura 3.2

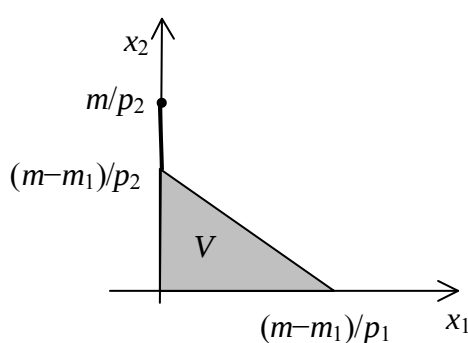


Figura 3.3

In molti ragionamenti sviluppati nel seguito viene richiesto che l'insieme V dei panieri acquistabili dal consumatore sia convesso. Sono, ad

esempio, convessi gli insiemi $B(p, m)$ e $\bar{B}(p, m)$ ed anche l'insieme rappresentato nella Figura 3.2, ma non quello rappresentato nella Figura 3.3.

Nel seguito, in assenza di una specifica indicazione contraria, viene analizzato il caso in cui l'insieme delle azioni possibili del consumatore coincida con l'insieme di bilancio $B(p, m)$, che è convesso (se X è convesso), come appena indicato. Un'altra condizione utile su $B(p, m)$ riguarda la continuità della corrispondenza $B: \mathbb{R}_+^{k+1} \rightarrow X$ che questo vincolo introduce fra le coppie costituite dai prezzi e dalla capacità di spesa (p, m) e gli insiemi $B(p, m) \subseteq X$.

Proposizione 3.1 Se $p > 0$ e $m > \min_{x \in X} px$, con X compatto (cioè, chiuso e limitato) e convesso, allora la corrispondenza $B: \mathbb{R}_+^{k+1} \rightarrow X$ è continua.² (La dimostrazione è omessa: si trova in Debreu, 1959, pp. 62-65).

3.2 Il sistema di preferenza del consumatore e la sua rappresentazione geometrica

Nel Capitolo 2 si è visto come la teoria della scelta richieda, per ipotesi o per deduzione, un sistema di preferenza, che, nel problema in esame, ha per oggetto l'insieme di consumo X , o un suo sottoinsieme. Molte proprietà rilevanti della scelta di consumo dipendono da proprietà del sistema di preferenza, che è opportuno mettere in evidenza indicandole come ipotesi. In questo modo, sarà possibile associare alle diverse ipotesi, assunte di volta in volta, le proprietà della scelta che da esse conseguono. Le ipotesi più frequentemente richieste al sistema di preferenza $\langle X, \succeq \rangle$ possono essere raggruppate nel modo seguente.

Ipotesi di regolarità (o razionalità) del sistema di preferenza $\langle X, \succeq \rangle$. Richiede le due condizioni seguenti (già indicate nel Capitolo 2):

- a) *completezza*: se $x, x' \in X$, allora $x \succeq x'$ e/o $x' \succeq x$;
- b) *transitività*: se $x, x', x'' \in X$ con $x \succeq x'$ e $x' \succeq x''$, allora $x \succeq x''$.

Ipotesi di continuità del sistema di preferenza $\langle X, \succeq \rangle$. Questa ipotesi richiede che la relazione di preferenza non vari di colpo passando da una coppia di panieri di beni ad una coppia vicina, ma con una certa gradualità. Più precisamente, la continuità delle preferenze richiede, per ogni $x \in X$, che non si possa passare, seguendo un percorso continuo, da un paniere di beni x' preferito, cioè con $x' \succ x$, ad un paniere x'' peggiore, cioè con $x'' \prec x$, senza incontrare, nel passaggio da x' a x'' , un paniere x'''

² La definizione esatta di continuità per una corrispondenza non è banale (si trova nella nota 10 di questo capitolo). Richiede, intuitivamente, che piccole variazioni di p e m alterino poco l'insieme B .

indifferente; richiede, in altri termini, che vi sia almeno un punto x''' con $x''' \sim x$ in ogni linea continua passante per x' e x'' e contenuta in X . Una definizione equivalente di continuità richiede, per ogni successione di coppie $\{(x^s, x'^s)\}_{s=1}^{\infty}$ con $x'^s \succ x^s$ per ogni s , che, se si ha $x' = \lim_{s \rightarrow \infty} x'^s$ e $x = \lim_{s \rightarrow \infty} x^s$, si abbia anche $x' \succeq x$. Questa condizione può essere meglio rappresentata richiedendo, per ogni $x \in X$, che l'insieme dei panieri almeno altrettanto buoni di x e quello dei panieri non preferiti a x siano insiemi chiusi, ossia siano chiusi gli insiemi

$$R(x) = \{x' \in X : x' \succeq x\} \quad \text{e} \quad Q(x) = \{x' \in X : x' \preceq x\} \quad \text{per ogni } x \in X$$

Un sistema di preferenza regolare e continuo può essere rappresentato geometricamente, se vi sono soltanto due beni, per mezzo di insiemi di indifferenza. Ogni *insieme di indifferenza* è un insieme in $\mathbb{R}^2$ di panieri di beni tra loro indifferenti. Questo insieme, se è sottile, è una *curva*. Nella Figura 3.4 è disegnata una curva di indifferenza di un sistema di preferenza monotono e convesso (proprietà queste definite tra poco).

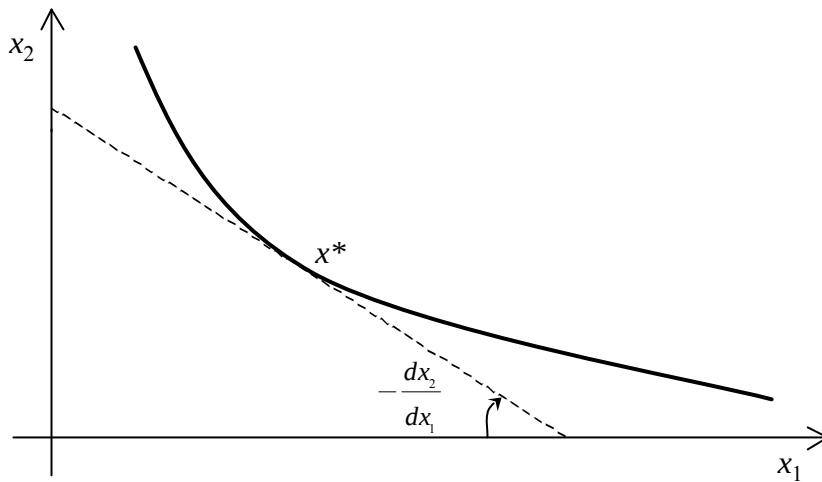


Figura 3.4

La pendenza della curva di indifferenza in un punto definisce il *saggio marginale di sostituzione*: indicando con $x_2 = x_2(x_1)$ la funzione che rappresenta la curva di indifferenza passante per $x^* = (x_1^*, x_2^*)$, il saggio marginale di sostituzione è $MRS(x^*) = -\frac{dx_2(x_1^*)}{dx_1}$. Esso è il limite del

rapporto (in valore assoluto) tra le variazioni delle quantità dei beni che determinano panieri indifferenti al paniere x^* al tendere, sulla curva di indifferenza, di x a x^* .

La *mappa delle curve di indifferenza* è l'insieme delle curve di indifferenza ed è una rappresentazione del sistema di preferenza. Per ogni punto passa una ed una sola curva di indifferenza e i punti sulle curve di

indifferenza più elevate sono preferiti (se il sistema di preferenza è monotono). Naturalmente, vengono disegnate, come nella Figura 3.5, soltanto alcune curve di indifferenza, le altre possono essere immaginate.

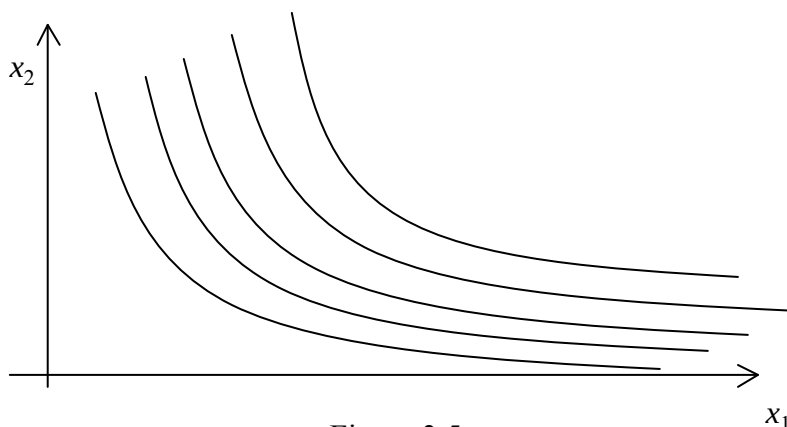


Figura 3.5

I saggi marginali di sostituzione sono definiti anche nel caso in cui vi sono più di due beni: in tal caso, la curva di indifferenza è esprimibile con una funzione implicita $u(x_1, x_2, \dots, x_k) = \bar{u}$ e vi sono, in ogni punto di X , $k-1$ saggi marginali di sostituzione indipendenti $-\left(\frac{\partial x_h}{\partial x_1}\right)_{u(x)=\bar{u}}$, per $h = 2, \dots, k$, che descrivono le pendenze della curva di indifferenza in quel punto. (Si continua a parlare di curva di indifferenza anche quando $k > 2$, sebbene questa sia in realtà una superficie se $k = 3$, uno spazio se $k = 4$, ecc.).

Ipotesi di monotonicità del sistema di preferenza $\langle X, \succsim \rangle$. Questa ipotesi richiede, sostanzialmente, che siano preferiti i panieri più ricchi (cioè, contenenti quantità maggiori) di beni. Sono possibili diverse definizioni di monotonicità. Qui ne vengono indicate tre, in ordine di forza, cosicché ciascuna di esse implica la precedente:

a) *monotonicità debole*: se $x, x' \in X$ con $x' \geq x$ (cioè, con $x'_h \geq x_h$ per $h = 1, \dots, k$), allora $x' \succsim x$;

b) *monotonicità*: se $x, x' \in X$ con $x' \geq x$ (cioè, con $x'_h \geq x_h$ per $h = 1, \dots, k$), allora $x' \succsim x$, e, se $x' \gg x$ (cioè, con $x'_h > x_h$ per $h = 1, \dots, k$), allora $x' \succ x$ (la condizione “se $x' \gg x$, allora $x' \succ x$ ” implica, se il sistema di preferenza è continuo, la condizione “se $x' \geq x$, allora $x' \succsim x$ ”);

c) *monotonicità forte*: se $x, x' \in X$ con $x' > x$ (cioè, con $x' \geq x$ e $x' \neq x$), allora $x' \succ x$.

E' abbastanza semplice rilevare come le curve di indifferenza di un sistema di preferenza debbano essere decrescenti, se questo è fortemente monotono (e non possano essere crescenti se è debolmente monotono). Una curva di indifferenza può essere crescente se il sistema di preferenza non è monotono. Ciò accade, ad esempio, se un bene è indesiderato, ossia è un "male", come può essere la spazzatura o un inquinante (il consumatore preferisce una quantità minore di esso ad una quantità maggiore, per ogni data quantità dell'altro bene).

La monotonicità debole non esclude la presenza di curve di indifferenza "spesse" (che non sono vere e proprie curve, ma insiemi), del tipo di quella rappresentata nella Figura 3.7. Invece, la monotonicità implica che le curve di indifferenza siano sottili, ma non esclude la presenza di loro tratti orizzontali o verticali (la mappa di indifferenza della Figura 3.9 rappresenta preferenze monotone). Questa presenza è esclusa dalla monotonicità forte (rappresentano preferenze fortemente monotone le curve di indifferenza delle Figure 3.4, 3.5, 3.6, 3.8 e 3.10).

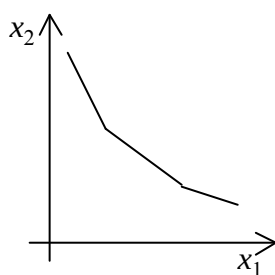


Figura 3.6

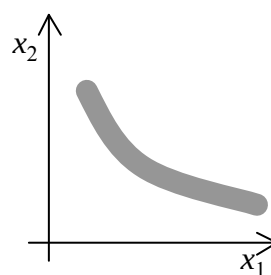


Figura 3.7

L'ipotesi di monotonicità è spesso usata nell'analisi economica per la sua comodità, anche se non è sempre realistica, specialmente con riferimento a panieri molto ricchi di beni (uno può preferire, *ceteris paribus*, due panini ad un panino, e tre panini a due, ma può rimanere atterrito di fronte a un milione di panini), che sono, tuttavia, in molti casi, esclusi dal vincolo di bilancio. Inoltre, l'ipotesi di monotonicità è troppo stringente in relazione ai risultati che si ottengono con essa, cioè, gli stessi risultati possono essere ricavati introducendo un'ipotesi più debole della monotonicità, come è l'ipotesi di non sazietà.

Ipotesi di non sazietà (o saturazione) delle preferenze. Di questa ipotesi vi sono due versioni (con la seconda che implica la prima). Questa ipotesi richiede che non esista un $x \in X$ che sia preferito ad ogni altro paniere di beni in X (definizione a) o nell'intorno di x (definizione b):

a) *non sazietà globale*: per ogni $x \in X$ vi è un $x' \in X$ con $x' \succ x$;

b) *non sazietà locale*: per ogni $x \in X$ e ogni $\varepsilon > 0$ vi è un $x' \in X$ con $\|x' - x\| < \varepsilon$ (ove $\|x' - x\| = (\sum_{h=1}^k (x'_h - x_h)^2)^{1/2}$) e con $x' \succ x$.

Si può rilevare, nel caso in cui $X = \mathbb{R}_+^k$, come l'ipotesi di monotonicità (ma non quella debole) implichi quella di non sazietà locale (mentre preferenze localmente non saziate possono non essere monotone) e come l'ipotesi di non sazietà locale sia sufficiente per escludere la presenza di curve di indifferenza "spesse".

Ipotesi di convessità del sistema di preferenza $\langle X, \succeq \rangle$. Questa ipotesi richiede, sostanzialmente, che panieri intermedi siano preferiti a panieri estremi. Anche di questa ipotesi vi sono versioni più o meno forti, tutte subordinate all'ipotesi che l'insieme X sia convesso. Le tre versioni indicate (Debreu, 1959, pp. 59-61) sono in ordine di forza. Ossia, se il sistema di preferenza è continuo, la convessità del sistema di preferenza implica la sua convessità debole e la convessità stretta implica la convessità:

a) *convessità debole*: se $x, x' \in X$, $x' \succeq x$ e $\lambda \in [0, 1]$,³ allora $x'' \succeq x$, ove $x'' = \lambda x + (1-\lambda)x'$. Questa condizione è equivalente alla convessità dell'insieme $R(x) = \{x' \in X : x' \succeq x\}$ per ogni $x \in X$, cioè, se $x', x'' \in R(x)$ e $\lambda \in [0, 1]$, allora $\lambda x' + (1-\lambda)x'' \in R(x)$, e alla convessità dell'insieme dei panieri preferiti $P(x) = \{x' \in X : x' \succ x\}$ per ogni $x \in X$, cioè, se $x', x'' \in P(x)$ e $\lambda \in [0, 1]$, allora $\lambda x' + (1-\lambda)x'' \in P(x)$;

b) *convessità*: se $x, x' \in X$, $x' \succ x$ e $\lambda \in [0, 1)$, allora $x'' \succ x$, ove $x'' = \lambda x + (1-\lambda)x'$. Questa condizione richiede, se il sistema di preferenza è continuo, non solo che $R(x)$ sia convesso ma anche che l'insieme dei panieri di beni $I(x) = R(x) \cap Q(x)$ indifferenti a x , per ogni $x \in X$ (rispetto a cui esista un $x' \in X$ con $x' \succ x$), non sia spesso, ossia per ogni $x' \in I(x)$ e ogni $\varepsilon > 0$ non sia $x' \sim x''$ per tutti gli $x'' \in X$ con $\|x'' - x'\| < \varepsilon$. Essa implica, se vale la condizione di *non sazietà globale*, anche la condizione di *non sazietà locale* (infatti, poiché non vi è sazietà globale, per ogni $x \in X$ vi è un $x' \in X$ con $x' \succ x$; la condizione di convessità del sistema di preferenza richiede, allora, che sia $x'' \succ x$ per ogni $x'' = \lambda x + (1-\lambda)x'$ con $\lambda \in [0, 1)$; quindi, ciò accade rispetto ad un qualsiasi $\varepsilon > 0$, anche con λ abbastanza alto perché sia $\|x'' - x\| < \varepsilon$, cosicché x non è un punto di sazietà locale);

c) *convessità stretta*: se $x, x' \in X$, $x' \succeq x$, $x' \neq x$ e $\lambda \in (0, 1)$, allora $x'' \succ x$, ove $x'' = \lambda x + (1-\lambda)x'$. Questa condizione richiede $\lambda x' + (1-\lambda)x'' \in P(x)$ se $x', x'' \in R(x)$, $x' \neq x''$ e $\lambda \in (0, 1)$.

La convessità debole non esclude la presenza di curve di indifferenza "spesse", del tipo di quella rappresentata nella Figura 3.7. Le curve di indifferenza sono convesse o strettamente convesse se il sistema di preferenza è convesso o strettamente convesso (sono strettamente convesse le curve di indifferenza rappresentate nelle Figure 3.4, 3.5, 3.10 e 3.11, convesse, ma non strettamente, quelle nelle Figure 3.6, 3.8 e 3.9).

³ Il simbolo $[0, 1]$ indica l'intervallo chiuso sull'asse reale fra 0 e 1, cioè con gli estremi inclusi. Il simbolo $[0, 1)$ esclude l'estremo superiore e quello (0, 1) entrambi gli estremi, per cui risulta essere l'intervallo aperto.

3.3 La funzione di utilità

Si è già visto nel Capitolo 2 come un sistema regolare di preferenza sia rappresentabile con una *funzione ordinale di utilità*. Per definizione, una funzione di utilità $u: X \rightarrow \mathbb{R}$ rappresenta il sistema di preferenza $\langle X, \succeq \rangle$ se e solo se è $x' \succeq x$ per ogni coppia $x, x' \in X$ con $u(x') \geq u(x)$.

Nel Capitolo 2 si è anche visto (Proposizione 2.1) che se esiste una funzione di utilità che rappresenta un sistema di preferenza, allora questo è regolare. E' facile dimostrare che se la funzione di utilità è continua, allora anche il sistema di preferenza $\langle X, \succeq \rangle$ è continuo.

Infatti, da un lato, per ogni $x \in X$, $R(x) = \{x' \in X : x' \succeq x\}$ e $Q(x) = \{x' \in X : x \succeq x'\}$, si ha che $\{x' \in X : u(x') \geq u(x)\} = R(x)$ e $\{x' \in X : u(x) \geq u(x')\} = Q(x)$, e, dall'altro lato, che se la funzione u è continua, allora gli insiemi $\{x' \in X : u(x') \geq u(x)\}$ e $\{x' \in X : u(x) \geq u(x')\}$ sono chiusi per ogni $x \in X$.

Rimane da accertare sotto quali condizioni un sistema di preferenza è rappresentabile con una funzione di utilità. Il teorema seguente (Debreu, 1954 e 1959), di cui viene omessa la dimostrazione, è rilevante al riguardo.

Proposizione 3.2 Se il sistema di preferenza $\langle X, \succeq \rangle$ è regolare e continuo e l'insieme X è connesso⁴, allora $\langle X, \succeq \rangle$ è rappresentabile con una funzione di utilità $u: X \rightarrow \mathbb{R}$, che è, inoltre, continua.

Naturalmente, non è necessaria la continuità di $\langle X, \succeq \rangle$ perché esista una qualsiasi funzione di utilità, anche non continua. Tuttavia, la funzione di utilità è uno strumento conveniente di analisi solo se è continua, per cui il teorema di Debreu indica la condizione analiticamente importante di esistenza della funzione di utilità.

Un sistema di preferenza regolare, non continuo e non rappresentabile con una funzione di utilità è l'*ordinamento lessicografico* (analogo, cioè, a quello usato nei dizionari), ove i panieri di beni sono ordinati secondo una loro caratteristica (nei dizionari, la prima lettera della parola), e, a parità di questa, secondo una seconda caratteristica (nei dizionari, la seconda lettera), ecc. Ad esempio, con due beni, il sistema di preferenza per cui $(x_1', x_2') \succ (x_1, x_2)$ se $x_2' > x_2$ (prima caratteristica) oppure se $x_2' = x_2$ e $x_1' < x_1$ (seconda caratteristica) non è continuo, poiché l'insieme $R(x_1, x_2) = \{(x_1', x_2') \in \mathbb{R}_+^2 : x_2' > x_2 \text{ oppure } x_2' = x_2 \text{ e } x_1' \leq x_1\}$ non è chiuso (infatti, vi sono punti, come $(x_1 + \alpha, x_2)$, con $\alpha > 0$, che non appartengono a $R(x_1, x_2)$ pur essendo sulla sua frontiera), e non è rappresentabile con una funzione di utilità.

⁴ Un insieme $X \subseteq \mathbb{R}^k$ è *connesso* se non è l'unione di due insiemi, non vuoti e chiusi, disgiunti. Se è convesso, allora è anche connesso.

Le ipotesi sul sistema di preferenza $\langle X, \succeq \rangle$ caratterizzano la funzione di utilità che lo rappresenta. Si assuma che $\langle X, \succeq \rangle$ sia regolare e continuo e rappresentato dalla funzione ordinale (e continua) di utilità $u: X \rightarrow \mathbb{R}$.

Se $\langle X, \succeq \rangle$ è monotono, allora la funzione ordinale u è monotona, cioè $x' \geq x$ implica $u(x') \geq u(x)$ e $x' \gg x$ implica $u(x') > u(x)$. Se $\langle X, \succeq \rangle$ è fortemente monotono, u è fortemente monotona, cioè $x' > x$ implica $u(x') > u(x)$. (La condizione che richiede la funzione ordinale u monotona significa non solo che esiste una funzione con questa proprietà, ma anche che hanno questa proprietà tutte le funzioni di utilità che rappresentano il sistema di preferenza. Lo stesso vale per le proprietà seguenti).

Se $\langle X, \succeq \rangle$ è globalmente non saziato, allora la funzione u non ha un massimo globale su X . Se $\langle X, \succeq \rangle$ è localmente non saziato, u non ha massimi locali.

Se $\langle X, \succeq \rangle$ è debolmente convesso, allora la funzione ordinale u è *quasi-concava*, cioè $u(x'') \geq \min\{u(x), u(x')\}$ per ogni $x'' = \lambda x + (1-\lambda)x'$ con $\lambda \in [0, 1]$, per cui l'insieme $R(x) = \{x' \in X : u(x') \geq u(x)\}$ è convesso per ogni $x \in X$. Si noti che mentre una funzione *concava* (tale, cioè, che $u(x'') \geq \lambda u(x) + (1-\lambda)u(x')$ per ogni $x'' = \lambda x + (1-\lambda)x'$ con $\lambda \in [0, 1]$) è anche quasi-concava, una funzione quasi-concava non è necessariamente concava (ad esempio, ogni funzione monotona non decrescente ad una sola variabile è quasi-concava, anche $y = x^2$, che è strettamente convessa).⁵ Si noti anche che mentre la quasi-concavità è una nozione ordinale (cioè, è invariante rispetto a trasformazioni monotone crescenti, nel senso che ogni trasformazione monotona crescente di una funzione quasi-concava è una funzione quasi-concava), la concavità è una nozione cardinale (cioè, non è invariante rispetto a trasformazioni monotone crescenti).

Se $\langle X, \succeq \rangle$ è strettamente convesso, la funzione ordinale u è *strettamente quasi-concava*, cioè $u(x'') > \min\{u(x), u(x')\}$ per ogni $x'' = \lambda x + (1-\lambda)x'$ con $\lambda \in (0, 1)$ e $x \neq x'$. Si noti che una funzione *strettamente concava* (tale, cioè, che $u(x'') > \lambda u(x) + (1-\lambda)u(x')$ per ogni $x'' = \lambda x + (1-\lambda)x'$ con $\lambda \in (0, 1)$ e $x \neq x'$) è anche strettamente quasi-concava, mentre non è necessariamente vero l'inverso. Inoltre, la stretta concavità è una nozione cardinale, mentre la stretta quasi-concavità è ordinale.

Se la funzione di utilità è differenziabile, i saggi marginali di sostituzione possono essere determinati differenziando l'equazione $u(x) =$

⁵ Inoltre, come ha mostrato per primo de Finetti (1949), non sempre esiste una funzione concava nella famiglia delle funzioni ottenute da una funzione quasi-concava tramite trasformazioni monotone crescenti. Ossia, essendo la funzione di utilità una funzione ordinale, quindi tale che tutte le trasformazioni monotone crescenti di una funzione di utilità rappresentano uno stesso sistema di preferenza, si potrebbe immaginare, sbagliando, che per ogni sistema di preferenza debolmente convesso vi sia almeno una funzione concava fra le funzioni quasi-concave di utilità che lo rappresentano (ciascuna delle quali è una trasformazione monotona crescente di qualcun'altra). Sulle condizioni che assicurano l'esistenza di una funzione concava, Kannai (1977).

$\bar{u}$, che rappresenta, per ogni dato valore di $\bar{u}$, una curva di indifferenza. Si trova, per ogni $x \in X$ e per ogni coppia di beni,

$$MRS_{x_h, x_j}(x) = - \left(\frac{\partial x_h}{\partial x_j} \right)_{u(x)=\bar{u}} = \frac{\partial u(x)/\partial x_j}{\partial u(x)/\partial x_h}$$

Si noti che il saggio marginale di sostituzione è ordinale, mentre l'utilità marginale (cioè, per il bene h -esimo, $\partial u(x)/\partial x_h$) è una nozione cardinale.

Se il sistema di preferenza è debolmente convesso, allora, come già visto, la funzione di utilità è quasi-concava, per cui, se la funzione di utilità è differenziabile due volte, la sua matrice hessiana (cioè, la matrice formata da tutte le derivate seconde) è semidefinita negativa in ogni $x \in X$ per ogni variazione α di x sulla tangente in x alla curva di indifferenza, ossia

$$\alpha^T D^2(u(x)) \alpha \leq 0 \text{ per ogni } \alpha \text{ tale che } D(u(x)) \alpha = 0$$

ove $\alpha \in \mathbb{R}^k$ (con α viene indicato il vettore colonna e con α^T il vettore riga), $D^2(u(x))$ è la matrice hessiana e $D(u(x))$ è il vettore gradiente (cioè, composto dalle derivate prime) di $u(x)$. Se il sistema di preferenza è strettamente convesso, la funzione di utilità è strettamente quasi-concava e la matrice hessiana è definita negativa rispetto alle stesse variazioni α , cioè

$$\alpha^T D^2(u(x)) \alpha < 0 \text{ per ogni } \alpha \text{ tale che } D(u(x)) \alpha = 0$$

Se vi sono soltanto due beni e il sistema di preferenza è monotono, queste condizioni richiedono che il saggio marginale di sostituzione sia, rispettivamente, funzione non crescente o decrescente di x_1 .⁶

3.4 Alcuni esempi di preferenze di consumo

Vi sono alcuni particolari sistemi di preferenza che vengono usati nell'analisi economica per rappresentare casi limite, oppure perché sono trattabili analiticamente senza particolari problemi, oppure anche perché semplificano l'analisi di taluni modelli. Qui di seguito vengono indicati alcuni di questi sistemi di preferenza, rappresentati con la loro funzione di utilità, riferita talvolta ad un'economia con due beni (è facile, però, scrivere la loro funzione di utilità per il caso con più di due beni).

⁶ Ossia, $-\frac{d \frac{dx_2}{dx_1}}{dx_1} = \frac{d \frac{u_1(x_1, x_2(x_1))}{u_2(x_1, x_2(x_1))}}{dx_1} = \frac{1}{u_2^3} (u_2^2 u_{11} - 2 u_1 u_2 u_{12} + u_1^2 u_{22}) \leq 0$ (oppure < 0 ,

se la funzione di utilità è strettamente quasi-concava), ove u_h indica la derivata prima $\frac{du}{dx_h}$

e u_{hj} la derivata seconda $\frac{d^2 u}{dx_h dx_j}$, per $h, j = 1, 2$. Si noti come questa relazione equivalga, con $u_2 > 0$, alla condizione $\alpha_1^2 u_{11} + 2 \alpha_1 \alpha_2 u_{12} + \alpha_2^2 u_{22} \leq 0$ per $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 = 0$.

Preferenze per cui i beni sono perfettamente sostituibili: questo tipo di sistema di preferenza è caratterizzato da un saggio marginale di sostituzione costante. Esso è rappresentabile con una funzione di utilità lineare, cioè

$$u(x_1, x_2) = a_1 x_1 + a_2 x_2$$

con parametri a_1, a_2 positivi (ovviamente, se nessuno dei due beni è un “male”). Naturalmente, se la funzione $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è monotona crescente, allora anche $f(a_1 x_1 + a_2 x_2)$ rappresenta lo stesso sistema di preferenza.

Le curve di indifferenza sono segmenti, con inclinazione $-a_1/a_2$, per cui il saggio marginale di sostituzione è pari a a_1/a_2 per ogni $x \in X$. (Quindi, con queste preferenze, è indifferente accrescere il paniere di beni con una unità aggiuntiva del primo bene oppure con a_1/a_2 unità del secondo bene). Un esempio è indicato nella Figura 3.8.

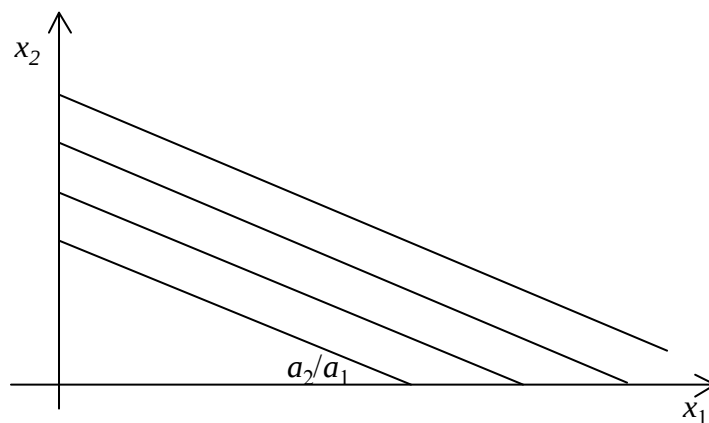


Figura 3.8

Preferenze per cui i beni sono perfettamente complementari: questo tipo di sistema di preferenza è caratterizzato dall'assenza di sostituibilità tra beni. Esso è rappresentabile con la funzione di utilità

$$u(x_1, x_2) = \min \{a_1 x_1, a_2 x_2\}$$

ancora con parametri a_1, a_2 positivi (se nessuno dei due beni è un “male”) e con $f(\min \{a_1 x_1, a_2 x_2\})$ che rappresenta lo stesso sistema di preferenza se la funzione $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è monotona crescente. Il rapporto a_1/a_2 indica il rapporto di complementarità, cioè quante unità del secondo bene si accompagnano ad una unità del primo bene nel paniere senza generare spreco di un bene o dell'altro.

Il saggio marginale di sostituzione è pari a zero (se il primo bene è in eccesso), ad infinito (se il secondo bene è in eccesso) ed è indeterminato se i due beni sono nel rapporto a_1/a_2 . Un esempio è indicato nella Figura 3.9.

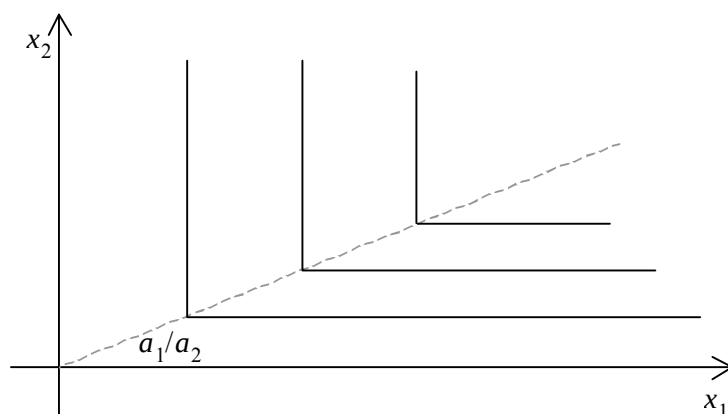


Figura 3.9

Preferenze del tipo Cobb-Douglas: questo tipo di sistema di preferenza è rappresentabile con la funzione di utilità

$$u(x_1, x_2) = x_1^{a_1} x_2^{a_2}$$

con parametri a_1, a_2 positivi. Un esempio è indicato nella Figura 3.10.

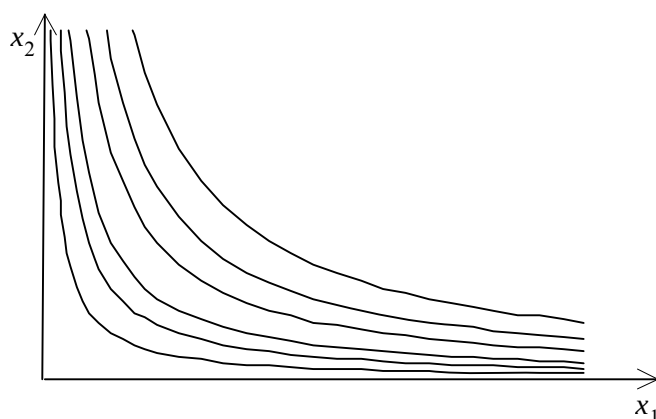


Figura 3.10

Ovviamente, anche una trasformata monotona crescente di $u(x_1, x_2)$ rappresenta lo stesso sistema di preferenza: ad esempio,

$$u(x_1, x_2) = a_1 \ln x_1 + a_2 \ln x_2$$

Ogni curva di indifferenza è una funzione esponenziale negativa (un ramo di iperbole), cioè del tipo $x_2 = \beta x_1^{-a_1/a_2}$, ove β è un parametro positivo (con $\beta = u^{1/a_2}$ se si usa la prima funzione di utilità e $\beta = e^{u/a_2}$ se si usa la seconda, ove u è la corrispondente utilità della curva di indifferenza), e, per il saggio marginale di sostituzione, si ha $MRS(x_1, x_2) = \frac{a_1}{a_2} \frac{x_2}{x_1}$.

Preferenze con elasticità di sostituzione costante (CES): questo tipo di sistema di preferenza è caratterizzato dalla condizione che l'elasticità di sostituzione σ (che è l'inverso dell'elasticità del rapporto marginale di sostituzione rispetto al rapporto tra le quantità dei due beni) è costante, ove

$$\sigma = \frac{MRS_{x_2, x_1}}{x_2/x_1} \frac{d(x_2/x_1)}{dMRS_{x_2, x_1}}$$

I sistemi di preferenza di questo tipo sono rappresentabili con la funzione di utilità

$$u(x_1, x_2) = a_1 x_1^\rho + a_2 x_2^\rho$$

ove $a_1 \in \mathbb{R}_+$, $a_2 \in \mathbb{R}_+$ e $\rho \in \mathbb{R}$, e si ha $\sigma = 1/(1-\rho)$.

Le preferenze con elasticità di sostituzione costante sono una generalizzazione dei sistemi di preferenza precedenti. Tenendo presente che $MRS_{x_2, x_1} = \frac{a_1}{a_2} \left(\frac{x_2}{x_1} \right)^{1-\rho}$, per $\rho = 1$

si hanno le preferenze con sostituzione perfetta, per $\rho \rightarrow -\infty$ si hanno le preferenze con complementarità perfetta e per $\rho \rightarrow 0$ si hanno le preferenze Cobb-Douglas.

Preferenze omotetiche: questo tipo di sistema di preferenza è caratterizzato dalla condizione che le curve di indifferenza si mantengono invariate per variazioni equiporzionali delle quantità di beni, cioè se $x' \sim x$, allora anche $\alpha x' \sim \alpha x$ per ogni $\alpha > 0$. Questa condizione richiede che il saggio marginale di sostituzione sia funzione omogenea di grado zero, cioè $MRS(\alpha x) = MRS(x)$ per ogni $\alpha > 0$.

Le preferenze omotetiche sono rappresentate da funzioni omotetiche di utilità, cioè da funzioni di utilità che soddisfano la condizione

$$u(x) = f(v(x))$$

ove $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione monotona crescente e $v: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione omogenea di grado uno, per cui

$$u(\alpha x) = f(\alpha v(x)) \text{ per ogni } \alpha > 0$$

Tenendo conto che la funzione di utilità è ordinale, ogni sistema omotetico di preferenza è rappresentabile con una funzione omogenea (se si vuole, di grado uno) di utilità, cioè da una u tale che $u(\alpha x) = \alpha^t u(x)$ per ogni $\alpha > 0$ (ove t indica il grado di omogeneità). Si noti come tutti i tipi di sistemi di preferenza indicati precedentemente siano omotetici.

Preferenze quasi-lineari: questo tipo di sistema di preferenza è caratterizzato dalla condizione che la variazione della quantità di uno dei beni mantiene invariata la forma delle curve di indifferenza. Ossia, se le preferenze sono quasi-lineari rispetto al primo bene, se $x' \sim x$, allora anche $(x' + \alpha e_1) \sim (x + \alpha e_1)$ per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ tale che $(x + \alpha e_1), (x' + \alpha e_1) \in X$, ove $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$. Perciò, tutte le curve di indifferenza differiscono tra loro solo per una traslazione nella direzione del primo asse, come nella figura 3.11. Questo tipo di sistemi di preferenza è rappresentabile con la funzione di utilità

$$u(x) = x_1 + u(x_2, x_3, \dots, x_k)$$

I saggi marginali di sostituzione (rispetto al primo bene) sono, con queste preferenze, l'inverso delle utilità marginali, cioè

$$MRS_{x_h, x_1}(x) = - \left(\frac{\partial x_h}{\partial x_1} \right)_{u(x)=\bar{u}} = \frac{1}{\partial u(x)/\partial x_h}$$

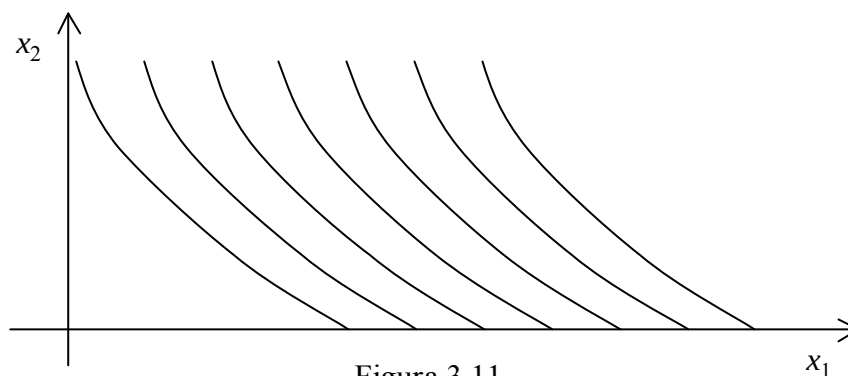


Figura 3.11

Preferenze separabili additivamente: questo tipo di sistema di preferenza è caratterizzato dalla condizione che la preferenza tra due panieri di beni non dipende da quanto i due panieri hanno in comune, cioè, se $x' \succ x$ ove $x' = (x_1', x_2)$ e $x = (x_1, x_2)$, allora $x''' \succ x''$ per ogni coppia $x'', x''' \in X$ con $x''' = (x_1', x_2')$ e $x'' = (x_1, x_2')$. Esso è rappresentabile con una funzione di utilità del tipo

$$u(x) = \sum_{h=1}^k u_h(x_h)$$

Si noti come le preferenze con elasticità di sostituzione costante siano separabili additivamente se il parametro ρ è limitato.

3.5 La teoria marginalista dell'utilità cardinale

L'approccio finora seguito per analizzare le preferenze di consumo è stato introdotto da Pareto (1900), sia nella versione in cui il sistema di preferenza è un "dato", sia nella versione in cui esso viene dedotto dalla scelta (è, cioè, un "dato" il criterio di scelta). Sebbene questo approccio sia oggi, a ragione, prevalente, merita tuttavia un cenno l'approccio alternativo seguito dagli economisti (fra cui Gossen, Jevons, Menger, Walras, Marshall e Pantaleoni) che hanno preceduto Pareto e condiviso con lui la nascita della teoria economica corrente. Secondo questo approccio l'utilità non è una semplice rappresentazione delle preferenze, come indicato nel Capitolo 2 e nel Paragrafo 3.3, ma una misura di queste, ottenuta analizzando le motivazioni che le determinano, su base prevalentemente psicologica.

In queste analisi, per un individuo, l'utilità dei beni è la valutazione soggettiva della capacità dei beni di appagare i suoi bisogni. L'analisi

dell'utilità parte dalla considerazione delle *emozioni*, cui ogni essere umano è soggetto e che possono essere in qualche modo classificate e misurate. Le emozioni, almeno quelle materiali, derivano da *sensazioni*, che sono determinate da *stimoli* (che colpiscono i sensi) e mediate dalla psiche del soggetto. Alla relazione tra stimolo e sensazione si riferisce la legge di Weber e Fechner (1859) secondo cui la sensazione è funzione logaritmica dello stimolo (ad esempio, l'intensità del suono, che si misura in decibel, è funzione logaritmica della potenza della sua sorgente, che si misura in watt, e un incremento di dieci decibel richiede che la potenza venga decuplicata). Alla relazione tra sensazione e emozione si riferiscono le due leggi di Gossen (1854), secondo cui l'intensità dell'emozione diminuisce con l'aumentare della durata della sensazione piacevole e con la frequenza della ripetizione della sensazione. Inoltre, si assume che le emozioni, che si configurano come piaceri e pene, siano confrontabili e sommabili. Allora, la massimizzazione del piacere implica (come indicato da Gossen ed esposto da Pantaleoni, 1894) che vi sia una frequenza ottima della ripetizione della sensazione e che, se vi sono più piaceri da godersi in un certo tempo, convenga distribuire il tempo a disposizione tra i vari piaceri in modo che le loro intensità marginali siano uguali tra loro.⁷

Conseguenza delle emozioni sono i bisogni. Un *bisogno* è il desiderio di disporre di un mezzo ritenuto atto a produrre una sensazione piacevole. Ne consegue, per i bisogni e i mezzi, come già visto per le emozioni e le sensazioni, che l'individuo distribuisce i mezzi a sua disposizione tra i vari bisogni in modo che le intensità marginali dei bisogni siano uguali tra loro. I *beni* sono i mezzi oggetto dei bisogni. Perché si abbia un bene economico occorre che vi sia un bisogno da soddisfare, che l'individuo ritenga che il bene sia atto a soddisfare il bisogno, che il bene sia accessibile e che sia scarso, cioè che la sua quantità sia insufficiente per la completa soddisfazione del bisogno (in assenza di quest'ultima proprietà si ha un bene non economico, o libero).

Infine, l'*utilità* di una certa quantità di un bene è la valutazione soggettiva della capacità di tale quantità di soddisfare i bisogni. Per quanto già indicato riguardo alle emozioni e ai bisogni, l'utilità è funzione della quantità del bene ed è, generalmente (nel tratto rilevante per la scelta), una funzione crescente con derivata prima decrescente. Quest'ultima condizione riflette la decrescenza dell'intensità del bisogno al crescere della quantità del bene (che riflette, a sua volta, la decrescenza dell'intensità del piacere al crescere della durata e della frequenza della sensazione piacevole). Ne consegue che l'individuo opera sul mercato suddividendo la sua capacità di spesa fra i diversi beni in modo che siano uguali tra loro le utilità marginali

⁷ Allora, se T indica il tempo a disposizione e $g_h'(t_h)$ l'intensità del godimento tratto dal piacere h -esimo protratto per il tempo t_h (per cui $g_h(t_h) = \int_0^{t_h} g_h'(t_h) dt_h$ è l'ammontare del godimento h -esimo), il massimo godimento risulta ottenuto con la massimizzazione di $\sum_h g_h(t_h)$ rispetto a $t_1, t_2, \dots$ sotto il vincolo che $\sum_h t_h = T$. Essendo $g_h''(t_h) < 0$, si ottiene, per i piaceri per i quali risulta $t_h^* > 0$, che $g_1'(t_1^*) = g_2'(t_2^*) = \dots$.

della moneta spesa nei diversi beni (l'utilità marginale della moneta spesa in un certo bene è pari al rapporto tra l'utilità marginale del bene e il suo prezzo).⁸

Si noti come questa analisi induca ad usare una funzione di utilità additivamente separabile. Questo, infatti, è il tipo di funzione di utilità usato da Walras e dalla generalità degli economisti dell'utilità cardinale. Tuttavia, questo tipo di funzione non è necessariamente implicata dalla nozione di utilità cardinale: Edgeworth (1881), ad esempio, propose l'impiego dell'utilità (cardinale) come funzione generica delle quantità di tutti i beni.

E' anche possibile definire l'utilità cardinale in termini di preferenze, a partire cioè dalla sua nozione ordinale (perciò, senza introdurre sensazioni, emozioni e bisogni). Il primo passo consiste nella introduzione dell'ipotesi che il sistema di preferenza riguardi non solo le preferenze tra due possibili azioni (per cui, per ogni $x, x' \in X$ si ha $x \succ x'$ e/o $x' \succ x$), ma anche l'intensità di queste preferenze (sia, cioè, possibile comparare tra loro le preferenze tra coppie di azioni, per cui l'agente riconosce se preferisce o no avere x invece che x' ad avere x'' invece che x''' , in altri termini, se preferisce x a x' più o meno di quanto preferisca x'' a x''' , anche quando $x \sim x''$ e $x' \sim x'''$). Questa ipotesi rende la funzione di utilità definita a meno di una trasformazione lineare crescente.

Per avere, poi, una funzione assoluta di utilità occorre definire quando questa sia nulla e quale sua variazione sia pari ad uno. Mentre la definizione dello zero è pressoché irrilevante fuori dallo scopo dell'introduzione di una funzione assoluta di utilità, quella dell'unità è spesso necessaria nei confronti interpersonali, che possono intervenire, ad esempio, nella definizione della funzione di benessere sociale. Ora, la definizione della variazione unitaria di utilità, sebbene sia stata tentata (Edgeworth propose la variazione minima avvertita dall'individuo, cioè $u(x') - u(x) = 1$ se $x' \succ x$ e l'individuo non è in grado di rilevare alcuna differenza tra x e x'' per ogni x'' con $\|x'' - x\| < \|x' - x\|$), è tuttavia logicamente indipendente dai giudizi individuali di preferenza. Se si desidera introdurla (ad esempio, per fare confronti interpersonali), si deve assumere che l'analisi sensazioni-emozioni-bisogni-utilità conduca ad una funzione assoluta di utilità, oppure introdurre un criterio, estraneo alla logica delle preferenze individuali, che faccia riferimento allo scopo specifico per cui la definizione della variazione unitaria di utilità occorre (ad esempio, un criterio fondato sulla uguaglianza/difficoltà degli individui).

⁸ Essendo l'utilità della moneta spesa per l'acquisto dell' h -esimo bene $v_h(m_h)$, ove $m_h = p_h x_h$, pari all'utilità del bene $u_h(x_h)$, si ha che $u_h'(x_h) = p_h v_h'(m_h)$. Allora, prendendo in considerazione i due problemi, tra loro equivalenti, $\max \sum_{h=1}^k u_h(x_h)$ sotto il vincolo $\sum_{h=1}^k p_h x_h = m$ e $\max \sum_{h=1}^k v_h(m_h)$ sotto il vincolo $\sum_{h=1}^k m_h = m$, si trovano, per i beni acquistati, le condizioni tra loro equivalenti $u_h'(x_h)/p_h = u_j'(x_j)/p_j$ e $v_h'(m_h) = v_j'(m_j)$ per ogni coppia di beni h e j . In questa analisi sono state usate le cosiddette trasformate utilitarie di Walras (che determinano le utilità marginali della spesa nei beni $v_h'(m_h)$ a partire dalle utilità marginali dei beni $u_h'(x_h)$).

3.6 La scelta del consumatore determinata dal sistema di preferenza

Si tratta ora di determinare la scelta del consumatore in base al sistema di preferenza $\langle X, \succsim \rangle$ e all'insieme $V \subseteq X$ dei panieri acquistabili di beni. Fra tutti i panieri consentiti di beni (appartenenti all'insieme V) il consumatore sceglie il paniere (o uno dei panieri) che preferisce.

Definizione 3.1 La scelta d è il sottoinsieme di $V \subseteq X$ massimale rispetto a $\succsim$, cioè,

$$d(V) = \{x \in V: x' \not\succ x \text{ per ogni } x' \in V\}$$

Nel caso in cui $V = B(p, m) = \{x \in X: p \cdot x \leq m\}$, si ha

$$d(B(p, m)) = d(p, m) = \{x \in B(p, m): x' \not\succ x \text{ per ogni } x' \in B(p, m)\}$$

Definizione 3.2 La corrispondenza $d: \mathbb{R}_+^{k+1} \rightarrow X$, definita da $d(p, m)$, che associa ad ogni coppia $(p, m) \in \mathbb{R}_+^{k+1}$ la scelta di consumo, è la domanda di consumo dell'individuo in esame, che indica come la sua scelta di consumo dipenda dai prezzi e dalla sua capacità di acquisto. Essa è denominata *corrispondenza o funzione walrasiana di domanda*.⁹

Proposizione 3.3 L'insieme di scelta d è non vuoto se il sistema di preferenza $\langle X, \succsim \rangle$ è regolare e continuo e l'insieme dei panieri acquistabili V è non vuoto e compatto. (L'insieme $V = B(p, m)$ è non vuoto e compatto se $X \subset \mathbb{R}^k$ è non vuoto e compatto, $p > 0$ e $m \geq \min_{x \in X} p \cdot x$, oppure se $X = \mathbb{R}_+^k$, $p > 0$ e $m \geq 0$ è limitato).

Dimostrazione. Con le ipotesi indicate, esiste per la Proposizione 3.2 una funzione di utilità continua che rappresenta il sistema di preferenza. Allora, l'insieme di scelta d è la soluzione del problema $\max_{x \in V} u(x)$, che esiste, cosicché d è non vuoto, per il teorema di Weierstrass, come indicato nella successiva Proposizione 3.7. $\square$

La condizione di regolarità può essere indebolita in vari modi. Ad esempio, la condizione di transitività non è necessaria se il sistema di preferenza $\langle X, \succsim \rangle$ è completo, continuo e convesso: Sonnenschein (1971) e Shafer (1974). In tal caso, la corrispondenza di domanda possiede anche le condizioni di continuità desiderate. Si può anche dimostrare come non sia necessaria neppure la condizione di completezza se il sistema di preferenza $\langle X, \succsim \rangle$ è transitivo e continuo: Bergstrom (1975) e Walker (1977).

Proposizione 3.4 Se il sistema di preferenza è monotono, l'insieme di scelta $d(p, m)$ non contiene punti $x \in X$ per i quali $p \cdot x < m$.

Dimostrazione. La proposizione vale, in realtà, sotto la più debole condizione che le preferenze siano localmente non saziate (condizione questa che implica la monotonicità). Per la condizione di non sazietà locale, per ogni $x \in X$ e ogni $\varepsilon > 0$ vi è un $x' \in X$ con $\|x' - x\| < \varepsilon$ tale che $x' \succ x$. Allora, per ogni $x \in X$ con $p \cdot x < m$, essendo $f(x') = p \cdot x'$ una

⁹ Prende il nome da Walras, che è l'economista che la ha introdotta e studiata. Talvolta, viene indicata anche come funzione di domanda marshalliana: in realtà, Marshall ha introdotto ed analizzato soltanto la dipendenza della domanda di un bene dal suo prezzo.

funzione continua su $\mathbb{R}^k$, vi è una coppia $(\varepsilon, x') \in \mathbb{R}^{k+1}$ con $\varepsilon > 0$ sufficientemente piccolo e $x' \in X$ tale che $\|x' - x\| < \varepsilon$, $p \cdot x' < m$ e $x' \succ x$. Ne consegue che $x \notin d(p, m)$. $\square$

Perciò, se il sistema di preferenza è monotono (o, anche soltanto, localmente non saziato), si ha $p \cdot x = m$ per tutti i punti $x \in d(p, m)$ ed è, quindi, equivalente prendere in considerazione il vincolo di bilancio espresso dall'insieme $B(p, m) = \{x \in X: p \cdot x \leq m\}$ oppure dall'insieme $\bar{B}(p, m) = \{x \in X: p \cdot x = m\}$.

Generalmente, l'insieme di scelta $d(p, m)$ include più di un paniere di beni (in tal caso, questi sono tra loro tutti indifferenti se il sistema di preferenza è regolare). Una condizione sufficiente perché la scelta sia unica è indicata dalla proposizione seguente.

Proposizione 3.5 L'insieme $d(p, m)$ è convesso se il sistema di preferenza è regolare e debolmente convesso e X è convesso. L'insieme $d(p, m)$ contiene non più di un punto se il sistema di preferenza è strettamente convesso.

Dimostrazione. La prima parte della proposizione richiede che $x'' \in d(p, m)$ se $x, x' \in d(p, m)$ e $x'' = \lambda x + (1-\lambda)x'$ con $\lambda \in [0, 1]$. La condizione $x, x' \in d(p, m)$ implica che $x, x' \in B(p, m)$ e $x \sim x'$. Essendo l'insieme $B(p, m)$ convesso (poiché è tale l'insieme X), si ha $x'' \in B(p, m)$ ed, essendo il sistema di preferenza debolmente convesso, si ha $x'' \succeq x \sim x'$. Le condizioni $x, x' \in d(p, m)$ e $x'' \in B(p, m)$ implicano, allora, che $x'' \sim x \sim x'$ e $x'' \in d(p, m)$. E' equivalente alla seconda parte della Proposizione 3.5 richiedere, sotto le ipotesi indicate, che $x' \notin d(p, m)$ se $x' \neq x$, $x \in d(p, m)$ e $x' \in B(p, m)$. Se $x \in d(p, m)$ e $x' \in B(p, m)$, allora $x \succeq x'$. Se fosse $x \sim x'$, allora, essendo l'insieme $B(p, m)$ convesso, si avrebbe $x'' \in B(p, m)$ per ogni $x'' = \lambda x + (1-\lambda)x'$ con $\lambda \in (0, 1)$, per cui, essendo il sistema di preferenza strettamente convesso e $x' \neq x$, sarebbe $x'' \succ x \sim x'$, in contrasto con la condizione $x \in d(p, m)$. Deve, allora, essere $x \succ x'$, per cui $x \in d(p, m)$ e $x' \in B(p, m)$ implicano $x' \notin d(p, m)$. $\square$

Un sistema di preferenza $\langle X, \succeq \rangle$ regolare e continuo su un insieme X connesso è rappresentabile con una funzione continua di utilità $u: X \rightarrow \mathbb{R}$, come si è visto nel Paragrafo 3.3 con la Proposizione 3.2. In tal caso, la scelta del consumatore è determinata dalla massimizzazione vincolata della funzione di utilità, come indicato nella definizione seguente.

Definizione 3.3 Se la funzione $u: X \rightarrow \mathbb{R}$ rappresenta il sistema di preferenza $\langle X, \succeq \rangle$ e $V = B(p, m)$ è l'insieme delle azioni consentite, la scelta del consumatore è soluzione del problema $\max_{x \in B(p, m)} u(x)$. In tal caso,

$d(p, m) = \arg \max_{x \in B(p, m)} u(x)$. Si dice *funzione indiretta di utilità* l'applicazione

$u^*: \mathbb{R}_+^{k+1} \rightarrow \mathbb{R}$, con $u^*(p, m) = \max_{x \in B(p, m)} u(x) = u(x(p, m))$ e $x(p, m) \in d(p, m)$,

che indica, per ogni $(p, m) \in \mathbb{R}_+^{k+1}$, l'utilità massima ottenibile.

Proposizione 3.6 Il problema $\max_{x \in B(p, m)} u(x)$ ha soluzione se la funzione di utilità $u: X \rightarrow \mathbb{R}$ è continua e l'insieme $B(p, m)$ è non vuoto e compatto. La soluzione è unica se,

inoltre, u è strettamente quasi-concava e $B(p, m)$ è convesso (perché $B(p, m)$ sia convesso è sufficiente che sia convesso X). In questo caso, la corrispondenza di domanda

è una funzione $d: C \rightarrow X$, con $x = d(p, m)$, ove $C \subseteq \mathbb{R}_+^{k+1}$ è un insieme di parametri (p, m) per cui gli insiemi $B(p, m)$ risultano non vuoti e compatti.

Proposizione 3.7 Se la funzione di utilità $u: X \rightarrow \mathbb{R}$ è continua e gli insiemi $B(p, m)$ non vuoti e compatti definiscono una corrispondenza $B: \mathbb{R}_+^{k+1} \rightarrow X$ continua (ad esempio, perché sono soddisfatte le condizioni della Proposizione 3.1), allora, sono continue sia la funzione indiretta di utilità $u^*: C \rightarrow \mathbb{R}$ (introdotta dalla Definizione 3.3), sia la funzione di domanda $d: C \rightarrow X$ (se questa è una funzione). Se, invece, $d: C \rightarrow X$ è una corrispondenza, allora, sotto le stesse condizioni, essa è emicontinua superiormente e la funzione indiretta di utilità $u^*: C \rightarrow \mathbb{R}$ è continua.¹⁰

Entrambe queste Proposizioni derivano da noti teoremi matematici. La prima parte della Proposizione 3.6 è il teorema di Weierstrass per le funzioni di più variabili e la Proposizione 3.7 deriva dal “teorema del massimo”.¹¹

Se la funzione di utilità è quasi-concava (senza richiedere che sia strettamente quasi-concava), la domanda walrasiana $d(p, m)$ è generalmente espressa da una corrispondenza. Questa gode di alcune proprietà rilevanti: in particolare, $d(p, m)$ è un insieme convesso e la corrispondenza di domanda è emicontinua superiormente. Queste proprietà, che sono una condizione molto importante nell’analisi dell’equilibrio, non sono garantite quando la funzione di utilità, pur essendo continua, non è quasi-concava, cioè quando il sistema di preferenza, pur essendo regolare e continuo, non è debolmente convesso.

Proposizione 3.8 Gli insiemi di bilancio $B(p, m)$, la corrispondenza walrasiana di domanda $d(p, m)$ (e, quindi, quando questa è una funzione, la funzione di domanda) e la funzione indiretta di utilità $u^*(p, m)$ sono omogenei di grado zero, cioè $B(\alpha p, \alpha m) = B(p, m)$, $d(\alpha p, \alpha m) = d(p, m)$ e $u^*(\alpha p, \alpha m) = u^*(p, m)$ per ogni $\alpha > 0$.¹²

¹⁰ Una corrispondenza $f: A \rightarrow Y$, con $A \subseteq \mathbb{R}^m$ e $Y \subseteq \mathbb{R}^k$, è emicontinua superiormente se le immagini di insiemi compatti sono limitate (cioè, per ogni insieme compatto $A' \subseteq A$, l’insieme $f(A') = \{y \in Y: \text{esiste un } x \in A' \text{ per cui } y \in f(x)\}$ è limitato) e si ha $y \in f(x)$ per ogni coppia di successioni $\{x^s\}$, $\{y^s\}$, con $x^s \in A$, $y^s \in Y$, $y^s \in f(x^s)$, $x^s \rightarrow x$, $y^s \rightarrow y$ e $x \in A$. (Si noti come una funzione è continua se e solo se è una corrispondenza emicontinua superiormente). Poi, una corrispondenza è continua se è emicontinua sia superiormente sia inferiormente. E’ emicontinua inferiormente se, per ogni successione $\{x^s\}$, con $x^s \in A$ e $x^s \rightarrow x$, e per ogni $y \in f(x)$, esiste una successione $\{y^s\}$, con $y^s \rightarrow y$, tale che $y^s \in f(x^s)$ per ogni s sufficientemente grande.

¹¹ Il teorema di Weierstrass dice che una funzione $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ ammette un massimo e un minimo se è continua e il suo dominio $A \subseteq \mathbb{R}^k$ è non vuoto e compatto (cioè, chiuso e limitato). Si prenda, ora, in considerazione il problema di massimo vincolato “ $\max f(x)$ sotto il vincolo $x \in V(c)$ ”, ove $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione e $V(c) \subseteq \mathbb{R}^k$ è un insieme non vuoto per ogni $c \in C$, con $C \subseteq \mathbb{R}^m$. Per il teorema di Weierstrass il problema ammette soluzione se la funzione $f(x)$ è continua e l’insieme $V(c)$ è compatto. Si indichi con $d(c) \subseteq V(c)$ l’insieme delle soluzioni e con $f^*(c)$ il valore massimo ottenibile della funzione (per cui $f^*(c) = f(x^*)$ se $x^* \in d(c)$). Il teorema del massimo dice che la soluzione $d: C \rightarrow \mathbb{R}^k$ è una corrispondenza emicontinua superiormente e il valore massimo $f^*: C \rightarrow \mathbb{R}$ della funzione f è una funzione continua se la funzione f e la corrispondenza V sono continue.

¹² Una funzione $f(x)$, con $x \in \mathbb{R}^k$, è omogenea di grado t se è $f(\alpha x) = \alpha^t f(x)$ per ogni $\alpha > 0$. Le funzioni omogenee sono state utilizzate per definire le preferenze omotetiche e saranno utilizzate ancora diverse volte, ad esempio, nell’analisi della scelta di produzione.

Dimostrazione. La dimostrazione è banale: basta tenere conto che nella definizione dell'insieme $B(p, m)$ il vincolo $p \cdot x \leq m$ è equivalente a $\alpha p \cdot x \leq \alpha m$ per $\alpha > 0$ e che il sistema di preferenza $\langle X, \succeq \rangle$ non dipende da p e m . $\square$

Proposizione 3.9 La funzione walrasiana di domanda $d(p, m)$ soddisfa la relazione $p \cdot d(p, m) \leq m$. Se le preferenze sono monotone (o anche, soltanto localmente non saziate), allora $p \cdot d(p, m) = m$. Se $d(p, m)$ è una corrispondenza, le relazioni precedenti valgono per ogni $x \in d(p, m)$.

Dimostrazione. Anche questa dimostrazione è banale: basta tenere conto che la scelta di consumo soddisfa il vincolo di bilancio e che si applica, se le preferenze sono monotone (o localmente non saziate), la Proposizione 3.4. $\square$

La Proposizione 3.9 implica, se le preferenze sono monotone (o localmente non saziate), che gli elementi del vettore $d(p, m)$ non sono linearmente indipendenti. Ossia, la condizione $\sum_{h=1}^k p_h d_h(p, m) = m$ implica che la funzione di domanda di un bene è determinata da quelle degli altri $k-1$ beni: ad esempio, $d_k(p, m) = \frac{1}{p_k} (m - \sum_{h=1}^{k-1} p_h d_h(p, m))$.

Proposizione 3.10 La funzione indiretta di utilità (introdotta dalla Definizione 3.3) è quasi-convessa, cioè, si ha $u^*(p'', m'') \leq \max \{u^*(p, m), u^*(p', m')\}$ per ogni (p, m) , (p', m') e $\lambda \in [0, 1]$, ove $p'' = \lambda p + (1-\lambda)p'$ e $m'' = \lambda m + (1-\lambda)m'$.

Dimostrazione. La dimostrazione può essere ottenuta tenendo conto che la condizione $u^*(p, m) \leq u$ è equivalente alla condizione $u(x) \leq u$ per ogni x tale che $p \cdot x \leq m$. Prendendo in considerazione $u^*(p'', m'')$, si ha che $u(x) = u^*(p'', m'')$ per almeno un x con $p'' \cdot x = m''$, cioè, essendo $p'' = \lambda p + (1-\lambda)p'$ e $m'' = \lambda m + (1-\lambda)m'$, tale che $\lambda p \cdot x + (1-\lambda)p' \cdot x = \lambda m + (1-\lambda)m'$. Questa uguaglianza implica $p \cdot x \leq m$ e/o $p' \cdot x \leq m'$, cioè $u(x) \leq u^*(p, m)$ e/o $u(x) \leq u^*(p', m')$ e, quindi, $u^*(p'', m'') \leq u^*(p, m)$ e/o $u^*(p'', m'') \leq u^*(p', m')$, ossia $u^*(p'', m'') \leq \max \{u^*(p, m), u^*(p', m')\}$. $\square$

3.7 La determinazione della scelta di consumo

Si assuma che il sistema di preferenza $\langle X, \succeq \rangle$ sia monotono (o, anche, soltanto localmente non saziato) e sia rappresentabile con una funzione di utilità $u: X \rightarrow \mathbb{R}$ differenziabile due volte con continuità; si assuma, inoltre, $X = \mathbb{R}_+^k$, $p \gg 0$ e $m \geq 0$, cosicché $B(p, m)$ è non vuoto e compatto. Allora, la scelta di consumo è soluzione del problema di massimo vincolato

$$\max_x u(x) \quad \text{sotto i vincoli } x \in \mathbb{R}_+^k \text{ e } p \cdot x = m$$

Questo problema può essere affrontato ricercando dapprima i massimi locali (o relativi) con il metodo di Lagrange (mentre un massimo assoluto x^* è una soluzione del problema $\max_{x \geq 0, p \cdot x = m} u(x)$, cioè $u(x^*) = \max_{x \geq 0, p \cdot x = m} u(x)$, un

massimo locale richiede che esista un $\varepsilon > 0$ tale che per ogni $x' \geq 0$ con $\|x' - x^*\| < \varepsilon$ e $p x' = m$ risulti $u(x') \leq u(x^*)$ ¹³.

Si introduca, allora, la funzione lagrangiana

$$L(x, \lambda) = u(x) + \lambda (m - p x)$$

ove λ è il moltiplicatore di Lagrange, e si considerino le sue derivate prime rispetto a x e λ . Risultano le condizioni del primo ordine

$$Du(x^*) - \lambda^* p = 0 \qquad m - p x^* = 0$$

ove $Du(x^*) = \left(\frac{\partial u(x^*)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u(x^*)}{\partial x_k} \right)$ è il vettore gradiente della funzione $u(x)$

calcolato nel punto x^* . Queste condizioni sono necessariamente soddisfatte dai massimi relativi interni, cioè con $x^* \gg 0$.

Se si tiene conto anche dei possibili massimi di frontiera (se, cioè, $x^* \geq 0$), allora la prima delle due condizioni del primo ordine diviene

$$Du(x^*) - \lambda^* p \leq 0 \qquad x^* (Du(x^*) - \lambda^* p) = 0$$

che coincide con la condizione nel testo per $x^* \gg 0$. Se, invece, $x_h^* = 0$, questa condizione richiede $\frac{\partial u(x^*)}{\partial x_h} - \lambda^* p_h \leq 0$. Inoltre, se $\frac{\partial u(x^*)}{\partial x_h} - \lambda^* p_h < 0$, allora la condizione del primo ordine è risolutiva e non deve essere considerata la condizione del secondo ordine relativamente alla variabile x_h^* (ossia, vanno escluse dalla matrice hessiana $D_x^2 L(x^*, \lambda^*)$ le righe e le colonne corrispondenti a questa variabile).

Si noti come l'ipotesi che le preferenze siano localmente non saziate implichi $\lambda^* > 0$ se $m > 0$. Infatti, da un lato, vi è almeno un bene scelto in quantità positiva: sia $x_h^* > 0$, per cui $\frac{\partial u(x^*)}{\partial x_h} = \lambda^* p_h$, con $p_h > 0$ per ipotesi; dall'altro lato, con preferenze localmente non saziate, l'utilità si riduce passando da x^* ad un punto interno al vincolo di bilancio, e ciò accade se si riduce, *ceteris paribus*, x_h^* , per cui $\frac{\partial u(x^*)}{\partial x_h} > 0$. Ne consegue che $\lambda^* > 0$.

La prima delle due condizioni implica che, per ogni coppia di beni, il loro rapporto di scambio sia uguale al saggio marginale di sostituzione (si ricordi che il rapporto di scambio è pari al rapporto tra i prezzi e il saggio marginale di sostituzione è pari a quello tra le utilità marginali), richiedendo

¹³ Il metodo di Lagrange, applicato al problema $\max f(x)$ sotto i vincoli $g(x) = 0$, ove $f: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ e $g_j: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$, con $j = 1, \dots, n$ (ove n , con $n < k$, è il numero di vincoli), sono funzioni continue e differenziabili due volte, richiede l'introduzione della *funzione lagrangiana* $L(x, \lambda) = f(x) - \lambda g(x)$, ove λ è un vettore di n *moltiplicatori di Lagrange*. Si ottiene che x^* è un massimo locale solo se $DL(x^*, \lambda^*) = 0$ (ove $DL(x^*, \lambda^*)$ è il vettore gradiente di L , cioè il vettore composto dalle $k + n$ derivate prime della funzione lagrangiana). Queste condizioni sono indicate come *condizioni del primo ordine*. Poi, prendendo in considerazione la matrice hessiana $D_x^2 L(x^*, \lambda^*)$ (composta dalle derivate seconde di L rispetto al vettore x , con i loro valori in x^*, λ^*) e, perciò, le *condizioni del secondo ordine*, si ha che se x^* è un massimo locale, allora $D_x^2 L(x^*, \lambda^*)$ è semidefinita negativa sotto i vincoli $Dg(x^*) \alpha = 0$, cioè si ha $\alpha^T D_x^2 L(x^*, \lambda^*) \alpha \leq 0$ per ogni vettore α (dove α è vettore colonna e α^T è vettore riga) tale che $Dg(x^*) \alpha = 0$. Inoltre, se x^* soddisfa le condizioni del primo ordine e $D_x^2 L(x^*, \lambda^*)$ è definita negativa sotto gli stessi vincoli, cioè $\alpha^T D_x^2 L(x^*, \lambda^*) \alpha < 0$ per ogni α con $Dg(x^*) \alpha = 0$, allora x^* è un massimo locale. (Il metodo di Lagrange è esposto in molti testi di matematica. Per una presentazione particolarmente adatta al suo uso in economia si può vedere Intriligator, 1971, pp. 20-43).

$$\frac{\partial u(x^*)/\partial x_j}{\partial u(x^*)/\partial x_h} = \frac{p_j}{p_h}, \quad \text{per ogni } h, j = 1, \dots, k$$

Nel caso con due beni, la determinazione della scelta può essere seguita su un diagramma, come nella Figura 3.12.

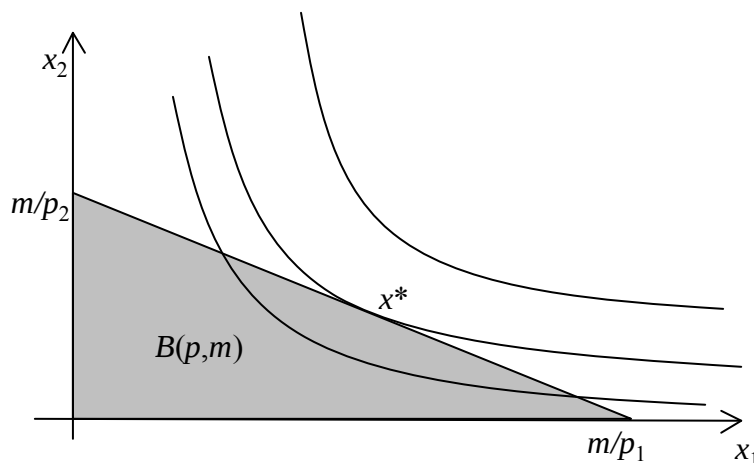


Figura 3.12

Le condizioni del primo ordine impongono che la scelta x^* stia sul vincolo di bilancio (cioè, $p x = m$) e che la curva di indifferenza passante per x^* abbia in x^* la stessa pendenza del vincolo di bilancio (sia, cioè, $-\left(\frac{dx_2(x^*)}{dx_1}\right)_{u(x)=u(x^*)} = \frac{p_1}{p_2}$).

Le condizioni del primo ordine sono necessarie, ma non sufficienti. Perché si abbia un massimo locale (e, a maggior ragione, assoluto) devono essere introdotte anche le condizioni del secondo ordine. Queste concernono la forma quadratica vincolata seguente

$$\alpha^T D^2(u(x^*)) \alpha \quad \text{sotto il vincolo } p \alpha = 0$$

ove $D^2(u(x^*))$ è la matrice hessiana (cioè, delle derivate seconde) della funzione di utilità valutata in x^* e α^T e α sono rispettivamente vettore riga e vettore colonna.

Le considerazioni precedenti possono essere così riassunte e completate.

Proposizione 3.11 Se, con riferimento al problema $\max_{x \geq 0, px=m} u(x)$, il vettore x^* soddisfa le condizioni del primo ordine

$$Du(x^*) - \lambda^* p = 0 \quad m - p x^* = 0$$

ed è, inoltre,

$$\alpha^T D^2(u(x^*)) \alpha < 0 \quad \text{per ogni } \alpha \text{ tale che } p \alpha = 0$$

cioè la matrice hessiana $D^2(u(x^*))$ vincolata dalla condizione $p \alpha = 0$ è definita negativa in x^* ,¹⁴ allora x^* è un massimo locale per il problema $\max_{x \geq 0, px=m} u(x)$. Se x^* è un massimo locale per il problema $\max_{x \geq 0, px=m} u(x)$, allora sono soddisfatte le condizioni del primo ordine e si ha

$$\alpha^T D^2(u(x^*)) \alpha \leq 0 \quad \text{per ogni } \alpha \text{ tale che } p \alpha = 0$$

cioè la matrice hessiana $D^2(u(x^*))$ vincolata dalla condizione $p \alpha = 0$ è semidefinita negativa in x^* .

Con riferimento alla Figura 3.12, la condizione del secondo ordine è soddisfatta se la curva di indifferenza è convessa nel punto x^* . Le condizioni del secondo ordine sono sicuramente verificate se le preferenze sono convesse (basta riferirsi a quanto indicato nel Paragrafo 3.3 a proposito della funzione di utilità con preferenze convesse e introdurre le condizioni del primo ordine): con due beni, la convessità delle preferenze implica che le curve di indifferenza siano convesse in ogni $x \in X$, quindi anche in x^* .

Le condizioni del primo e del secondo ordine, considerate congiuntamente, sono condizione sufficiente (se è $\alpha^T D^2(u(x^*)) \alpha < 0$ per $p \alpha = 0$) per un massimo locale, inoltre localmente unico¹⁵, ma non lo sono per la determinazione della scelta del consumatore, che richiede un massimo globale. Ovviamente, se vi è un solo massimo locale, questo è anche globale e determina la scelta. Questa situazione si presenta se le preferenze sono strettamente convesse (come nella Figura 3.12): il massimo è unico, sia esso interno o di frontiera. Se le preferenze sono (non strettamente) convesse, può risultare la presenza di una molteplicità di massimi locali, che sono però tutti anche massimi globali (e può, quindi, essere ciascuno una scelta di

¹⁴ Le condizioni del secondo ordine possono essere verificate prendendo in considerazione la matrice orlata seguente (ove u_{hj} indica $\frac{\partial u(x^*)}{\partial x_h \partial x_j}$)

$$\begin{bmatrix} 0 & p_1 & p_2 & \dots & p_k \\ p_1 & u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1k} \\ p_2 & u_{12} & u_{22} & \dots & u_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_k & u_{1k} & u_{2k} & \dots & u_{kk} \end{bmatrix}$$

per accertarsi che la seguente successione dei determinanti principali abbia il segno alterno indicato di seguito (si noti come risultino da verificare $k-1$ disuguaglianze)

$$\begin{vmatrix} 0 & p_1 & p_2 \\ p_1 & u_{11} & u_{12} \\ p_2 & u_{12} & u_{22} \end{vmatrix} > 0, \quad \begin{vmatrix} 0 & p_1 & p_2 & p_3 \\ p_1 & u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ p_2 & u_{12} & u_{22} & u_{23} \\ p_3 & u_{13} & u_{23} & u_{33} \end{vmatrix} < 0, \quad \begin{vmatrix} 0 & p_1 & p_2 & p_3 & p_4 \\ p_1 & u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ p_2 & u_{12} & u_{22} & u_{23} & u_{24} \\ p_3 & u_{13} & u_{23} & u_{33} & u_{34} \\ p_4 & u_{14} & u_{24} & u_{34} & u_{44} \end{vmatrix} > 0, \dots$$

¹⁵ La condizione $\alpha^T D^2 u(x^*) \alpha < 0$ per ogni α tale che $p \alpha = 0$ implica la proprietà locale che la funzione $u(x)$ sia strettamente quasi-concava in x^* .

consumo), inoltre contigui fra loro (cioè, nessuno è isolato, ossia nell'intorno di ciascun massimo se ne trova almeno un altro) e costituenti un insieme convesso. (La Figura 3.6, che indica una curva di indifferenza di un sistema di preferenze non strettamente convesso, si presta ad illustrare quanto appena indicato).

Nelle Figure 3.13, 3.14 e 3.15 sono indicati, rispettivamente, il caso di una scelta di frontiera (con preferenze strettamente convesse), di una scelta unica ma con due massimi locali (con preferenze non convesse) e di un insieme di scelta composto da due massimi globali isolati.

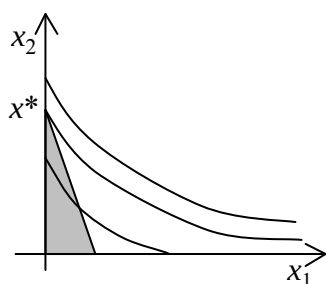


Figura 3.13

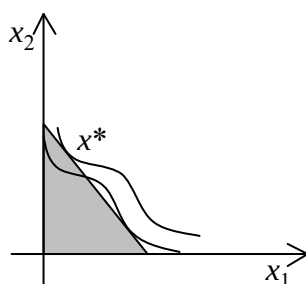


Figura 3.14

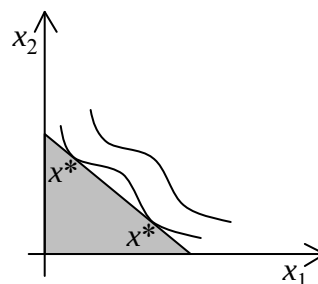


Figura 3.15

3.8 Statica comparata della scelta di consumo: l'analisi della domanda

L'analisi di statica comparata della scelta di consumo confronta scelte alternative. Si occupa, cioè, di determinare come sarebbe stata diversa la scelta se fossero stati diversi i prezzi o la capacità di spesa. Si tratta, quindi, di determinare la dipendenza della scelta di consumo da queste grandezze.¹⁶

Nel caso con due beni l'analisi di statica comparata può essere compiuta, almeno in parte, geometricamente, introducendo la *curva prezzo-consumo* (che è il luogo delle scelte corrispondenti a diversi prezzi di un bene, *ceteris paribus*) e la *curva reddito-consumo* (che è il luogo delle scelte

¹⁶ Questa dipendenza viene rappresentata spesso in economia in termini di variazioni relative, introducendo, cioè, le elasticità $\epsilon_{hh} = -\frac{p_h}{x_h} \frac{\partial d_h(p, m)}{\partial p_h}$, $\epsilon_{hj} = \frac{p_j}{x_h} \frac{\partial d_h(p, m)}{\partial p_j}$ e

$\epsilon_{hm} = \frac{m}{x_h} \frac{\partial d_h(p, m)}{\partial m}$, che sono l'elasticità della domanda del bene h -esimo rispetto al suo

prezzo (nell'uso corrente questa elasticità viene indicata come una grandezza positiva, da cui il cambiamento di segno), l'elasticità della domanda del bene h -esimo rispetto al prezzo del bene j -esimo e l'elasticità della domanda del bene h -esimo rispetto alla capacità di spesa. Le elasticità vengono usate anche per le funzioni di offerta, che verranno introdotte nel Capitolo 5.

corrispondenti a diverse capacità di spesa). Queste curve sono rappresentate, rispettivamente, nelle Figure 3.16 e 3.17.

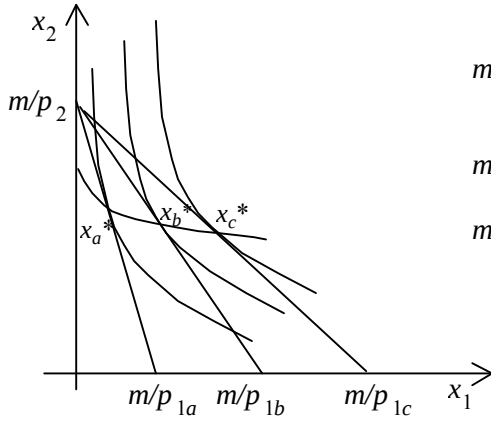


Figura 3.16

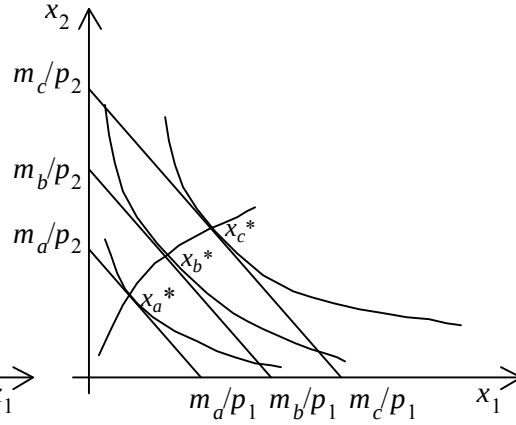


Figura 3.17

La curva prezzo-consumo indicata nella Figura 3.16 mostra come prezzi inferiori del primo bene determinino la scelta di panieri di beni con quantità maggiori del primo bene (però potrebbe aversi, con altre preferenze, l'andamento opposto, come nella Figura 3.20). La curva reddito-consumo indicata nella Figura 3.17 mostra come capacità più grandi di spesa determinino la scelta di panieri più ricchi di beni (però potrebbe aversi, con altre preferenze, l'andamento opposto per uno dei due beni, come nella Figura 3.19).

La determinazione analitica della dipendenza della scelta dai prezzi e dalla capacità di spesa¹⁷ può essere ottenuta differenziando le condizioni del primo ordine appena ricavate nel Paragrafo 3.7 per il problema della scelta di consumo, assumendo che x^* sia un massimo localmente unico, cioè che $\alpha^T D^2(u(x^*)) \alpha < 0$ per ogni vettore α tale che $p \alpha = 0$.

Se il sistema di preferenza $\langle X, \succeq \rangle$ monotono (o, anche, soltanto localmente non saziato) è rappresentato da una funzione di utilità $u: X \rightarrow \mathbb{R}$ differenziabile due volte con continuità e si ha $X = \mathbb{R}_+^k$, $p \in \mathbb{R}_{++}^k$ (cioè, $p \gg 0$) e $m \in \mathbb{R}_+$ (cioè, $m \geq 0$), la scelta di consumo è soluzione del problema

$$\max_x u(x) \quad \text{sotto i vincoli } x \in \mathbb{R}_+^k \text{ e } p x = m$$

che introduce la corrispondenza walrasiana di domanda $d: \mathbb{R}_{++}^k \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+^k$ tramite la relazione

$$d(p, m) = \arg \max_{x \geq 0, px=m} u(x)$$

¹⁷ Questa analisi è stata opera soprattutto di Pareto (1892), Slutsky (1915) e Hicks (1939).

e la funzione indiretta di utilità $u^*: \mathbb{R}_{++}^k \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ tramite la relazione

$$u^*(p, m) = \max_{x \geq 0, px=m} u(x)$$

Prendendo in considerazione l'insieme $C' \subset \mathbb{R}_+^{k+1}$ delle coppie (p, m) per le quali la corrispondenza di domanda è una funzione con immagine positiva (cioè, il problema esaminato nel Paragrafo 3.7 ha soluzione unica e interna),¹⁸ ossia $d(p, m) \in \mathbb{R}_{++}^k$, è possibile determinare, per ogni $(p, m) \in C'$ ove la funzione $x^* = d(p, m)$ è differenziabile (la continuità è assicurata dalla Proposizione 3.7) ed è quindi differenziabile anche la funzione di utilità indiretta $u^* = u(d(p, m))$, le derivate $D_p d(p, m)$ e $D_m d(p, m)$ della funzione di domanda e le derivate $D_p u^*(p, m)$ e $D_m u^*(p, m)$ della funzione indiretta di utilità.

Proposizione 3.12 Con riferimento a quanto appena enunciato, risultano, tenendo presente che $d(p, m) \in \mathbb{R}_{++}^k$, le derivate¹⁹

$$D_p d(p, m) = \lambda^* \left((D^2 u)^{-1} - \frac{(D^2 u)^{-1} p p^T (D^2 u)^{-1}}{p^T (D^2 u)^{-1} p} \right) - \frac{(D^2 u)^{-1} p x^{*T}}{p^T (D^2 u)^{-1} p}$$

$$D_m d(p, m) = \frac{(D^2 u)^{-1} p}{p^T (D^2 u)^{-1} p}$$

$$D_p u^*(p, m) = -\lambda^* x^* < 0$$

$$D_m u^*(p, m) = \lambda^* > 0$$

ove $D_p d(p, m)$ è la matrice jacobiana, rispetto ai prezzi, della funzione walrasiana di domanda (perciò, composta dagli elementi $\partial x_h^* / \partial p_j$, con $h, j = 1, \dots, k$), $D_m d(p, m)$ è il vettore delle derivate della domanda rispetto alla capacità di spesa (quindi, composto dagli elementi $\partial x_h^* / \partial m$, con $h = 1, \dots, k$), $\lambda^* = \lambda(p, m)$ è il valore del moltiplicatore di

Lagrange che risulta dalla soluzione del problema $\max_{x \geq 0, px=m} u(x)$ (quindi, $\lambda^* = \frac{1}{p_h} \frac{\partial u(x^*)}{\partial x_h}$

per ogni $h = 1, \dots, k$), $D^2 u$ è la matrice hessiana in x^* della funzione di utilità (quindi, composta dagli elementi $\frac{\partial^2 u(x^*)}{\partial x_h \partial x_j}$ con $h, j = 1, \dots, k$), p^T e x^{*T} sono vettori riga e p

e x^* i corrispondenti vettori colonna (con elementi p_h e x_h^* , con $h = 1, \dots, k$), per cui il prodotto $p x^{*T}$ è una matrice, $D_p u^*(p, m)$ è il vettore delle derivate della funzione indiretta dell'utilità rispetto ai prezzi, che risulta essere negativo, e $D_m u^*(p, m)$ è la derivata, che risulta positiva, della stessa funzione rispetto alla capacità di spesa. Il segno di

¹⁸ Questo insieme potrebbe anche essere vuoto. E' vuoto, ad esempio, se le preferenze sono del tipo con perfetta sostituibilità tra i beni. All'altro estremo, si ha, ad esempio, $C' = \mathbb{R}_{++}^{k+1}$ se le preferenze sono del tipo Cobb-Douglas.

¹⁹ Se $x^* > 0$ invece che $x^* \gg 0$ e vi è qualche bene per il quale si ha $x_h^* = 0$ con $\frac{\partial u(x^*)}{\partial x_h} - \lambda^* p_h < 0$, allora $\frac{\partial x_h^*(p, m)}{\partial p_j} = 0$ per $j = 1, \dots, k$ e $\frac{\partial x_h^*(p, m)}{\partial m} = 0$. Se si ha $x_h^* = 0$, però con $\frac{\partial u(x^*)}{\partial x_h} - \lambda^* p_h = 0$, allora $\frac{\partial x_h^*(p, m)}{\partial p_j} = \max\{0, \frac{\partial d_h(p, m)}{\partial p_j}\}$ per $j = 1, \dots, k$ e $\frac{\partial x_h^*(p, m)}{\partial m} = \max\{0, \frac{\partial d_h(p, m)}{\partial m}\}$, ove $\frac{\partial d_h(p, m)}{\partial p_j}$ e $\frac{\partial d_h(p, m)}{\partial m}$ sono le relazioni indicate nel testo.

$D_p u^*(p, m)$ e $D_m u^*(p, m)$ indica come il consumatore gradisca prezzi bassi e capacità di spesa elevata (si noti come ciò accada perché le preferenze sono localmente non saziate, non occorre che esse siano monotone).

Dimostrazione. Differenziando le condizioni del primo ordine

$$m - p^T x^* = 0 \quad Du(x^*) - \lambda^* p = 0$$

rispetto alle variabili dipendenti λ^* , x^* e alle variabili indipendenti p , m si ottiene il sistema

$$\begin{bmatrix} 0 & -p^T \\ -p & D^2 u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\lambda^* \\ dx^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^{*T} dp - dm \\ \lambda^* dp \end{bmatrix}$$

la cui soluzione è²⁰

$$d\lambda^* = -\frac{p^T (D^2 u)^{-1}}{p^T (D^2 u)^{-1} p} \lambda^* dp - \frac{1}{p^T (D^2 u)^{-1} p} (x^{*T} dp - dm)$$

$$dx^* = \left((D^2 u)^{-1} - \frac{(D^2 u)^{-1} p p^T (D^2 u)^{-1}}{p^T (D^2 u)^{-1} p} \right) \lambda^* dp - \frac{(D^2 u)^{-1} p}{p^T (D^2 u)^{-1} p} (x^{*T} dp - dm)$$

Dall'ultima di queste due relazioni scaturiscono immediatamente le derivate $D_p d(p, m)$ e $D_m d(p, m)$ indicate nell'enunciato della Proposizione. Tenendo poi conto che

$$du^* = Du(x^*) dx^* = \lambda^* p^T dx^* = \lambda^* (dm - x^{*T} dp)$$

risultano le corrispondenti derivate della funzione indiretta di utilità, anch'esse indicate nell'enunciato. $\square$

Dalle espressioni della Proposizione 3.12 che indicano il valore delle derivate $D_p u^*(p, m)$ e $D_m u^*(p, m)$ è possibile ricavare direttamente il legame tra la funzione walrasiana di domanda e la funzione indiretta di utilità, noto come relazione di Antonelli (1886) e Roy (1942).

Proposizione 3.13 Prendendo in considerazione l'insieme $C' \subset \mathbb{R}_+^{k+1}$ delle coppie (p, m) per le quali la corrispondenza walrasiana di domanda è una funzione con immagine positiva, ossia $d(p, m) \in \mathbb{R}_+^k$, risulta, per ogni $(p, m) \in C'$ ove la funzione $x^* = d(p, m)$ è differenziabile, la *relazione di Antonelli e Roy*

$$d(p, m) = -\frac{D_p u^*(p, m)}{D_m u^*(p, m)}$$

ossia, per ogni $h = 1, \dots, k$,

$$x_h^* = d_h(p, m) = -\frac{1}{\frac{\partial u^*(p, m)}{\partial m}} \frac{\partial u^*(p, m)}{\partial p_h}$$

L'analisi seguente della domanda impiega spesso la matrice di sostituzione $S(p, m)$ (che viene fuori nel corso della dimostrazione della

²⁰ Utilizzando la regola di inversione delle matrici ripartite secondo cui

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -(A_{12} A_{22}^{-1} A_{21})^{-1} & (A_{12} A_{22}^{-1} A_{21})^{-1} A_{12} A_{22}^{-1} \\ A_{22}^{-1} A_{21} (A_{12} A_{22}^{-1} A_{21})^{-1} & A_{22}^{-1} - A_{22}^{-1} A_{21} (A_{12} A_{22}^{-1} A_{21})^{-1} A_{12} A_{22}^{-1} \end{bmatrix}$$

ove A è una matrice $n \times n$, A_{22} è una matrice $n_2 \times n_2$ con determinante non nullo, 0 è una matrice $n_1 \times n_1$ composta da elementi nulli (con $n_1 + n_2 = n$), A_{12} è una matrice $n_1 \times n_2$ e A_{21} è una matrice $n_2 \times n_1$. Nel caso nel testo, $n_1 = 1$.

Proposizione 3.12). La definizione e le proprietà principali di questa matrice sono indicate dalla proposizione seguente.

Proposizione 3.14 La matrice

$$S(p, m) = D_p d(p, m) + (D_m d(p, m)) d(p, m)^T$$

è denominata *matrice di sostituzione o matrice di Slutsky*. Essa è simmetrica, soddisfa la condizione $S(p, m) p = 0$, ed è semidefinita negativa.

Dimostrazione. Dalla Proposizione 3.12 si ottiene

$$S(p, m) = \lambda^* \left((D^2 u)^{-1} - \frac{(D^2 u)^{-1} p p^T (D^2 u)^{-1}}{p^T (D^2 u)^{-1} p} \right)$$

Allora, la simmetria di S è evidente: essendo $D^2 u(x^*)$ simmetrica, anche la sua inversa è simmetrica e, quindi, la trasposta di S coincide con S . E' anche subito evidente che $S p = 0$ (basta moltiplicare per p la matrice S) e, quindi, $p^T S = 0$. Questa condizione implica che la matrice S è singolare (infatti, essendo le sue righe e colonne linearmente dipendenti, il determinante è nullo). Si prenda, ora, in considerazione un qualsiasi vettore $\beta \in \mathbb{R}^k$ e si introduca il vettore $\alpha = S \beta$. Risulta $\alpha^T p = 0$ dal momento che $\alpha^T p = \beta^T S p = 0$. Le condizioni del secondo ordine del problema $\max_{x \geq 0, px=m} u(x)$ richiedono $\alpha^T D^2 u(x^*) \alpha \leq 0$

(come indicato nella Proposizione 3.11), cioè, essendo $\alpha = S \beta$, $\beta^T S D^2 u S \beta = \lambda^* \beta^T S \beta \leq 0$, per cui, essendo $\lambda^* > 0$ (come indicato nel Paragrafo 3.8), si ha $\beta^T S \beta \leq 0$, che è la condizione richiesta perché la matrice S sia semidefinita negativa. $\square$

La matrice di sostituzione può essere interpretata nel modo seguente.

Si immagini che al variare dei prezzi p vari anche la capacità di spesa m in modo che rimanga costante la sua capacità reale, definita in base alla possibilità di conseguire lo stesso livello di utilità (cioè, se $x^* \in d(p, m)$ e p diviene p' , la capacità reale di spesa non varia se si ha m' al posto di m e risulta $u(x') = u(x^*)$ per $x' \in d(p', m')$)²¹. La corrispondenza di domanda che si ottiene con la compensazione $m' - m$ è la corrispondenza hicksiana, o compensata, di domanda, che associa panieri di beni x ad una coppia (p, u) .

Definizione 3.4 La *corrispondenza hicksiana, o compensata, di domanda* è la corrispondenza $h: \mathbb{R}_{++}^k \times U \rightarrow X$, ove $U = \{u \in \mathbb{R}: u = u(x) \text{ per almeno un } x \in X\}$, definita dalla condizione $h(p, u) = d(p, m(p, u))$, ove la funzione $m(p, u)$ determina la capacità di spesa con cui si consegue, con

²¹ Secondo una definizione alternativa, la capacità reale di spesa viene mantenuta se è possibile l'acquisto dello stesso paniere di beni, cioè se si prende $m'' = p' x^*$, perciò con $m'' - m = (p' - p) x^*$. Le due compensazioni ($m' - m$, denominata *compensazione di Hicks*, e $m'' - m$, *compensazione di Slutsky*) differiscono di poco tra loro. Nell'analisi differenziale esse differiscono solo per un infinitesimo di ordine superiore al primo, per cui si ottiene lo stesso risultato con entrambe le definizioni. Non sono, invece, equivalenti per variazioni finite (quali quelle descritte nelle Figure 3.18, 3.19 e 3.20). Non mutano, tuttavia, i risultati qualitativi, quelli, cioè, che riguardano il segno delle variazioni.

i prezzi p , l'utilità u , cioè $m(p, u) = \{m \in \mathbb{R}_+ : \max_{x \geq 0, px=m} u(x) = u\}$, ovvero $m(p, u) = \{m \in \mathbb{R}_+ : u^*(p, m(p, u)) = u\}$.²²

Proposizione 3.15 La corrispondenza hicksiana di domanda $h: \mathbb{R}_{++}^k \times U \rightarrow X$ è omogenea di grado zero rispetto ai prezzi (cioè, $h(\alpha p, u) = h(p, u)$ per ogni p, u e $\alpha > 0$). La funzione $m: \mathbb{R}_{++}^k \times U \rightarrow \mathbb{R}_+$ è omogenea di grado uno rispetto ai prezzi (cioè, $m(\alpha p, u) = \alpha m(p, u)$ per ogni p, u e $\alpha > 0$).

Dimostrazione. Per la dimostrazione basta fare riferimento alla Proposizione 3.8, secondo cui la corrispondenza walrasiana di domanda è omogenea di grado zero rispetto ai prezzi e alla capacità di spesa, e trarne le implicazioni del caso. $\square$

La successiva Proposizione 3.16 mostra come la matrice di sostituzione $S(p, m)$ sia collegata alla funzione hicksiana di domanda.

Proposizione 3.16 Prendendo in considerazione l'insieme $C'' \subset \mathbb{R}_+^{k+1}$ delle coppie (p, u) per le quali la corrispondenza hicksiana di domanda è una funzione con immagine positiva, ossia $h(p, u) \in \mathbb{R}_{++}^k$, risultano, per ogni $(p, u) \in C''$ ove la funzione $x^* = h(p, u)$ è differenziabile, le derivate

$$D_p h(p, u) = S(p, m(p, u))$$

$$D_u h(p, u) = \frac{1}{\lambda^*} \frac{(D^2 u)^{-1} p}{p^T (D^2 u)^{-1} p}$$

Dimostrazione. La funzione $m(p, u)$ è rappresentata implicitamente dalla condizione $u^* = u(d(p, m))$. Nel corso della dimostrazione della Proposizione 3.12 si era ricavata la relazione $du^* = \lambda^* (dm - x^{*T} dp)$, per cui la funzione $m(p, u)$ ha le derivate $D_p m(p, u) = x^*$ e $D_u m(p, u) = 1/\lambda^*$. Prendendo in considerazione l'uguaglianza $h(p, u) = d(p, m(p, u))$ e derivandola rispetto al vettore dei prezzi p e all'utilità u , si ottengono le seguenti relazioni, ove $m = m(p, u)$:

$$D_p h = D_p d + (D_m d) (D_p m)^T = D_p d + (D_m d) x^{*T}$$

$$D_u h = (D_m d) (D_u m) = \frac{1}{\lambda^*} D_m d$$

Introducendo le relazioni della Proposizione 3.12 in queste uguaglianze, risultano le relazioni indicate nell'enunciato della Proposizione. $\square$

Allora, la matrice di sostituzione $S(p, m)$ misura la dipendenza della domanda compensata dai prezzi, cioè quanto varia la domanda se viene depurata la variazione della capacità di spesa indotta dalla variazione dei prezzi. Con la depurazione, la variazione dei prezzi muta la scelta del consumatore mantenendo invariata l'utilità, per cui la variazione dei prezzi determina uno spostamento sulla curva di indifferenza per pervenire a quel paniere di beni che presenta saggi marginali di sostituzione uguali ai nuovi

²² Si noti come la funzione $m(p, u)$ sia la funzione inversa, rispetto a m , della funzione indiretta di utilità $u = u^*(p, m)$: la funzione inversa $m(p, u)$ è univocamente determinata poiché si ha, per la Proposizione 3.12, $D_m u^*(p, m) = \lambda^* > 0$.

rapporti di scambio. Dalle proprietà della matrice di sostituzione derivano le seguenti proprietà della funzione hicksiana di domanda.

Proposizione 3.17 La funzione hicksiana di domanda $h(p, u)$, introdotta dalla Definizione 3.4, presenta le seguenti proprietà:

$$\begin{aligned}\frac{\partial h_j(p, u)}{\partial p_j} &\leq 0 \text{ per ogni } j = 1, \dots, k \\ \frac{\partial h_\ell(p, u)}{\partial p_j} &= \frac{\partial h_j(p, u)}{\partial p_\ell} \text{ per ogni coppia } j, \ell = 1, \dots, k \\ \sum_{\ell=1}^k p_\ell \frac{\partial h_\ell(p, u)}{\partial p_j} &= 0 \text{ per ogni } j = 1, \dots, k\end{aligned}$$

Dimostrazione. Queste relazioni conseguono rispettivamente dal fatto che la matrice di sostituzione S è semidefinita negativa, simmetrica e con $S p = 0$ (come indicato dalla Proposizione 3.14). $\square$

La prima relazione indica che, se si accresce, *ceteris paribus*, il prezzo di un bene, allora decresce la quantità domandata di quel bene secondo la funzione compensata di domanda. Intuitivamente, in riferimento al caso con due beni, si consideri un innalzamento del prezzo del primo bene. Allora, il saggio marginale di sostituzione rispetto al primo bene si accresce (poiché p_1/p_2 è cresciuto) e, perciò, rimanendo sulla stessa curva di indifferenza e richiedendo la condizione del secondo ordine la sua convessità locale, ossia la decrescenza del saggio marginale di sostituzione, deve diminuire la quantità del primo bene. Si noti che, mentre si ha $\frac{\partial h_j(p, u)}{\partial p_j} \leq 0$, non vale

una relazione siffatta per la funzione walrasiana di domanda, cioè per $\frac{\partial d_j(p, m)}{\partial p_j}$. La seconda relazione indica (senza che vi sia una spiegazione

intuitiva per questo risultato) che di tanto varia la quantità del bene ℓ -esimo al variare del prezzo del bene j -esimo, di altrettanto varia la quantità del bene j -esimo al variare del prezzo del bene ℓ -esimo. Si noti, ancora, come non si abbia una relazione analoga per la funzione walrasiana di domanda. La terza relazione indica che, al variare del prezzo di un bene (il bene j -esimo) variano sì le quantità domandate (hicksianamente) dei beni, ma è nullo il valore totale delle loro variazioni.

Definizione 3.5 Due beni (l' ℓ -esimo e il j -esimo bene) sono definiti *beni sostituti, o succedanei*, in (p, u) , se $\frac{\partial h_\ell(p, u)}{\partial p_j} \geq 0$, *beni complementari*

se $\frac{\partial h_\ell(p, u)}{\partial p_j} \leq 0$. (Si noti come vi sia necessariamente almeno una coppia di beni sostituti: infatti la prima e la terza delle relazioni della Proposizione 3.17 implicano che vi sia almeno una coppia ℓ, j con $\frac{\partial h_\ell(p, u)}{\partial p_j} \geq 0$). Due

beni sono rispettivamente denominati *sostituti lordi e complementari lordi*

se queste relazioni valgono per le domande walrasiane (tenendo conto che, mentre si ha $\frac{\partial h_\ell(p, u)}{\partial p_j} = \frac{\partial h_j(p, u)}{\partial p_\ell}$, è generalmente $\frac{\partial d_\ell(p, m)}{\partial p_j} \neq \frac{\partial d_j(p, m)}{\partial p_\ell}$ e che può accadere che queste due ultime derivate abbiano segno diverso).²³

L'analisi finora compiuta sulle funzioni walrasiana e hicksiana di domanda consente di introdurre la relazione di Slutsky (1915), che distingue gli effetti di sostituzione e di reddito.

Proposizione 3.18 Prendendo in considerazione l'insieme $C' \subset \mathbb{R}_+^{k+1}$ delle coppie (p, m) per le quali la corrispondenza walrasiana di domanda è una funzione con immagine positiva, ossia $d(p, m) \in \mathbb{R}_{++}^k$, risulta, per ogni $(p, m) \in C'$ ove la funzione $x^* = d(p, m)$ è differenziabile, la *relazione di Slutsky*, ove $u = u^*(p, m)$,

$$D_p d(p, m) = D_p h(p, u) - (D_m d(p, m)) d(p, m)^T$$

ossia,

$$D_p d(p, m) = S(p, m) - (D_m d(p, m)) d(p, m)^T$$

cioè, per ogni coppia $j, \ell = 1, \dots, k$,

$$\frac{\partial d_\ell(p, m)}{\partial p_j} = \frac{\partial h_\ell(p, u)}{\partial p_j} - x_j^* \frac{\partial d_\ell(p, m)}{\partial m}$$

Dimostrazione. La relazione di Slutsky risulta immediatamente dalle Proposizioni 3.12 e 3.17. $\square$

La relazione di Slutsky può essere così interpretata. L'effetto, sulla quantità domandata dei beni, determinato dalla variazione del prezzo di un bene (ad esempio, di p_j) può essere scisso in due. I due effetti tengono conto che la variazione del prezzo altera, da un lato, i rapporti di scambio e, dall'altro lato, la capacità reale di spesa. Il primo effetto, provocato dalla variazione dei rapporti di scambio a parità di capacità reale di spesa, è colto tramite la funzione hicksiana di domanda, compensando la variazione della capacità reale di spesa. Questo effetto viene chiamato *effetto di sostituzione* ed è misurato dalla matrice di sostituzione $S(p, m)$. Il secondo effetto, provocato dalla variazione della capacità reale di spesa a parità di rapporti di scambio, è colto dall'*effetto di reddito*, rappresentato dal secondo addendo della relazione di Slutsky (cioè, un aumento di p_j riduce la capacità reale di

²³ Questa definizione riferisce la relazione di succedaneità e complementarità all'effetto della variazione del prezzo di un bene sulla quantità domandata dell'altro (per cui, ad esempio, i servizi ferroviari e quelli aerei sono sostituti se l'aumento del prezzo degli uni, *ceteris paribus*, accresce la quantità domandata degli altri, e automobili e benzina sono complementari se risulta l'effetto opposto). Esiste una definizione diversa della stessa relazione, che prende in considerazione la derivata seconda mista della funzione di utilità, cioè $\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_\ell \partial x_j}$, e definisce i due beni come sostituti se essa è negativa e come complementari se è positiva. Però questa definizione non è ordinale, poiché il segno della derivata non è invariante rispetto a trasformazioni monotone crescenti della funzione di utilità. In altri termini, essa implica la nozione cardinale di utilità.

spesa in misura pari all'incremento della spesa provocato da dp_j , che è $x_j^* dp_j$, e questa riduzione modifica la quantità acquistata dei beni secondo la loro dipendenza dalla capacità di spesa, misurata da $D_m d(p, m)$.

Definizione 3.6 Relativamente ad una coppia $(p, m) \in \mathbb{R}_+^{k+1}$, i beni la cui domanda è funzione crescente della capacità di spesa sono denominati *beni normali*, quelli la cui domanda è decrescente *beni inferiori*; i beni la cui domanda è funzione decrescente del loro prezzo sono denominati *beni ordinari*, quelli la cui domanda è crescente *beni di Giffen*. Più precisamente, il bene h -esimo è un bene normale, relativamente alla coppia (p, m) , se $\frac{\partial d_h(p, m)}{\partial m} > 0$, è inferiore se $\frac{\partial d_h(p, m)}{\partial m} < 0$, è ordinario se $\frac{\partial d_h(p, m)}{\partial p_h} < 0$, è un bene di Giffen se $\frac{\partial d_h(p, m)}{\partial p_h} > 0$.

Proposizione 3.19 Non possono tutti i beni essere inferiori relativamente ad una coppia $(p, m) \in \mathbb{R}_+^{k+1}$. Inoltre, ogni bene normale è ordinario, ossia un bene può essere un bene di Giffen solo se è inferiore.

Dimostrazione. Essendo $p d(p, m) = m$, si ottiene, derivando rispetto a m , che $p D_m d(p, m) = 1$, perciò, essendo $p > 0$, esiste almeno un h per cui $\frac{\partial d_h(p, m)}{\partial m} > 0$. Poi, la Proposizione 3.17 richiede che $\frac{\partial d_j(p, m)}{\partial p_j} \leq 0$ per ogni $j = 1, \dots, k$ e la definizione di bene normale che $\frac{\partial d_j(p, m)}{\partial m} > 0$. Allora, essendo $x_j^* > 0$, la relazione di Slutsky implica, per ogni bene normale, $\frac{\partial d_j(p, m)}{\partial p_j} < 0$. Ne consegue che per avere un bene di Giffen occorre (sebbene non basti) che il bene sia inferiore.²⁴ □

²⁴ L'effetto di Giffen (Robert Giffen, 1837-1910) è indicato da Marshall (1920, 1972, p. 227) nei seguenti termini: "come ha mostrato sir R. Giffen, un aumento del prezzo del pane comporta una detrazione così forte delle risorse delle famiglie lavoratrici più povere, e innalza tanto l'utilità marginale della moneta per loro, che esse sono costrette a ridurre il consumo di carne e degli alimenti farinacei più costosi; e, siccome il pane è ancora l'alimento meno caro che esse possano avere e siano disposte ad accettare, ne consumano di più e non di meno". Si può, tuttavia, notare come nel contesto dell'analisi di Marshall, in cui la funzione di utilità è additivamente separabile e strettamente concava, cioè del tipo $\sum_{h=1}^k u_h(x_h)$, con $\frac{d^2 u_h(x_h)}{dx_h^2} < 0$ per $h = 1, \dots, k$, tutti i beni siano necessariamente normali, risultando (in base alla seconda relazione della Proposizione

3.12) $\frac{\partial d_h(p, m)}{\partial m} = \frac{p_h}{\frac{d^2 u_h}{dx_h^2}} \frac{1}{\sum_{j=1}^k \frac{p_j^2}{\frac{d^2 u_j}{dx_j^2}}} > 0$, per cui l'effetto di Giffen è escluso (Green, 1976, pp.

119-121). Se la funzione di utilità additivamente separabile non è strettamente concava, le condizioni di secondo ordine per la sua massimizzazione implicano che la derivata seconda dell'utilità possa essere positiva per non più di un bene e si ottiene che, se questo accade per un bene (cioè, l'utilità marginale di questo bene è crescente in corrispondenza alla quantità scelta), allora tutti gli altri beni sono inferiori (è, cioè, normale solo un bene, quello che presenta positiva la derivata seconda dell'utilità) e l'utilità marginale della moneta (cui

La distinzione tra effetto di sostituzione ed effetto di reddito può essere anche rappresentata geometricamente (sebbene con qualche approssimazione).

Nelle Figure 3.18, 3.19 e 3.20 è descritta la variazione (da x^* a $x^{*'}$) della scelta di consumo determinata da un incremento del prezzo del primo bene (da p_1 a p_1'). L'effetto totale è scomposto negli effetti di sostituzione (da x^* a x_s^*) e di reddito (da x_s^* a $x^{*'}$). La variazione compensativa della capacità di spesa, pari a Δm (positiva, poiché l'aumento del prezzo riduce la capacità reale di spesa), risulta dalla condizione che x_s^* sia sulla curva di indifferenza di x^* . Nella Figura 3.18 entrambi i beni sono normali (infatti $x_s^* > x^{*'}$) e il primo bene è, come deve essere, ordinario (per cui $x_1^{*' } < x_1^*$). Nelle Figure 3.19 e 3.20 il primo bene è inferiore. Però, mentre nella Figura 3.19 esso è un bene ordinario, nella Figura 3.20 è un bene di Giffen.

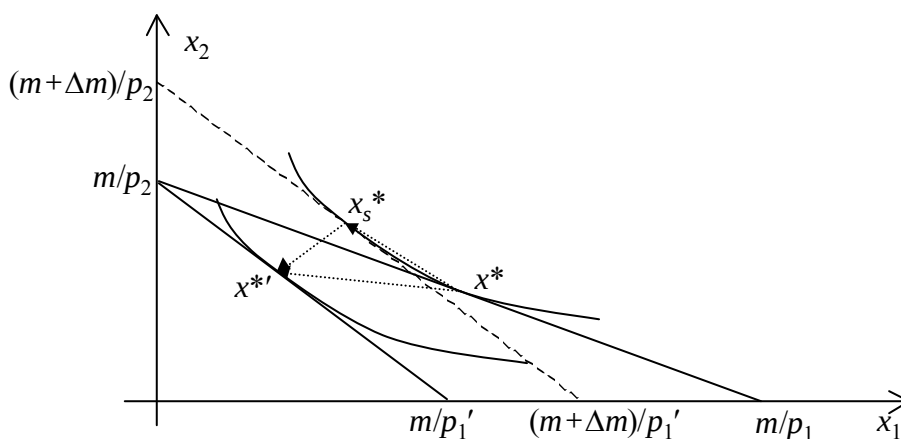


Figura 3.18

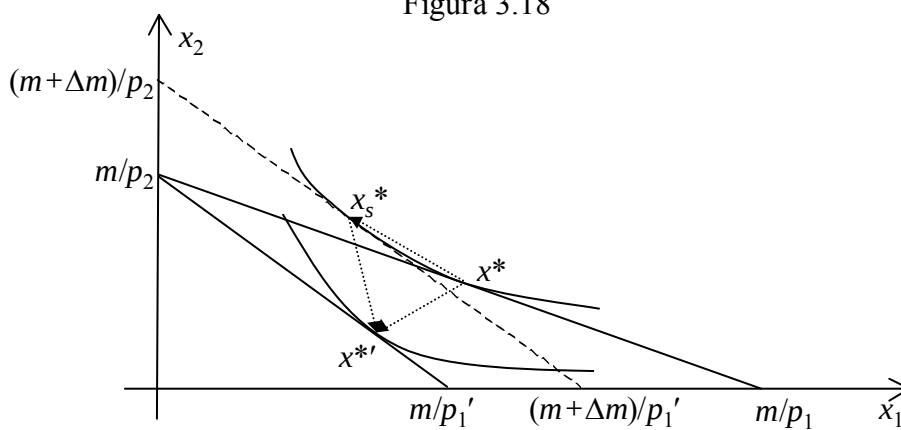


Figura 3.19

corrisponde, nell'analisi moderna, il valore $\lambda^*(p, m)$ del moltiplicatore di Lagrange) è crescente rispetto a m (mentre è decrescente se la funzione di utilità è strettamente concava). Per qualcuno dei beni inferiori potrebbe anche risultare positiva la derivata della domanda rispetto al prezzo dello stesso bene. L'effetto di Giffen si presenterebbe, in tal caso, in un contesto ben diverso da quello riportato all'inizio di questa nota, contesto in cui i beni diversi dal pane sono immaginati normali (non uno soltanto di essi) e l'utilità marginale della moneta è supposta essere funzione decrescente della capacità di spesa. Quindi, non si applica ad ogni bene di Giffen la tradizionale interpretazione suggerita dal fenomeno descritto da Giffen e riportata all'inizio di questa nota.

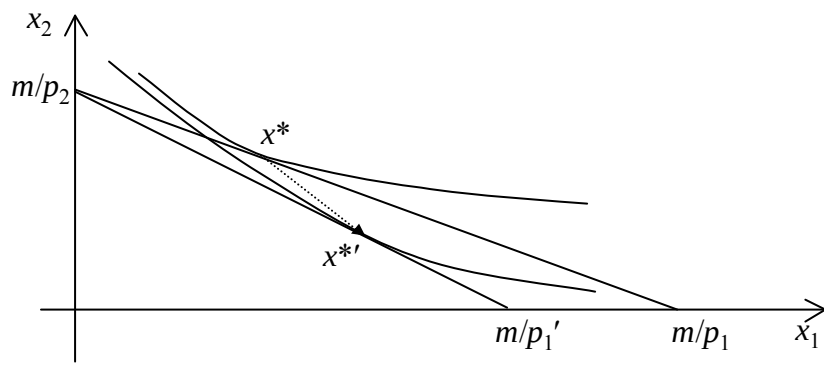


Figura 3.20