

## Cap. 6 SCELTA E TEMPO

Le analisi precedenti delle scelte di consumo e di produzione hanno considerato beni definiti anche in relazione al tempo della loro disponibilità, includendo, quindi, anche gli aspetti intertemporali. Ad esempio, la scelta di produzione può riguardare un input disponibile al tempo  $t$  ed un output disponibile al tempo  $t + 2$ , tenendo così conto del tempo occorrente per la produzione. In questo capitolo vengono posti in evidenza gli aspetti principali della scelta in relazione al tempo. La qualificazione *dinamica*, talvolta usata, significa che la scelta ha a che fare con funzioni del tempo. Conviene, a questo proposito, distinguere due situazioni: quella in cui vi è un'unica decisione iniziale che ha per oggetto quantità di beni disponibili in tempi diversi, e quella in cui vi è una successione di decisioni. Nel primo caso, la scelta è unica ed ha per oggetto funzioni del tempo (che indicano quantità di beni in relazione al tempo di disponibilità). Nel secondo caso, vi è una successione di scelte e, quindi, una funzione del tempo che le rappresenta in relazione al tempo di decisione. Tuttavia, questa distinzione spesso non viene evidenziata perché vengono introdotte ipotesi che rendono le scelte uguali nei due casi, nel senso che vengono determinate nei due casi le stesse quantità di beni (o, meglio, le stesse funzioni del tempo che rappresentano le quantità di beni in relazione al tempo di disponibilità). Quando ciò accade, si dice che vi è *coerenza dinamica temporale*.

Un esempio di incoerenza temporale è rappresentato dalla storia di Ulisse e le sirene (illustrata da Strotz, 1956). Ulisse può scegliere tra ascoltare e non ascoltare il canto delle sirene sapendo che se lo ascolta può risultarne ammaliato tanto da andare da loro, che lo uccideranno. Egli desidera ascoltarle ma non cadere preda delle sirene (per questo, si fa legare all'albero della nave e tappa le orecchie ai suoi marinai). Vi sono, allora, due tempi: prima dell'ascolto delle sirene e dopo. Le sue preferenze, se la scelta è unica, fra le tre possibili alternative (ascoltare e andare dalle sirene, indicata con  $a$ ; ascoltare e non andare dalle sirene,  $a'$ ; e non ascoltare,  $a''$ ), sono  $a' \succ a'' \succ a$ . Se vi è una successione di due scelte, le alternative sono, nel primo tempo, tra ascoltare,  $a_1$ , e non ascoltare,  $a_1'$ , e, se è stata scelta nel primo tempo l'alternativa  $a_1$ , vi è il secondo tempo di scelta, tra le

due alternative: andare dalle sirene,  $a_2$ , o non andare dalle sirene,  $a_2'$ . In questo caso, le preferenze nel secondo tempo sono  $a_2 \succ a_2'$ . Allora, siccome le preferenze nel primo tempo richiedono  $(a_1 \text{ e } a_2') \succ a_1' \succ (a_1 \text{ e } a_2)$  (queste preferenze coincidono con le preferenze  $a' \succ a'' \succ a$  già indicate), conviene scegliere, nel primo tempo, l'alternativa  $a_1'$  (scegliendo l'altra alternativa, cioè  $a_1$ , l'agente sa che nel secondo tempo sceglierebbe  $a_2$ , pervenendo così ad un esito inferiore). Vi è incoerenza temporale perché nel primo caso, quando la scelta è unica, viene scelto  $a'$  (ascoltare e non andare dalle sirene), mentre nel secondo caso, quando vi è una successione di scelte, viene scelto  $a_1'$  (non ascoltare), risultando così comportamenti diversi. Un lettore perspicace nota che vi può essere incoerenza temporale solo se le preferenze in qualche tempo dipendono dalle scelte compiute in tempi precedenti. Nota, anche, che quanto descritto può essere una rappresentazione dei fenomeni di dipendenza (ad esempio, da droghe). L'astuzia di Ulisse consiste nella trasformazione del problema con scelte successive in un problema a scelta unica, riuscendo così a procurarsi l'esito preferito: questa trasformazione, purtroppo, non sempre è possibile (cosa avrebbe fatto Ulisse se non avesse potuto farsi legare o non avesse potuto rendere sordi, temporaneamente, i marinai?).

Nel seguito di questo capitolo viene esaminato soltanto il caso a scelta unica, indicato anche come *scelta intertemporale*, introducendo gli strumenti analitici più semplici in uso. L'aspetto più importante che caratterizza questo caso di scelta consiste nella dipendenza dell'insieme delle azioni possibili in un certo tempo dalle azioni dei tempi precedenti. In altri termini, l'agente sceglie nel tempo iniziale (indicato con  $t = 0$ ) una successione (finita o infinita) di *azioni temporanee*  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_T$  tenendo conto che l'azione temporanea del tempo  $t$ , cioè,  $a_t$ , può essere scelta in un insieme  $B_t$  che è generalmente una funzione delle azioni temporanee dei tempi precedenti, cioè,  $B_t(a_0, a_1, \dots, a_{t-1})$  per  $t > 0$ , mentre, per  $t = 0$ , vi è un insieme di azioni possibili  $B_0$ . Si noti che la scelta intertemporale è dinamica nell'oggetto, perché oggetto di scelta è una funzione del tempo, pur essendo una scelta statica, nel senso che vi è un'unica scelta, non una successione temporale di scelte. Si applica, perciò, alla scelta intertemporale quanto indicato nel Capitolo 2: l'*azione intertemporale* è  $a = (a_0, a_1, \dots, a_T)$ , cioè, un vettore di azioni temporanee, l'insieme delle azioni intertemporali possibili è

$$B = \{(a_0, a_1, \dots, a_T): a_0 \in B_0 \text{ e } a_t \in B_t(a_0, a_1, \dots, a_{t-1}) \text{ per } t = 1, \dots, T\}$$

e si ha un insieme di scelta  $S(B) \subseteq B$ .

La scelta intertemporale è particolarmente interessante in condizioni di incertezza. Quanto contenuto in questo capitolo, in cui l'incertezza è assente, è, tuttavia, un'utile introduzione per il caso con incertezza.

## 6.1 Preferenze e scelta di consumo intertemporali

Si consideri la scelta intertemporale di consumo e sia il sistema di preferenza del consumatore rappresentato da una funzione ordinale di utilità  $U(x_0, x_1, x_2, \dots, x_T)$ , ove  $x_t \in \mathbb{R}_+^k$  indica il consumo temporaneo del tempo  $t$  (si tenga presente che, essendo stata esplicitata la disponibilità nel tempo dei beni, le caratteristiche qualitative che definiscono un bene non includono il tempo in cui il bene è disponibile) e  $T$  è l'orizzonte temporale del consumatore (è un numero intero positivo finito o infinito).

Vengono correntemente introdotte ipotesi sulla funzione di utilità, che, da un lato, rendono più facile la trattazione matematica e che, dall'altro lato, rappresentano, almeno approssimativamente, preferenze realistiche. Si assume, cioè, che il sistema di preferenza possa essere rappresentato da una funzione di utilità che gode delle proprietà seguenti (la seconda di esse implica la prima).

La prima ipotesi qui considerata introduce la *separabilità additiva* della funzione di utilità, suppone, cioè, che questa sia del tipo

$$U(x_0, x_1, x_2, \dots, x_T) = \sum_{t=0}^T u_t(x_t)$$

ossia, che l'*utilità intertemporale*  $U$  sia la somma di *utilità temporanee*  $u_t$ . Questa ipotesi non è, ad esempio, soddisfatta se il segno della differenza  $U(x_0, x_1', \dots, x_T') - U(x_0, x_1, \dots, x_T)$  dipende da  $x_0$ , come può accadere se il consumatore tiene conto, nelle sue preferenze, delle modificazioni nel tempo dei consumi.

La seconda ipotesi introduce l'uguaglianza nel tempo delle utilità temporanee a meno di un *fattore soggettivo di sconto*, costante nel tempo, assume, cioè,

$$U(x_0, x_1, \dots, x_T) = \sum_{t=0}^T \delta^t u(x_t)$$

ove  $\delta \in (0, 1]$  è il fattore di sconto, che rende i consumi futuri inferiori, nelle preferenze, ai consumi presenti. Questa ipotesi non è soddisfatta se, ad esempio, vi sono dei beni, come il *windsurf*, che il consumatore sa di gradire da giovane, ma non da vecchio. Si noti che questa funzione è indipendente, a parità di tempi di consumo e a meno di un fattore di proporzionalità (ininfluente sulla scelta), dalla data del tempo di scelta. Cioè, indicando con  $h$  questa data e con  $U^h$  la corrispondente utilità intertemporale, si hanno  $U^h(x_h, \dots, x_{h+T}) = \sum_{t=0}^T \delta^t u(x_{h+t})$  e  $U^0(x_h, \dots, x_{h+T}) = \sum_{t=0}^T \delta^{h+t} u(x_{h+t})$ , per cui  $U^0(x_h, \dots, x_{h+T}) = \delta^h U^h(x_h, \dots, x_{h+T})$ .

Si assume, infine, che la funzione di utilità temporanea sia fortemente monotona (cioè,  $u(x_t') > u(x_t)$  se  $x_t' > x_t$ ) e concava.

Un esempio tipico di scelta intertemporale è la scelta dei consumi lungo l'intera vita dell'agente dato un flusso di redditi  $I_0, I_1, \dots, I_T$  (non negativi).

Se  $T = 0$ , si ha il problema

$$\max_{x_0 \in B(p_0, I_0)} u(x_0) \quad \text{ove } B(p_0, I_0) = \{x_0 \in \mathbb{R}_+^k : p_0 x_0 \leq I_0\}$$

già esaminato nel Capitolo 3.

Se  $T = 1$  (ossia, l'orizzonte economico si estende per un periodo di tempo oltre quello iniziale), assumendo che l'agente possa dare o prendere in prestito al tasso d'interesse  $i$  somme di danaro, si ha il problema

$$\max_{(x_0, x_1) \in B(p_0, p_1, I_0, I_1)} u(x_0) + \delta u(x_1)$$

ove  $B(p_0, p_1, I_0, I_1) = \{x_0, x_1 \in \mathbb{R}_+^k : p_0 x_0 + \frac{p_1 x_1}{1+i} \leq I_0 + \frac{I_1}{1+i}\}$ , poiché la

somma  $S_1 = I_0 - p_0 x_0$  risparmiata (se positiva) o presa in prestito (se negativa) determina, per il secondo tempo, il vincolo di bilancio  $p_1 x_1 \leq I_1 +$

$(1+i) S_1$ . Il vincolo  $p_0 x_0 + \frac{p_1 x_1}{1+i} \leq I_0 + \frac{I_1}{1+i}$  viene indicato come *vincolo di*

*bilancio intertemporale* e richiede che il valore attuale della spesa non superi il valore attuale dei redditi. (Se non fosse possibile il trasferimento

nel tempo della ricchezza, si avrebbero i due vincoli  $p_0 x_0 \leq I_0$  e  $p_1 x_1 \leq I_1$ .

In questo caso, la scelta intertemporale coinciderebbe con l'insieme delle due scelte temporanee isolate  $\max_{x_0 \in B(p_0, I_0)} u(x_0)$  e  $\max_{x_1 \in B(p_1, I_1)} u(x_1)$ . Se fosse

possibile dare in prestito ma non prendere in prestito, si avrebbe il vincolo

$$B(p_0, p_1, I_0, I_1) = \{x_0, x_1 \in \mathbb{R}_+^k : p_0 x_0 \leq I_0 \text{ e } p_0 x_0 + \frac{p_1 x_1}{1+i} \leq I_0 + \frac{I_1}{1+i}\}.$$

Tenendo presente che l'ipotesi di utilità monotona implica che la scelta soddisfi il vincolo di bilancio come eguaglianza, si può introdurre la funzione lagrangiana

$$L(x_0, x_1, \lambda) = u(x_0) + \delta u(x_1) - \lambda (p_0 x_0 + \frac{p_1 x_1}{1+i} - I_0 - \frac{I_1}{1+i})$$

da cui risultano le condizioni del primo ordine, per una soluzione interna (cioè, con  $x_0^* \gg 0$  e  $x_1^* \gg 0$ ),

$$Du(x_0^*) = \lambda^* p_0$$

$$\delta Du(x_1^*) = \lambda^* p_1 / (1+i)$$

$$p_0 x_0^* + \frac{p_1 x_1^*}{1+i} = I_0 + \frac{I_1}{1+i}$$

Le condizioni del secondo ordine sono soddisfatte per l'ipotesi che la funzione di utilità temporanea  $u(x_t)$  sia concava.

Si noti come l'ipotesi che la funzione di utilità temporanea sia fortemente monotona implichi, se  $p_0 = p_1 \gg 0$ , per cui  $(1+i) \delta Du(x_1^*) = Du(x_0^*)$ , che  $x_1^* \gg x_0^*$  se  $\delta > 1/(1+i)$  (cioè, se il tasso soggettivo di sconto, che misura l'utilità nel tempo iniziale equivalente ad un'unità di utilità nel tempo successivo, cioè, la pazienza dell'agente, è maggiore del tasso oggettivo di sconto, che misura quanto vale nel tempo iniziale un'unità di spesa disponibile nel tempo successivo) e  $x_1^* \ll x_0^*$  se  $\delta < 1/(1+i)$ .

Quindi, se  $I_0 = I_1$ ,  $p_0 = p_1 >> 0$  e  $\delta > 1/(1+i)$ , si ha  $I_1 < p_1 x_1^* > p_0 x_0^* < I_0$ , mentre, se  $\delta < 1/(1+i)$ , si ha  $I_1 > p_1 x_1^* < p_0 x_0^* > I_0$ .

L'analisi di statica comparata della scelta  $(x_0^*, x_1^*)$  individuata dalle relazioni precedenti è interessante in relazione alla scelta del risparmio  $S_1^* = I_0 - p_0 x_0^*$ . Si tratta, in particolare, di determinare la dipendenza del risparmio  $S_1^*$  dal tasso di interesse  $i$ , cioè la derivata  $\frac{\partial S_1^*}{\partial i}$ . Si desume,

con le ipotesi indicate, che questa derivata è non negativa per la componente costituita dall'effetto di sostituzione ed è negativa se il risparmio  $S_1^*$  è positivo (e positiva se il risparmio  $S_1^*$  è negativo) per la componente costituita dall'effetto di reddito (analogamente a quanto indicato nel paragrafo 4.5). Quindi, l'offerta di risparmio risultante dalle relazioni precedenti non è necessariamente funzione crescente del tasso d'interesse: ne è funzione decrescente se il risparmio è positivo e l'effetto di reddito prevale su quello di sostituzione.

La dimostrazione di quanto appena indicato può essere ottenuta riprendendo la relazione di Slutsky così come presentata nel Paragrafo 4.5. Ponendo  $I_0 = p_0 \omega_0$ ,  $I_1 = p_1 \omega_1$ ,  $z_0 = x_0 - \omega_0$ ,  $z_1 = x_1 - \omega_1$ ,  $z^T = [z_0^T, z_1^T]$  e  $p^T = [(1+i)p_0^T, p_1^T]$ , il vincolo di bilancio  $p_0 x_0 + \frac{p_1 x_1}{1+i} \leq I_0 + \frac{I_1}{1+i}$

diviene  $p z \leq 0$  e si ha il problema  $\max_{pz \leq 0} u(z_0 + \omega_0) + \delta u(z_1 + \omega_2)$ , che è un

caso particolare del problema trattato nel Paragrafo 4.5. Poiché  $S_1 = -p_0 z_0$ ,

si ha  $\frac{\partial S_1^*}{\partial i} = -p_0^T \frac{\partial e_0(p)}{\partial i} = -p_0^T D_p e_0(p) \begin{bmatrix} p_0 \\ 0 \end{bmatrix}$ , ove  $e(p) =$

$\arg \max_{pz \leq 0} u(z_0 + \omega_0) + \delta u(z_1 + \omega_2)$ , con  $e(p) = \begin{bmatrix} e_0(p) \\ e_1(p) \end{bmatrix}$ . La relazione di

Slutsky indicata nel Paragrafo 4.5 richiede  $D_p e(p) = S(p) - D_m e(p, m) e(p)^T$ , ove  $S(p)$  è la matrice di sostituzione e  $m = (1+i)I_0 + I_1$ . Essendo  $e_0(p) = [I, 0] e(p)$ , ove  $I$  e  $0$  sono rispettivamente la matrice identità e quella

nulla (entrambe matrici  $k \times k$ ), si ha che  $D_p e_0(p) = [I, 0] D_p e(p)$ , per cui

$D_p e_0(p) = [I, 0] S(p) - [I, 0] D_m e(p, m) e(p)^T$  e, quindi,  $\frac{\partial S_1^*}{\partial i} =$

$- \begin{bmatrix} p_0^T, 0^T \end{bmatrix} S(p) \begin{bmatrix} p_0 \\ 0 \end{bmatrix} - p_0^T D_m e_0(p, m) S_1^*$ . Essendo la matrice di

sostituzione semidefinita negativa, è  $- \begin{bmatrix} p_0^T, 0^T \end{bmatrix} S(p) \begin{bmatrix} p_0 \\ 0 \end{bmatrix} \geq 0$ , cioè

l'effetto di sostituzione è non negativo. L'effetto di reddito è negativo (positivo), assumendo che il consumo del primo periodo sia normale, ossia  $p_0^T D_m e_0(p, m) > 0$ , se  $S_1^* > 0$  ( $S_1^* < 0$ ).

Il problema precedente della scelta intertemporale con  $T = 1$  può essere risolto per stadi, anziché in un'unica soluzione, partendo dall'ultimo tempo. Si considera dapprima il problema

$$\max_{x_1 \in B_1(S_1, p_1, I_1)} u(x_1) \quad \text{ove } B_1(S_1, p_1, I_1) = \{x_1 \in \mathbb{R}_+^k : p_1 x_1 \leq I_1 + (1+i) S_1\}$$

la cui soluzione determina la corrispondenza di domanda  $x_1(S_1, p_1, I_1)$  e la funzione indiretta di utilità, denominata *funzione del valore massimo*,  $u_1^*(S_1, p_1, I_1) = \max_{x_1 \in B_1(S_1, p_1, I_1)} u(x_1)$ . Questo è il problema che il consumatore

si porrebbe nel tempo  $t = 1$  subordinatamente al risparmio  $S_1$  nel tempo iniziale. La scelta per il tempo  $t = 0$  deve, perciò, tenere conto anche di questa influenza di  $S_1$ , in relazione all'utilità intertemporale. Si ha, allora, per il tempo  $t = 0$ , il problema

$$\max_{(x_0, S_1) \in B_0(p_0, I_0)} u(x_0) + \delta u_1^*(S_1, p_1, I_1)$$

ove  $B_0(p_0, I_0) = \{x_0 \in \mathbb{R}_+^k, S_1 \in \mathbb{R} : p_0 x_0 + S_1 = I_0\}$ . La soluzione di questo problema determina il consumo del tempo iniziale  $x_0$  e il risparmio  $S_1$ , che determina il consumo del primo tempo successivo  $x_1$  tramite la corrispondenza di domanda  $x_1(S_1, p_1, I_1)$ .

Per i problemi indicati possono essere introdotte le funzioni lagrangiane

$$L_1(x_1, \lambda_1) = u(x_1) - \lambda_1(p_1 x_1 - I_1 - (1+i) S_1)$$

$$L_0(x_0, S_1, \lambda_0) = u(x_0) + \delta u_1^*(S_1, p_1, I_1) - \lambda_0(p_0 x_0 + S_1 - I_0)$$

da cui risultano, rispettivamente, le condizioni del primo ordine

$$Du(x_1^*) = \lambda_1^* p_1, \quad p_1 x_1^* = I_1 + (1+i) S_1^*$$

e

$$Du(x_0^*) = \lambda_0^* p_0, \quad \delta \frac{\partial u_1^*}{\partial S_1} = \lambda_0^*, \quad p_0 x_0^* + S_1^* = I_0$$

Tenendo conto che  $\frac{\partial u_1^*}{\partial S_1} = \lambda_1^*(1+i)$  (Proposizione 3.11), si ricava che  $\lambda_0^* = \lambda_1^* \delta (1+i)$  e, quindi, ponendo  $\lambda^* = \lambda_0^*$ , queste condizioni del primo ordine coincidono con quelle trovate per il problema originario (senza la divisione in due stadi).

Quanto indicato per il caso con  $T = 1$  può essere esteso al caso con un numero di tempi qualsiasi, cioè, con  $T > 1$ . Indicando con  $p, x$  e  $I$ , rispettivamente, i vettori  $(p_0, p_1, \dots, p_T)$ ,  $(x_0, x_1, \dots, x_T)$  e  $(I_0, I_1, \dots, I_T)$ , si ha il problema intertemporale

$$\max_{x \in B(p, I)} \sum_{t=0}^T \delta^t u(x_t) \quad \text{ove } B(p, I) = \{x \in \mathbb{R}_+^{k(T+1)} : \sum_{t=0}^T \frac{p_t x_t}{(1+i)^t} \leq \sum_{t=0}^T \frac{I_t}{(1+i)^t}\}$$

Dalla funzione lagrangiana

$$L(x, \lambda) = \sum_{t=0}^T \delta^t u(x_t) - \lambda \left( \sum_{t=0}^T \frac{p_t x_t}{(1+i)^t} - \sum_{t=0}^T \frac{I_t}{(1+i)^t} \right)$$

risultano le condizioni del primo ordine

$$\delta^t Du(x_t^*) = \lambda^* p_t (1+i)^{-t} \text{ per } t = 0, 1, \dots, T, \quad \sum_{t=0}^T \frac{p_t x_t^*}{(1+i)^t} = \sum_{t=0}^T \frac{I_t}{(1+i)^t}$$

Anche questo problema può essere risolto per stadi, anziché in un'unica soluzione, partendo dall'ultimo tempo (che qui è il  $T$ -esimo), a condizione che  $T$  sia finito. Per  $t = T$ , si ha il problema

$$\max_{x_T \in B_T(S_T, p_T, I_T)} u(x_T) \quad \text{ove } B_T(S_T, p_T, I_T) = \{x_T \in \mathbb{R}_+^k : p_T x_T \leq I_T + (1+i)S_T\}$$

la cui soluzione determina la corrispondenza di domanda  $x_T(S_T, p_T, I_T)$  e la funzione del valore massimo  $u_T^*(S_T, p_T, I_T) = \max_{x_T \in B_T(S_T, p_T, I_T)} u(x_T)$ . Per ogni

$t = T-1, T-2, \dots, 1$ , si ha il problema

$$\max_{(x_t, S_{t+1}) \in B_t(S_t, p_t, I_t)} u(x_t) + \delta u_{t+1}^*(S_{t+1}, p_{t+1}, I_{t+1})$$

ove  $B_t(S_t, p_t, I_t) = \{x_t \in \mathbb{R}_+^k, S_{t+1} \in \mathbb{R} : p_t x_t + S_{t+1} = I_t + (1+i)S_t\}$ , la cui soluzione determina le corrispondenze  $x_t(S_t, p_t, I_t)$ ,  $S_{t+1}(S_t, p_t, I_t)$  e la funzione  $u_t^*(S_t, p_t, I_t) = \max_{(x_t, S_{t+1}) \in B_t(S_t, p_t, I_t)} u(x_t) + \delta u_{t+1}^*(S_{t+1}, p_{t+1}, I_{t+1})$ . Infine, per il tempo 0, si ha il problema

$$\max_{(x_0, S_1) \in B_0(p_0, I_0)} u(x_0) + \delta u_1^*(S_1, p_1, I_1) \quad \text{ove } B_0(p_0, I_0) = \{x_0 \in \mathbb{R}_+^k, S_1 \in \mathbb{R} : p_0 x_0 + S_1 = I_0\}$$

la cui soluzione determina il consumo  $x_0$  e il risparmio  $S_1$  del tempo iniziale. Questi determinano il consumo  $x_1$  e la ricchezza (risparmio totale)  $S_2$  del primo tempo successivo tramite le corrispondenze  $x_1(S_1, p_1, I_1)$  e  $S_2(S_1, p_1, I_1)$ , e così via, per ogni  $t = 1, 2, \dots, T$ , tramite le corrispondenze  $x_t(S_t, p_t, I_t)$  e  $S_{t+1}(S_t, p_t, I_t)$ .

Introducendo per questi problemi le funzioni lagrangiane

$$L_t(x_t, S_{t+1}, \lambda_t) = u(x_t) + \delta u_{t+1}^*(S_{t+1}, p_{t+1}, I_{t+1}) - \lambda_t (p_t x_t + S_{t+1} - I_t - (1+i)S_t),$$

$t = 0, 1, \dots, T$

con  $S_0 = S_{T+1} = 0$  e  $u_{T+1}^*(S_{T+1}, p_{T+1}, I_{T+1}) = 0$ , risultano le condizioni del primo ordine

$$\begin{aligned} Du(x_t^*) &= \lambda_t^* p_t, & p_t x_t^* + S_{t+1}^* &= I_t + (1+i)S_t^*, & \text{per } t = 0, 1, \dots, T \\ \delta \frac{\partial u_{t+1}^*}{\partial S_{t+1}} &= \lambda_t^* & & & \text{per } t = 0, 1, \dots, T-1 \end{aligned}$$

Tenendo poi conto che  $\frac{\partial u_{t+1}^*}{\partial S_{t+1}} = \lambda_{t+1}^* (1+i)$ , si ricava che  $\lambda_t^* = \lambda_{t+1}^* \delta (1+i)$

e, quindi,  $\lambda_t^* = \lambda_0^* \delta^{-t} (1+i)^{-t}$ . Perciò, ponendo  $\lambda^* = \lambda_0^*$ , queste condizioni del primo ordine coincidono con quelle trovate per il problema originario (senza la divisione in  $T+1$  stadi).

## 6.2 Il principio del massimo

Vi sono diversi metodi matematici per risolvere problemi di scelta intertemporale. Qui ne vengono indicati, in modo molto semplificato, due, i più frequentemente usati in economia: il principio del massimo (di Pontryagin) e la programmazione dinamica (di Bellman).<sup>1</sup>

Si consideri il problema di scelta intertemporale che consiste nella massimizzazione della funzione  $\sum_{t=0}^T F(x_t, y_t, t)$  subordinatamente ai vincoli  $y_{t+1} - y_t = Q(x_t, y_t, t)$ , ove  $x_t$  e  $y_t$  sono vettori (non necessariamente di uguale dimensione). Le variabili  $x$  sono chiamate *variabili di controllo* e le  $y$  *variabili di stato*. Le prime sono normalmente dei *flussi* (come consumi, produzioni, redditi, ecc., cioè, grandezze misurate in unità di tempo), la seconde *fondi* (come ammontare di ricchezza, moneta, ecc., cioè, grandezze prive di dimensione temporale). Siano assegnati i valori iniziali e terminali delle variabili di stato, cioè,  $y_0$  e  $y_{T+1}$ , e siano le funzioni  $F$  e  $Q$  continuamente differenziabili. La funzione lagrangiana di questo problema è

$$L(x, y, \mu) = \sum_{t=0}^T (F(x_t, y_t, t) - \mu_t (y_{t+1} - y_t - Q(x_t, y_t, t)))$$

I moltiplicatori di Lagrange  $\mu$  vengono chiamati *variabili di costo*.

Le condizioni del primo ordine vengono individuate introducendo la funzione

$$H(x_t, y_t, \mu_t, t) = F(x_t, y_t, t) + \mu_t Q(x_t, y_t, t)$$

chiamata funzione *hamiltoniana*. Si consideri il massimo di questa funzione rispetto alle variabili di controllo  $x_t$ , cioè,  $H^*(y_t, \mu_t, t) = \max_{x_t} H(x_t, y_t, \mu_t, t)$ .

Le condizioni del primo ordine del problema in esame richiedono, per il principio del massimo, oltre alle condizioni che assicurano il massimo appena indicato della funzione hamiltoniana, cioè,

$$D_{x_t} H(x_t, y_t, \mu_t, t) = 0$$

anche le uguaglianze seguenti

$$y_{t+1} - y_t = Q(x_t, y_t, t) = D_{\mu_t} H(x_t, y_t, \mu_t, t)$$

$$\mu_t - \mu_{t-1} = -D_{y_t} H(x_t, y_t, \mu_t, t)$$

Nel caso in cui l'orizzonte è infinito (cioè,  $T = \infty$ ), la condizione che assegna  $y_{T+1}$  va sostituita con la condizione (talvolta indicata come condizione di *trasversalità*):  $\lim_{t \rightarrow \infty} \mu_t y_t = 0$ .

Riprendendo l'analisi compiuta nel paragrafo precedente, i consumi  $x_t$  sono le variabili di controllo e i risparmi totali  $S_t$  le variabili di stato (con  $S_0 = S_{T+1} = 0$ ). Nei termini qui usati per il principio del massimo, la

---

<sup>1</sup> L'ottimizzazione dinamica è presentata in molti testi di economia matematica. Fra questi: Intriligator (1971) e Dixit (1990).

funzione  $F(x_t, y_t, t)$  corrisponde alla funzione  $\delta^t u(x_t)$  e i vincoli  $y_{t+1} - y_t = Q(x_t, y_t, t)$  corrispondono alle relazioni  $S_{t+1} - S_t = I_t + i S_t - p_t x_t$  (cioè, la variazione del risparmio totale tra due tempi successivi è pari al risparmio realizzato nel frattempo). Allora, le tre condizioni sulle derivate della funzione hamiltoniana richiedono, rispettivamente,

$$\delta^t Du(x_t^*) = \mu_t^* p_t, \quad S_{t+1}^* - S_t^* = I_t + i S_t^* - p_t x_t^*, \quad \mu_t^* - \mu_{t-1}^* = -i \mu_t^*$$

che corrispondono (ponendo  $\mu_t = \delta^t \lambda_t$ ) alle condizioni indicate alla fine del paragrafo 6.2.

Sia, ad esempio,  $x_t \in \mathbb{R}_+$  con  $u = \ln x_t$  e sia il reddito  $I$  costante nel tempo. Le condizioni precedenti richiedono

$$\delta^t = \mu_t^* p_t x_t^*, \quad S_{t+1}^* - S_t^* = I + i S_t^* - p_t x_t^*, \quad \mu_t^* - \mu_{t-1}^* = -i \mu_t^*$$

e, ponendo  $\alpha = \delta(1+i)$  e  $A = \frac{1+i-\alpha}{i} \frac{(1+i)^{T+1} - 1}{(1+i)^{T+1} - \alpha^{T+1}} I$ , si ottiene la soluzione (con  $A = (1+i-\alpha)I/i$ , se  $T = \infty$ )<sup>2</sup>

$$p_t x_t^* = A \alpha^t, \quad S_t^* = \frac{(1+i)^t - 1}{i} I - \frac{(1+i)^t - \alpha^t}{1+i-\alpha} A$$

Se  $\alpha = 1$ , si trova  $p_t x_t^* = I$  e  $S_t^* = 0$ . Se  $\alpha > 1$ ,  $p_t x_t^*$  è crescente nel tempo e  $S_t^* > 0$  per  $t = 1, \dots, T$ . Se  $\alpha < 1$ ,  $p_t x_t^*$  è decrescente nel tempo e  $S_t^* < 0$  per  $t = 1, \dots, T$ .

Se il tempo si svolge nel continuo (cioè,  $t \in [0, T]$ , invece che essere un numero intero, come accade quando si svolge nel discreto), allora, il problema di ottimizzazione consiste nella massimizzazione del funzionale  $\int_0^T F(x(t), y(t), t) dt$  subordinatamente ai vincoli  $D_t y(t) = Q(x(t), y(t), t)$ , con i valori iniziali e terminali delle variabili di stato, cioè,  $y(0)$  e  $y(T)$ , assegnati. La funzione lagrangiana di questo problema è

$$L(x, y, \mu) = \int_0^T (F(x(t), y(t), t) - \mu(t)(Dy(t) - Q(x(t), y(t), t))) dt$$

Le condizioni del primo ordine vengono individuate introducendo la funzione hamiltoniana

$$H(x(t), y(t), \mu(t), t) = F(x(t), y(t), t) + \mu(t) Q(x(t), y(t), t)$$

e sono rappresentate dalle equazioni

$$D_{x(t)} H(x(t), y(t), \mu(t), t) = 0$$

---

<sup>2</sup> Dalla equazione  $\mu_t - \mu_{t-1} = -i \mu_t$  si ricava  $\mu_t = (1+i)^{-t} \mu_0$  e, quindi,  $p_t x_t = \alpha^t / \mu_0$ . Allora, dalla equazione  $S_{t+1} - S_t = I + i S_t - p_t x_t$ , ponendo  $S_0 = 0$ , si ottiene  $S_t = \sum_{h=0}^{t-1} (1+i)^{t-1-h} (I - \alpha^h / \mu_0) = ((1+i)^t - 1) I / i - ((1+i)^t - \alpha^t) / (\mu_0 (1+i-\alpha))$ , da cui, ponendo

$S_{T+1} = 0$ , risultano  $A = \frac{1}{\mu_0} = \frac{1+i-\alpha}{i} \frac{(1+i)^{T+1} - 1}{(1+i)^{T+1} - \alpha^{T+1}} I$  e le soluzioni indicate nel testo.

$$D_t y(t) = Q(x(t), y(t), t) = D_{\mu(t)} H(x(t), y(t), \mu(t), t)$$

$$D_t \mu(t) = - D_{y(t)} H(x(t), y(t), \mu(t), t)$$

Nel caso in cui l'orizzonte è infinito (cioè,  $T = \infty$ ), la condizione che assegna  $y(T)$  va sostituita con la condizione (di *trasversalità*)  $\lim_{t \rightarrow \infty} \mu(t)y(t) = 0$ .

L'esempio nel continuo, analogo a quello svolto precedentemente nel discreto, considera la massimizzazione del funzionale  $\int_0^T e^{-\rho t} \ln x(t) dt$  subordinatamente al vincolo  $D_t S(t) = I + i S(t) - p(t) x(t)$ , con  $\rho > 0$  e  $S(0) = S(T) = 0$ . L'hamiltoniano è, in questo esempio,

$$H(x(t), S(t), \mu(t), t) = e^{-\rho t} \ln x(t) + \mu(t) (I + i S(t) - p(t) x(t))$$

Le condizioni del primo ordine richiedono

$$e^{-\rho t} = \mu(t)^* p(t) x(t)^*, \quad D_t S(t)^* = I + i S(t)^* - p(t) x(t)^*, \quad D_t \mu(t)^* = -i \mu(t)^*$$

e, ponendo  $C = \frac{\rho}{i} \frac{e^{iT} - 1}{e^{iT} - e^{(i-\rho)T}} I$ , si ottiene la soluzione (con  $C = \rho I / i$ , se  $T = \infty$ )<sup>3</sup>

$$p(t) x(t)^* = C e^{(i-\rho)t}, \quad S(t)^* = \frac{I}{i} (e^{it} - 1) - \frac{C}{\rho} (e^{it} - e^{(i-\rho)t})$$

Se  $i = \rho$ , si trova  $p(t) x(t)^* = I$  e  $S(t)^* = 0$ . Se  $i > \rho$ ,  $p(t) x(t)^*$  è crescente nel tempo e  $S(t)^* > 0$  per  $t \in (0, T)$ . Se  $i < \rho$ ,  $p(t) x(t)^*$  è decrescente nel tempo e  $S(t)^* < 0$  per  $t \in (0, T)$ .

### 6.3 La programmazione dinamica

La programmazione dinamica tratta gli stessi problemi del principio del massimo. Normalmente, è più conveniente usare il principio del massimo se il problema di scelta è del tipo con tempo continuo (e si tratta, sostanzialmente, di risolvere due sistemi di equazioni differenziali lineari del primo ordine), mentre la programmazione dinamica è più conveniente con tempo discreto e per i problemi di scelta intertemporale con incertezza.

---

<sup>3</sup> Conviene risolvere dapprima l'equazione differenziale  $D_t \mu(t) = -i \mu(t)$ , trovando  $\mu(t) = \mu(0) e^{-it}$ . Si ricava, quindi,  $p(t) x(t) = e^{(i-\rho)t} / \mu(0)$  e  $D_t S(t) = I + i S(t) - e^{(i-\rho)t} / \mu(0)$ . La soluzione di questa equazione differenziale può essere ricavata tenendo presente che  $D_t (e^{-it} S(t)) = e^{-it} (D_t S(t) - i S(t)) = I e^{-it} - e^{-\rho t} / \mu(0)$ . Integrando questa equazione, si ottiene  $e^{-it} S(t) = -I e^{-it} / i + e^{-\rho t} / (\rho \mu(0)) + k$ , ove  $k$  è una costante che viene determinata dalla condizione  $S(0) = 0$ , risultando  $S(t) = (e^{it} - 1) I / i - (e^{it} - e^{(i-\rho)t}) / (\rho \mu(0))$ . La condizione  $S(T) = 0$  consente ora di determinare  $\mu(0) = 1/C$ , ove  $C$  è la costante indicata nel testo.

La programmazione dinamica è fondata sul principio che una sequenza di scelte è una scelta intertemporale ottimale se ogni scelta nella sequenza è ottimale relativamente alla situazione determinata dalle scelte precedenti.

Si consideri, allora, lo stesso problema esaminato nel paragrafo precedente, cioè, la massimizzazione della funzione  $\sum_{t=0}^T F(x_t, y_t, t)$  subordinatamente ai vincoli  $y_{t+1} - y_t = Q(x_t, y_t, t)$ , con i valori iniziali e terminali delle variabili di stato, cioè,  $y_0$  e  $y_{T+1}$ , assegnati. La programmazione dinamica utilizza, in accordo con il principio appena enunciato, la soluzione per stadi usata nel paragrafo 6.2. Partendo dall'ultimo tempo, si considera il problema

$$V(y_T, T) = \max_{x_T} F(x_T, y_T, T) \text{ sotto il vincolo } y_{T+1} - y_T = Q(x_T, y_T, T)$$

e si procede a ritroso, considerando, per  $t = T-1, T-2, \dots, 0$ , i problemi

$$V(y_t, t) = \max_{x_t, y_{t+1}} (F(x_t, y_t, t) + V(y_{t+1}, t+1)) \text{ sotto il vincolo } y_{t+1} - y_t = Q(x_t, y_t, t)$$

ossia,

$$V(y_t, t) = \max_{x_t} (F(x_t, y_t, t) + V(y_t + Q(x_t, y_t, t), t+1))$$

La funzione  $V(y_t, t)$  è spesso chiamata funzione del valore (di Bellman). Le condizioni del primo ordine di questi problemi, ottenute introducendo le funzioni lagrangiane

$$L(x_t, y_{t+1}, \mu_t) = F(x_t, y_t, t) + V(y_{t+1}, t+1) - \mu_t (y_{t+1} - y_t - Q(x_t, y_t, t))$$

per  $t = 0, 1, \dots, T-1$ , e, per  $t = T$ ,

$$L(x_T, \mu_T) = F(x_T, y_T, T) - \mu_T (y_{T+1} - y_T - Q(x_T, y_T, T))$$

risultano essere

$$D_{x_t} (F(x_t^*, y_t^*, t) + \mu_t^* Q(x_t^*, y_t^*, t)) = 0 \quad t = 0, 1, \dots, T$$

$$D_{y_{t+1}} V(y_{t+1}^*, t+1) = \mu_t^* \quad t = 0, 1, \dots, T-1$$

$$y_{t+1}^* - y_t^* = Q(x_t^*, y_t^*, t) \quad t = 0, 1, \dots, T$$

con  $D_{y_{t+1}} V(y_{t+1}^*, t+1) = D_{y_{t+1}} F(x_{t+1}^*, y_{t+1}^*, t+1) + (I + D_{y_{t+1}} Q(x_{t+1}^*, y_{t+1}^*, t+1)) \mu_{t+1}^*$ , ove  $I$  è la matrice identità. (Si è generalizzata un po' la Proposizione 3.11 per tenere conto che vi è qui, in generale, un vettore di vincoli e che  $y_{t+1}$  è argomento non solo dei vincoli ma anche, in generale, della funzione obiettivo). Si noti come queste condizioni del primo ordine coincidano con quelle già individuate applicando il principio del massimo.

Nel continuo, si ha il problema di massimizzare il funzionale

$\int_0^T F(x(t), y(t), t) dt$  subordinatamente ai vincoli  $D_t y(t) = Q(x(t), y(t), t)$ , con  $y(0)$  e  $y(T)$  assegnati. Essendo

$$V(y(t), t) = \max_{x(t)} (F(x(t), y(t), t) \Delta t + V(y(t)+\Delta t, t+\Delta t))$$

sviluppando in serie di Taylor

$$V(y(t)+\Delta t, t+\Delta t) = V(y(t), t) + D_{y(t)} V(y(t), t) \Delta y(t) + D_t V(y(t), t) \Delta t + \dots$$

si ottiene

$$0 = \max_{x(t)} (F(x(t), y(t), t) + \frac{\Delta y(t)}{\Delta t} D_{y(t)} V(y(t), t) + D_t V(y(t), t)) + \dots$$

e, infine, con il limite per  $\Delta t \rightarrow 0$  e tenendo conto dei vincoli  $D_t y(t) = Q(x(t), y(t), t)$ ,

$$- D_t V(y(t), t) = \max_{x(t)} (F(x(t), y(t), t) + Q(x(t), y(t), t) D_{y(t)} V(y(t), t))$$

Questa relazione (che è una equazione differenziale del primo ordine alle derivate parziali) è chiamata *equazione di Bellman*. E', normalmente, non lineare e priva di soluzione analitica.

## 6.4 Un modello di crescita ottima

Si consideri un'economia con un solo decisore e un solo bene, che può essere impiegato sia nel consumo sia nella produzione. La quantità impiegata nel consumo perisce con il consumo (ossia, non è un bene di consumo durevole), mentre quella impiegata nella produzione non può più essere impiegata nel consumo ed è parzialmente durevole, con un tasso costante di logoramento pari a  $\delta$  (che indica, in termini relativi, quanto capitale, che è la quantità del bene impiegata nella produzione, perisce nell'unità di tempo). Dipenda la produzione soltanto dalla quantità di capitale, secondo una funzione di produzione che non cambia nel tempo (quindi, senza progresso tecnico). Sia, allora,  $f(k)$  il flusso della produzione (quantità di bene prodotta per unità di tempo), ove  $k$  indica la quantità di capitale e  $f$  la funzione di produzione, per ipotesi, crescente e strettamente concava. L'accrescimento del capitale  $\dot{k}$  (questo simbolo indica la derivata  $\frac{dk(t)}{dt}$ ) è, perciò, pari alla produzione  $f(k)$  diminuita del flusso del consumo  $c$  e dell'ammortamento  $\delta k$ , cioè,

$$\dot{k} = f(k) - c - \delta k$$

ove  $c$  e  $k$  sono funzioni del tempo (per semplicità, indicate con i simboli  $c$  e  $k$ , invece che  $c(t)$  e  $k(t)$ ), con  $k(0) > 0$  assegnato. Le preferenze dell'agente siano rappresentate dal funzionale  $\int_0^\infty e^{-\rho t} u(c) dt$ , ove la funzione di utilità temporanea  $u$  è crescente e strettamente concava e il tasso di sconto soggettivo dell'utilità è positivo. La scelta intertemporale dell'agente consiste, allora, nel problema

$$\max_{c,k} \int_0^{\infty} e^{-\rho t} u(c) dt \text{ sotto il vincolo } \dot{k} = f(k) - c - \delta k$$

Si ha, quindi, un problema di scelta intertemporale che può essere affrontato con il principio del massimo (indicato nel paragrafo 6.3). La funzione hamiltoniana è

$$H(c, k, \mu) = e^{-\rho t} u(c) + \mu (f(k) - c - \delta k)$$

da cui discendono le condizioni del primo ordine<sup>4</sup>

$$e^{-\rho t} u'(c) = \mu, \quad \dot{k} = f(k) - c - \delta k, \quad \dot{\mu} = -\mu (f'(k) - \delta)$$

Anche senza risolvere analiticamente questo sistema di equazioni differenziali (soluzione tutt'altro che agevole anche se si specificano le funzioni di utilità e di produzione), si possono esaminare le caratteristiche principali della soluzione in un diagramma di fase, nel modo seguente. Il sistema precedente può essere riscritto, eliminando per sostituzione  $\mu$ , nella forma

$$\frac{\dot{c}}{c} = \frac{1}{\sigma(c)} (f'(k) - (\rho + \delta)), \quad \dot{k} = f(k) - c - \delta k$$

ove  $\sigma(c) = -c u''(c) / u'(c)$  è l'elasticità dell'utilità marginale del consumo. Nel diagramma di assi  $k$  e  $c$ , rappresentato nella Figura 6.1, la curva di equazione

$$f(k) - c - \delta k = 0$$

separa i punti con  $\dot{k} > 0$  (che sono quelli al di sotto della curva) da quelli con  $\dot{k} < 0$  (al di sopra). La condizione  $\dot{k} > 0$  (rispettivamente,  $\dot{k} < 0$ ) significa che  $k$  cresce (decresce) nel tempo e questo viene rappresentato con una freccia verso destra (sinistra). Analogamente, l'equazione<sup>5</sup>

$$f'(k) - (\rho + \delta) = 0$$

indica il valore  $k^*$  per cui i punti con  $k < k^*$  (perciò, con  $f'(k) - (\rho + \delta) > 0$ ) mostrano  $c$  crescente nel tempo (freccia verso l'alto) e quelli con  $k > k^*$  mostrano  $c$  decrescente nel tempo (freccia verso il basso). Il punto  $(k^*, c^*)$ , in cui entrambe le equazioni sono soddisfatte è l'unico punto stazionario (ossia, in cui  $\dot{k} = 0$  e  $\dot{c} = 0$ ). Nella figura sono tracciate alcune possibili traiettorie (sono le curve tratteggiate), fra le quali due soltanto convergono verso il punto stazionario (una da valori inferiori di  $c$  e  $k$ , l'altra da valori superiori).

<sup>4</sup> Si noti come queste condizioni coincidano con quelle dell'esempio alla fine del paragrafo 6.3 se si pone  $c = p(t) x(t)$  e  $k = S(t)$ , con  $u(c) = \ln c$  e  $f(k) - \delta k = I + i k$ .

<sup>5</sup> Essendo la funzione di produzione crescente e strettamente concava, cioè,  $f(0) = 0$ ,  $f'(k) > 0$  e  $f''(k) < 0$  per ogni  $k > 0$ , l'equazione indicata ha un'unica soluzione, inoltre positiva e finita, se  $(\rho + \delta) \in (f'(\infty), f'(0))$ . Si ha, poi,  $c^* = f(k^*) - \delta k^*$ , anch'esso unico, positivo e finito, poiché  $g(k) = f(k) - \delta k$  è una funzione, con  $g(0) = 0$  e crescente per  $k \leq k^*$  (poiché,  $g'(0) > 0$ , essendo  $\delta < \rho + \delta < f'(0)$ , con  $g'(k) = f'(k) - \delta$  e  $g''(k) = f''(k) < 0$ , perciò con  $g'(k^*) = f'(k^*) - \delta > 0$  essendo  $f'(k^*) - \delta = \rho > 0$ ).

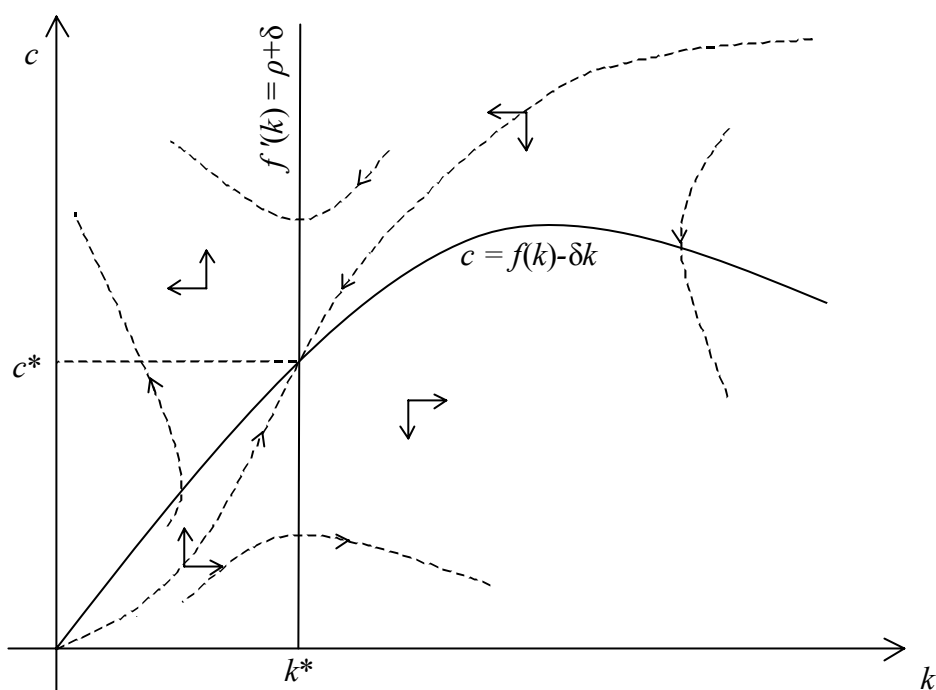


Figura 6.1

Queste sono le due traiettorie che rappresentano la soluzione del problema di scelta intertemporale: la prima se  $k(0) < k^*$  e la seconda se  $k(0) > k^*$  (ovviamente, se  $k(0) = k^*$ , la scelta è rappresentata dalle funzioni stazionarie  $k(t) = k^*$  e  $c(t) = c^*$ ). Un modo per vedere come le altre traiettorie non rappresentino la scelta intertemporale è il seguente. Se  $k(0) < k^*$ , la Figura 6.1 mostra che sono possibili due tipi di traiettorie non convergenti: quelle con  $c(t) < c^*$  per ogni  $t$  o quelle con  $k(t) < k^*$  per ogni  $t$ . Le prime presentano da un certo tempo in poi  $k(t) > k^*$ : sarebbe, allora, possibile, a partire dal tempo  $t^*$  per cui  $k(t^*) = k^*$ , cioè, per  $t \geq t^*$ , scegliere  $k'(t) = k^*$  e  $c'(t) = c^*$ , ottenendo così un risultato migliore, poiché  $c'(t) = c(t)$  per  $t < t^*$  e  $c'(t) > c(t)$  per  $t \geq t^*$ . Quindi, le traiettorie indicate non rappresentano soluzioni del problema in esame. Le traiettorie con  $k(t) < k^*$  per ogni  $t$  presentano  $c$  crescente per ogni  $t$ , tale perciò da determinare, da un certo tempo in poi, la situazione impossibile  $c(t) > f(k(t))$  (come si può vedere sulla Figura 6.1 tracciando in essa la curva  $c = f(k)$ ).<sup>6</sup> Se  $k(0) > k^*$ , sono possibili due tipi di traiettorie non convergenti: quelle

<sup>6</sup> Questa impossibilità non è conclusiva, ma denota che il problema di scelta è stato rappresentato in modo semplificato, avendo trascurato di inserire il vincolo  $c(t) \leq f(k(t))$ . Se si inserisce questo vincolo, nulla cambia quando esso non è stringente (è, cioè, una pura disuguaglianza). Invece, quando diviene stringente, si ha  $c = f(k)$  e, quindi,  $\dot{k} = -\delta k$ , per cui la traiettoria prosegue sulla curva  $c = f(k)$  convergendo verso il punto  $k = 0$ ,  $c = 0$ . Si può intuitivamente dedurre che questa traiettoria è peggiore di quella indicata nel testo come ottima.

con  $c(t) > c^*$  per ogni  $t$  o quelle con  $k(t) > k^*$  per ogni  $t$ . Le prime presentano da un certo tempo in poi  $c$  crescente, tali perciò, anch'esse, da generare la situazione impossibile  $c(t) > f(k(t))$ . Le seconde presentano da un certo tempo in poi  $c(t) < c^*$ : sarebbe, allora, possibile, a partire dal tempo  $t^{**}$  per cui  $c(t^{**}) = c^*$ , cioè per  $t \geq t^*$ , scegliere  $k'(t) = k^*$  e  $c'(t) = c^*$ , ottenendo così un risultato migliore, poiché  $c'(t) = c(t)$  per  $t < t^{**}$  e  $c'(t) > c(t)$  per  $t \geq t^{**}$ . Rimangono, allora, come soluzioni del problema della scelta intertemporale in esame, solo le traiettorie convergenti, che richiedono che l'agente scelga  $c(0)$  in modo appropriato, cioè, in modo tale che il punto  $(k(0), c(0))$  giaccia sulla traiettoria convergente.

## 6.5 L'evoluzione dell'analisi della scelta intertemporale

L'analisi della scelta intertemporale viene usata nella teoria economica sia per descrivere aspetti rilevanti della scelta individuale, sia per rappresentare con essa dinamiche aggregate ottimali (l'ottimalità essendo definita in termini di razionalizzabilità, per cui queste dinamiche sono ottimali se possono essere descritte come il risultato di una scelta).

Per quanto riguarda la scelta individuale, la scelta intertemporale è stata impiegata soprattutto in relazione a problemi riguardanti la ricchezza dell'individuo, quindi, ad esempio, a scelte di risparmio, in particolare, in condizioni di incertezza. (Nel Paragrafo 6.3 è stato presentato questo tipo di problematica in condizioni di certezza. Nel Paragrafo 7.8 verrà presentato il caso analogo in condizioni di incertezza). Un particolare rilievo in questa problematica ha la teoria del ciclo di vita, che esamina, sotto diverse ipotesi, il piano ottimo di lavoro, consumo e risparmio per tutto il corso della vita di un individuo. Esempi di dinamiche aggregate ottimali sono i modelli di crescita ottima (di cui è stato presentato nel Paragrafo 6.5 un caso particolarmente semplice).

Le analisi di scelta intertemporale hanno avuto un notevole sviluppo a partire dagli anni Sessanta, dopo le prime pionieristiche teorie di Ramsey (1928), von Neumann (1931), Volterra (1931) e La Volpe (1936). Hanno contribuito a questo sviluppo molti economisti, fra cui Solow (1956), Swan (1956), Tinbergen (1960), Koopmans (1960), Goodwin (1961), Chakravarty (1962), Black (1962), Uzawa (1964), Yaari (1964), Samuelson (1965), Cass (1965), Kurz (1965), Phelps (1966), Mirrlees (1967), Arrow (1968) e Shell (1969). Gli sviluppi successivi sono molto estesi, soprattutto nell'ambito delle teorie della finanza e della crescita, e costituiscono ormai campi specifici di studio.